T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-DR-012

WARPED ÇARPIM MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SOLİTONLAR

Seçkin GÜNSEN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Leyla ONAT

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Seçkin GÜNSEN tarafından hazırlanan "Warped Çarpım Manifoldları Üzerinde Solitonlar" başlıklı tez, 27.11.2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ	İTÜ	
Üye	:	Prof. Dr. Leyla ONAT	ADÜ	
Üye	:	Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ	BŞEÜ	
Üye	:	Doç. Dr. Çetin CAMCI	ÇOMÜ	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Dilek AÇIKGÖZ KAYA	ADÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

27.11.2020

Seçkin GÜNSEN

ÖZET

WARPED ÇARPIM MANİFOLDLARI ÜZERİNDE SOLİTONLAR

Seçkin GÜNSEN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Leyla ONAT
2020, 65 sayfa

Girişten sonra beş bölümden oluşan bu tez çalışmasında, warped çarpım manifoldları üzerinde bazı özel yapılar incelenerek manifoldun kompaktlığı, warping fonksiyonunun sabit olup olmaması, taban ve fiber manifoldlarının yapısı ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

İlk iki bölümde Riemann geometrisinde sıkça kullanılan temel kavramlar verilmiş ve Riemann manifodları üzerinde bazı özel yapılar tanıtılmıştır.

Warped çarpım manifoldları üzerinde Ricci solitonlar ile ilgili yapılan çalışmalara ve elde edilen yeni sonuçlara üçüncü bölümde yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde warped çarpım manifoldları üzerinde almost Ricci solitonlar incelenmiş, çoklu warped çarpım manifoldu üzerinde elde edilen karakterizasyonlar verilmiştir.

Son bölümde ise warped çarpım manifoldları üzerinde τ-quasi Ricci-Harmonik metriklerin varlığı araştırılmış, manifoldun rigiditesi ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Warped çarpım manifoldu, Einstein manifoldu, Ricci soliton, almost Ricci soliton, Ricci-Harmonik soliton, harmonik Einstein, τ-quasi Ricci-Harmonik metrik.

ABSTRACT

SOLITONS ON WARPED PRODUCT MANIFOLDS

Seçkin GÜNSEN

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Leyla ONAT
2020, 65 pages

In this study, which consists an introduction and five chapters, some results are obtained for compactness of manifold, whether the warping function is constant or not, and structure of the base and fiber by examining certain special structures on warped product manifolds.

In first two chapters, basic notions of Riemann geometry are recalled and some special structures on Riemann manifolds are introduced.

In third chapter, Ricci solitons on warped products are examined and new results on this subject are given.

Fourth chapter focuses on almost Ricci solitons on warped product manifolds so that some new characterizations for almost Ricci solitons on multiply warped product manifolds are obtained.

In the final chapter, existence of τ-quasi Ricci-Harmonic metrics on warped products is investigated and regarding outcomes on the rigidity of the manifold are stated.

Key Words: Warped products, Einstein manifold, Ricci soliton, almost Ricci soliton, Ricci-Harmonic soliton, harmonic Einstein, τ-quasi Ricci-Harmonic metrics

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, diferansiyel geometri alanında en baştan başlayarak bugünlere gelmemde bana her zaman yardımcı olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Leyla ONAT'a (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi) bana gösterdiği destek ve anlayış için teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Tez İzleme Kurulu üyeleri Prof. Dr. Sezgin ALTAY DEMİRBAĞ'a (İstanbul Teknik Üniversitesi) ve Dr. Öğr. Üyesi Dilek AÇIKGÖZ KAYA'ya (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi) bu süreçte verdikleri kıymetli katkılarından ve olumlu yönlendirmelerinden dolayı teşekkür ederim.

Aldığım kararlarda ve zor anlarımda hep yanımda hissettiğim anneme, babama, abime ve dostlarıma destekleri için teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince bana çalışma ortamı yaratmak için sürekli fedakarlıkta bulunan ve sabırla beni destekleyen hayat arkadaşım Selda Günsen'e ve ders çalışma kavramını erken yaşta öğrenmek zorunda kalan kızım Güneş Sevgi Günsen'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışması boyunca, 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı maddi destekten ötürü TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Seçkin GÜNSEN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI v
ÖZET vii
ABSTRACT ix
ÖNSÖZ xi
SİMGELER DİZİNİ xv

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1. Warped Çarpım Manifoldları 18
2.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldları 20

3. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE ÖZEL YAPILAR 23

3.1. Gradiyent Ricci Solitonlar 23
3.2. Gradiyent Almost Ricci Solitonlar 24
3.3. (m-)quasi-Einstein Manifoldları 25
3.4. Gradiyent Ricci-Harmonik Solitonlar 26

4. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE GRADİYENT RICCI SOLİTONLAR 31

4.1. Warped Çarpım Manifoldu Üzerinde Gradiyent Ricci Solitonlar 31
4.1.1. Warped Çarpım Rici Solitonların İnşası 31
4.1.2. Elde Edilen Yeni Sonuçlar 32
4.1.2.1. Potansiyel Vektör Alanının Konformal Olması Durumu 33
4.1.2.2. Potansiyel Fonksiyonun Fiber Manifoldundan Lift Edilmesi Durumu 35
4.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldu Üzerinde Ricci Solitonlar 39

5. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE GRADİYENT ALMOST RICCI SOLİTONLAR 42

5.1. Warped Çarpım Gradiyent Almost Ricci Solitonlar 42
5.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldları Üzerinde Gradiyent Almost Ricci Solitonlar İçin Elde Edilen Sonuçlar 43

6. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE τ-QUASI RICCI-HARMONİK METRİKLER 52

KAYNAKLAR 62

ÖZGEÇMİŞ 65

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$M = B \times_f F$	Warped çarpım manifoldu
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathfrak{X}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanları kümesi
$\mathfrak{X}^*(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün 1-formlar kümesi
$\mathfrak{F}(M)$	M manifoldu üzerindeki düzgün fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{T}_s^r(M)$	M manifoldu üzerindeki $(r,s)-$tipindeki tensör alanları kümesi
$\mathcal{D}$	Tensör türevi
L_V	V vektör alanına göre Lie türevi
X,Y,V,W,Z	M manifoldu üzerinde vektör alanları
θ, ω	M manifoldu üzerinde 1-formlar
∇	M manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu
∇f	f fonksiyonun gradiyenti
Hess f	f fonksiyonunun Hessiyanı
div A	A tensör alanının diverjansı
Δf	f fonksiyonun Laplasiyeni
$\mathcal{R}$	M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü
Ric	M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
Ric_f^m	Bakry-Emery eğrilik tensörü
R	M manifoldunun skalar eğriliği
tr	İz operatörü
$\tau(\phi)$	ϕ dönüşümünün tensiyon alanı

1. GİRİŞ

Warped çarpım manifoldları, hem geometri hem de fizikte bulduğu geniş uygulama alanları sayesinde günümüze kadar ilgi ile çalışılan konulardan biri olmuştur. Warped çarpım kavramı, Bishop ve O'Neill [8] tarafından negatif kesitsel eğriliğe sahip tam(complete) Riemann manifoldlarına örnekler vermek için tanımlanmıştır. (B, g_B) ve (F, g_F) Riemann manifoldarı ve f, B manifoldu üzerinde tanımlı pozitif değerli, diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

eşitliği ile tanımlanan g metriği ile birlikte $B \times F$ çarpım manifolduna warped çarpım manifoldu denir ve bu manifold $B \times_f F$ ile gösterilir. Burada f fonksiyonuna warping fonksiyonu denir. f fonksiyonun sabit olması durumunda M manifoldu bilinen Riemann çarpım manifoldudur. Besse'nin [7](s.265), warping fonksiyonu sabit olmayan bir kompakt Einstein uzayı olup olmadığı ile ilgili sorusu üzerine, Kim ve Kim [28], manifoldun skalar eğriliği pozitif değil ise warping fonksiyonu sabit olmayan kompakt Einstein warped çarpım uzayının bulunmadığını göstermiştir. Ayrıca, warped çarpım manifoldunun Einstein manifoldu olması için gerek koşulun taban manifoldunun bir quasi-Einstein manifoldu olması gerektiğini göstermişlerdir.

Einstein manifoldlarının doğal bir genellemesi Ricci solitonlardır. Bir Ricci soliton, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2} L_v g = \lambda g \tag{1.1}$$

eşitliği ile verilen bir Riemann manifoldudur. Bu eşitliğe göre, V vektör alanının Killing olması durumunda manifoldun Einstein olduğu açıktır. V vektör alanı M manifoldu üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyonun gradiyenti ise M manifolduna gradiyent Ricci soliton denir.$V = \nabla u$ olacak biçimdeki u fonksiyonu gradiyent solitonun potansiyel fonksiyonu denir. Feitosa, Filho ve Gomes [17] 2017 yılında yaptıkları çalışmada, warped çarpım manifoldunun gradiyent Ricci soliton olması durumunu incelemişlerdir.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, warping fonksiyonu ile potansiyel fonksiyonu farklı olarak seçilerek warped çarpım manifoldu üzerinde yeni karakterizasyonlar elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için, warped çarpım manifoldarı üzerinde bazı özel yapılar incelenecek, böylelikle warped çarpım manifoldunun kompaktlığı, warping fonksiyonunun sabit olup olmaması, taban ve fiber manifoldlarının yapısı ile ilgili bulunan sonuçlar açıklanacaktır.

Girişten sonraki ilk bölümde, Riemann geometrisinde yer alan tez konusu ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerine alt yapı teşkil edecek olan Riemann manifoldları üzerinde bazı özel yapılar tanıtılacaktır.

Üçüncü bölümde, warped çarpım ve çoklu warped çarpım manifoldlarının Ricci soliton olması durumu incelenecektir. Bu bölümde, bazı varsayımlar altında M manifoldunun kompaktlığına, warping fonksiyonun sabit oluşuna ve taban manifoldunun yapısına dair sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, warping ve potansiyel fonksiyonların gradiyent vektör alanları arasında bir ilişki bulunmuştur.

(1.1) denklemindeki λ sabitinin M manifoldu üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olarak alınabileceği [36] makalesinde gösterilmiştir. Bu durumda elde edilen manifolda almost Ricci soliton denir. Dördüncü bölümde, çoklu warped çarpım manifoldu üzerinde almost Ricci solitonlar çalışılarak warping fonksiyonu, çoklu warped çarpım manifoldu ve taban manifoldu ile ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

Ricci solitonların bir diğer genellemesi Müller [30] tarafından tanımlanan Ricci-harmonik solitonlardır. Wang [43], Bakry-Emery tensörünü kullanarak Ricci-Harmonik metriklerin bir genellemesi olarak τ-quasi Ricci-Harmonik metrikleri tanımlamıştır. Beşinci bölümde, warped çarpım manifoldları üzerinde τ-quasi Ricci-Harmonik metriğin varlığı ile ilgili bazı sonuçlar diferansiyel denklem sistemleri kullanılarak incelenmiş ve bazı koşullar altında M manifoldunun harmonik Einstein manifoldu olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili sıklıkla kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir.

M, n boyutlu bir Riemann manifoldu, $(\mathcal{U},\eta)$ bu manifoldun bir koordinat komşuluğu, $\eta=(x^1,x^2,...,x^n)$ bu koordinat komşuluğundan elde edilen koordinat sistemi olsun. $1\leq j\leq n$ için $\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ olmak üzere $\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$ koordinat çatı alanı ve bu çatı alanının duali $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$ olsun.

M manifoldundan $\mathbb{R}$ kümesine bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{F}(M)$ ve M manifoldu üzerindeki bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ olmak üzere, $\mathfrak{X}(M)$ kümesi $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür ve $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir Lie Cebiridir. $\mathfrak{X}^*(M)$ kümesi M manifoldu 1-formların kümesidir. M manifoldu üzerinde bir V vektör alanı ve bir ω 1-formunun bileşenleri sırası ile V^j ve ω^i fonksiyonları olmak üzere, $V=\sum\limits_{j=1}^{n}V^j\partial_j$ ve $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i dx_i$ dir. $f\in\mathfrak{F}(M)$ fonksiyonunun bir V vektör alanı yönündeki türevi için

$$\nabla_V f=df(V)=V(f)$$

gösterimleri kullanılmaktadır.

Tanım 2.1 ([40]). $r,s\geq 0$ tamsayıları için,

$$A:\mathfrak{X}^*(M)^r\times\mathfrak{X}(M)^s\longrightarrow\mathfrak{F}(M)$$

$\mathfrak{F}(M)-$çoklineer A dönüşümüne M manifoldu üzerinde (r,s) tipinde bir *tensör alanı* denir. M manifoldu üzerinde $(r,s)-$tipinde bütün diferensiyellenebilir tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{T}^r_s(M)$ ile gösterilir.

$A\in\mathfrak{T}^r_s(M)$ olmak üzere A tensör alanı,

$$A=\sum A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\,\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_r}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

eşitliği ile verilir. Burada, $A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları,

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = A(dx^{i_1},...,dx^{i_r},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_s})$$

eşitliği ile belirli olan A tensör alanın η koordinat sistemine göre bileşenleridir.

Tanım 2.2 ([40])**.** M, n boyutlu bir manifold olmak üzere, M manifoldunun her p noktasına

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

simetrik, bilineer, pozitif tanımlı g_p fonksiyonunu karşılık getiren g dönüşümüne M üzerinde *Riemann metrik tensör alanı* denir. g, M manifoldu üzerinde $(0,2)-$tipinde bir tensör alanıdır. Bu metrikle birlikte, M manifolduna ya da (M,g) ikilisine *Riemann Manifoldu* denir.

Her $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g(dx^i(X)E_i, dx^j(Y)E_j) \\ &= g(E_i,E_j)dx^i(X)dx^j(Y) \end{aligned}$$

olduğundan g metrik tensör alanı

$$g = g(E_i,E_j)dx^i \otimes dx^j$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $g_{ij} = g(E_i,E_j)$ fonksiyonları g metriğinin bileşenleridir. Özel olarak g, $\mathbb{R}^n$ uzayının standart metriği olarak seçilirse

$$g = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

dir.

$\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere $V(\omega) = \omega(V)$ eşitliğiyle tanımlı $V : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu lineer olduğundan $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı $(1,0)-$tipinde tensör alanı, $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu da M üzerinde $(0,1)-$tipinde tensör alanıdır. $\mathfrak{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{T}^0_1(M) \cong \mathfrak{X}^*(M)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı için, $A(X)Y = g(X,Y)$ eşitliği ile belirli

$$A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$$

dönüşümü bir lineer izormorfizmdir. $A(X) \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu X^* ile gösterilirse $X^*(Y) = g(X,Y)$ eşitliği elde edilir. Burada X^* 1-formuna, X vektör alanına karşılık gelen 1-form denir. Karşıt olarak $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ dönüşümü lineer izormorfizm olduğundan $X^* \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu verildiğinde $A(X) = X^*$ olacak biçimdeki X vektör alanına X^* 1-formuna karşılık gelen vektör alanı denir. $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{X}^*(M)$ kümeleri arasındaki izormorfizm ile elde edilen bu karşılık gelmeye $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathfrak{X}^*(M)$ uzaylarının metriksel olarak denk olması denir.

X^* 1-formunun bileşenleri

$$X^*(E_j) = \langle g^{ij} X_i E_i, E_j \rangle = X_j$$

olduğundan, X^* 1-formuna karşılık gelen j. bileşeni $g^{ij}X_i$ fonksiyonlarıdır. Buna göre $X = g^{ij}X_iE_j$ olarak yazılabilir. X^* 1-formuna karşılık gelen X vektör alanının bileşenleri X^j olmak üzere $X^j = g^{ij}X_i$ dir. Ayrıca X vektör alanlarına karşılık gelen X^* 1-formunun bileşenleri de $X_j = g_{ij}X^j$ olarak yazılabilir.

Tanım 2.3 ([40])**.** $\{x^1, \ldots, x^n\}$, M^n manifoldunun doğal koordinat sistemi olsun. V ve W, M manifoldu üzerinde vektör alanları olmak üzere, $W = \sum W^i \partial_i$ için,

$$\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i$$

eşitliğiyle belirli $\nabla_V W$ vektör alanına *W vektör alanının V vektör alanına göre kovaryant türevi* denir.

Tanım 2.4 ([40])**.** M bir Riemann manifoldu olmak üzere, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $\nabla(V,W) = \nabla_V W$ fonksiyonuna M manifoldu üzerinde *konneksiyon* denir:

(D1) $\nabla_V W$, W vektör alanına göre $\mathbb{R}-$lineerdir.

(D2) $\nabla_V W$, V vektör alanına göre $\mathfrak{F}(M)-$lineerdir.

(D3) $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.5 ([40])**.** M bir Riemann manifoldu olmak üzere, $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,

(D4) $[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V$

(D5) $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$

önermelerini sağlayan ∇ konneksiyonuna M manifoldunun *Levi-Civita konneksiyonu* denir.

Tanım 2.6 ([35])**.** $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$, her $X, V_1, \ldots, V_s \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\mathcal{D}A(X, V_1, \ldots, V_s) \quad = \quad (\mathcal{D}_X A)(V_1, \ldots, V_s)$$

eşitliği ile tanımlı olan $(0, s+1)-$tipindeki $\mathcal{D}A$ tensör alanına A tensör alanının *kovaryant diferensiyeli* denir. Burada $\mathcal{D}_X$ operatörü, A tensör alanının tensör türevidir.

Tanım 2.7 ([40])**.** $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere, f fonksiyonun *gradiyenti*, $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formuna metrikçe denk olan vektör alanıdır ve

$$\text{grad } f = \nabla f = g^{ij}\partial x^i(f)\partial_j$$

biçiminde yazılır.

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $X = X_j\partial_j$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} df(X) = (\partial_i(f)dx_i)(X_j\partial_j) &= X_j\partial_i(f)\delta_{ij} \\ &= X_j\partial_j(f) \\ &= g(X, \nabla f) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.8 ([40]). $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun.

$$\text{Hess } f = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$$

eşitliğiyle tanımlı Hess $f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümüne f fonksiyonun *Hessiyanı* denir.

Lemma 2.9 ([40]). *f fonksiyonunun Hessiyanı,*

$$(\text{Hess} f)(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle$$

eşitliğini sağlayan $(0,2)-$tipinde simetrik tensör alanıdır.

Tanım 2.10 ([40]). $V \in \mathfrak{X}(M)$ olsun.

$$\text{Her } f \in \mathfrak{F}(M) \text{ için } L_V(f) = Vf$$

$$\text{Her } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ için } L_V(X) = [V,X]$$

eşitlikleri ile belirli L_V tensör türevine V vektör alanına göre *Lie türevi* denir.

$$L_V(fX) = [V, fX] = VfX + f[V,X] = VfX + fL_VX$$

dir. L_V, g tensör alanının tensör türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(Y,Z) = L_V(g(Y,Z)) - g(L_VY,Z) - g(Y,L_VZ)$$

eşitliğiyle belirli olan $(0,2)$ tipindeki L_Vg tensör alanına g metrik tensör alanının V vektör alanına göre Lie türevi denir.

Tanım 2.11 ([40]). (M,g) bir Riemann manifoldu, L_X tensör türevi ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ olsun.

(i) $L_Xg = 0$ ise X vektör alanına *Killing vektör alanı*,

(ii) $\rho : M \to \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$ fonksiyonu için, $L_X g = 2\rho g$ ise X vektör alanına *konformal vektör alanı*,

denir.

Tanım 2.12 ([40]). $\mathbb{R}$ kümesinin M^n manifoldu üzerinde bir φ *etkisi* aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir $\varphi : \mathbb{R} \times M^n \to M^n$ dönüşümüdür.

(1) Her $p \in M^n$ için, $\varphi_0(p) = p$.

(2) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $p \in M^n$ için, $\varphi(a, \varphi(b, p)) = \varphi(a + b, p)$.

$\mathbb{R}$ kümesinin M manifoldu üzerinde bir φ etkisine, M üstünde 1- *parametreli grup etkisi*, $\{\varphi_s(p) | \, s \in \mathbb{R}\}$ kümesine $p \in M$ noktasının *yörüngesi* denir.

Teorem 2.13. [[40]] *φ, $\mathbb{R}$ kümesinin M^n manifoldu üstünde bir etkisi olsun.*

$$X_p f = lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[f(\varphi_s(p)) - f(\varphi_0(p))] \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlanan $X_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, M^n manifoldunun p noktasında bir tanjant vektördür.

(2.1) eşitliğine göre, X_p vektörü p noktasında φ etkisindeki yörüngesinin $\varphi_0(p)$ noktasındaki yani başlangıç noktasındaki hız vektörüdür. $\varphi_s : M^n \to M^n$ diffeomorfizm ve $p \in M^n$ noktasının yörüngesi $\{\varphi_s(p) | \, s \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere,

$\alpha(s) = \varphi_s(p)$ olsun. Her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0) &= \alpha_*(\frac{d}{dt}|_0)f \\
&= (f \circ \alpha)'(0) \\
&= lim_{h\to 0}[(f \circ \alpha)(h) - (f \circ \alpha)(0)] \\
&= lim_{h\to 0}[f(\varphi_h(p)) - f(\varphi_0(p))] \\
&= X_{\varphi_0(p)} f
\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha'(0) = X_{\varphi_0(p)}$ dir.

Tanım 2.14. [40] $V \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. X, 1- parametreli grup etkisinin belirlediği vektör alanı ise, V vektör alanına *tam(complete) vektör alanı* denir.

Tanım 2.15. [40] $V \in \mathfrak{X}(M)$ tam(complete) vektör alanı olsun. α_p, V vektör alanının maksimal integral eğrisi olmak üzere,

$$\psi(p,t) = \alpha_p(t)$$

eşitliği ile belirli $\psi : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$ dönüşümüne V *vektör alanının akışı* denir.

Lemma 2.16. *[40] ψ, bir tam vektör alanının akışı olsun. Bu durumda,*

1. ψ_0, M nin birim dönüşümüdür,

2. $\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

3. $\psi_t^{-1} = \psi_{-t}$

önermeleri sağlanır.

Önerme 2.17 ([40])**.** *V ve W, M^n manifoldu üzerinde vektör alanları ve ψ, V vektör alanının p noktası komşuluğunda lokal akışı olsun. Bu durumda,*

$$[V,W]_p = lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[d\psi_{-t}(W_{\psi_t p}) - W_p]$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 2.18 ([40])**.** *$X \in \mathfrak{X}(M)$, $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ ve ψ_t, X vektör alanının akışı olmak üzere, A tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi*

$$L_X A = lim_{t\to 0}[\psi_t^*(A) - A]$$

eşitliği ile belirlidir.

Lemma 2.19 ([35])**.** *(M,g) bir Riemann manifoldu ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,*

$$L_{\nabla f}g = 2\mathrm{Hess}f$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_{\nabla f}g(X,Y) &= \frac{1}{2}\Big[(L_{\nabla f}g)(X,Y)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[L_{\nabla f}\big(g(X,Y)\big) - g(L_{\nabla f}X,Y) - g(X,L_{\nabla f}Y)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[L_{\nabla f}\langle X,Y\rangle - g([\nabla f,X],Y) - g\big(X,[\nabla f,Y]\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle\nabla_{\nabla f}X,Y\rangle + \langle X,\nabla_{\nabla f}Y\rangle - \langle\nabla_{\nabla f}X,Y\rangle \\
&\quad +\langle\nabla_X\nabla f,Y\rangle - \langle X,\nabla_{\nabla f}Y\rangle + \langle X,\nabla_Y\nabla f\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle\nabla_X\nabla f,Y\rangle + \langle X,\nabla_Y\nabla f\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\text{Hess } f(Y,X) + \text{Hess}f(X,Y)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\text{Hess } f(X,Y)\Big] \\
&= \text{Hess } f(X,Y)
\end{aligned}$$

dir. □

$f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere,

$$AX = \nabla_X\nabla f$$

eşitliği ile belirli $A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{A} : \mathfrak{X}^*(M)\times\mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\
(\theta,X) &\longrightarrow \overline{A}(\theta,X) = \theta(AX)
\end{aligned}$$

eşitliği ile belirli $\overline{A}$ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$lineer olduğundan $\overline{A} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ dir. O halde, A lineer dönüşümü verildiğinde $\overline{A}$ tensör alanı tek olarak belirlidir. Bu nedenle A dönüşümü $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı olarak düşünülür. $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere, Hess$f$ tensör alanı,

$$\text{Hess}f(X,Y) = g(A(X),Y) \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir. (2.2) eşitliğindeki $A(\cdot) = \nabla.\nabla f$ dönüşümü Hess$f$ tensör alanının $(1,1)-$tipinde gösterimidir.

Tanım 2.20 ([35]). $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ ve her $X,Y,V_1,\ldots,V_s \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2_{X,Y}A(V_1,...,V_s)\right) &= (\nabla_X(\nabla A))(Y,V_1,...,V_s) \\ &= (\nabla_X(\nabla_Y A))(V_1,...,V_s) - (\nabla_{\nabla_X Y}A)(V_1,...,V_s)\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlı olan $(0,s+2)-$tipinde $\nabla^2 A$ tensör alanına A *tensör alanının ikinci kovaryant türevi* denir.

f fonksiyonunun Hessiyanı bu tanıma göre,

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y}f &= (\nabla(\nabla f))(X,Y) \\ &= \nabla_X\nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y}f \\ &= \nabla_X g(Y,\nabla f) - g(\nabla_X Y,\nabla f) \\ &= g(\nabla_X\nabla f, Y) \\ &= g(A(X),Y) \\ &= \mathrm{Hess}f(X,Y)\end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.21 ([35]). (M,g) bir Riemann manifoldu olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,X}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X}Z \\ &= [\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

eşitliği ile belirli olan $\mathcal{R} : \mathfrak{X}^3(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ 3-lineer dönüşümüne M manifoldunun Riemann eğrilik tensör alanı denir ve $\mathcal{R}$ ile gösterilir.

$$\overline{\mathcal{R}}(V,X,Y,Z) = g(V,\mathcal{R}(X,Y)Z)$$

eşitliği ile verilen $\overline{\mathcal{R}}$ tensör alanı $\mathcal{R}$ tensör alanına metriksel olarak denktir, yani g metrik tensörü ve metrik tensörün tersi aracılığı ile bir tensör alanından diğerine geçiş mümkündür. Yerel koordinat sistemine göre $\mathcal{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri,

$$\mathcal{R}_{ijkl} = g_{im}\mathcal{R}^{m}_{jkl}$$

ve

$$\mathcal{R}^{i}_{jkl} = g^{im}\mathcal{R}_{mjkl}$$

dir. Burada $\mathcal{R}^{m}_{jkl} = \partial_i\Gamma^{m}_{kl} - \partial_k\Gamma^{m}_{jk} + \Gamma^{s}_{il}\Gamma^{m}_{js} - \Gamma^{s}_{jl}\Gamma^{m}_{ks}$ dir.

Örnek 2.22. $\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ uzayının eğrilik tensörü $\mathcal{R} = 0$ dır.

Tanım 2.23 ([35])**.** (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{R}$ Riemann eğrilik tensör alanı olmak üzere, $\mathcal{R}$ tensörünün izine M manifoldunun Ricci tensörü denir ve Ric ile gösterilir. $\{E_1,...,E_n\}$ kümesi $T_p(M)$ uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere her $v,w \in T_p(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(v,w) &= \mathrm{tr}(x \to \mathcal{R}(x,v)w) \\
&= \sum_i g(\mathcal{R}(E_i,v)w,E_i) \\
&= \sum_i g(\mathcal{R}(v,E_i)E_i,w) \\
&= \sum_i g(\mathcal{R}(E_i,w)v,E_i)
\end{aligned}$$

dir. $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere, Ricci tensörü $(1,1)-$tipinde

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ric}(X),Y)$$

eşitliği ile yazılır ve

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_i R(X,E_i)E_i$$

dir.

Tanım 2.24 ([7])**.** (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü, g metrik tensörü ile orantılı, yani λ bir sabit olmak üzere

$$\mathrm{Ric} = \lambda g \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanıyor ise bu durumda g metriğine Einsteindır denir. Bu durumda M manifolduna Einstein manifoldu denir.

Tanım 2.25 ([35]). Ricci eğrilik tensörünün izine M^n manifoldunun *skalar eğriliği* denir ve R ile gösterilir. R skalar eğriliği

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \operatorname{tr}(\mathrm{Ric}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Ric}(E_i), E_i) \end{aligned}$$

eşitliği ile belirli fonksiyondur.

Tanım 2.26 ([35]). $A \in \mathfrak{T}_s^1(M)$ tensör alanının diverjansı,

$$\operatorname{div} A(V_1, \ldots, V_s) = \operatorname{tr}(X \to (\mathcal{D}_X A)(V_1, \ldots, V_s))$$

eşitliği ile belirli $(0,s)-$tipinde tensör alanıdır.

Bir V bir vektör alanının diverjansı,

$$\operatorname{div} V = \operatorname{tr}(\nabla V) \in \mathfrak{F}(M)$$

dir.

Tanım 2.27 ([40]). $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

eşitliğiyle tanımlı Δf fonksiyonuna f fonksiyonunun *Laplasiyeni* denir. $\Delta f \in \mathfrak{F}(M)$ dir.

Lemma 2.28 ([40]). *Ricci tensör alanı ile skalar eğrilik arasında aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$2\operatorname{div}\mathrm{Ric} = \nabla \mathrm{R} \tag{2.4}$$

İspat: $p \in M$ ve $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ M manifoldunun ortonormal çatı alanı, $\nabla E_i p = 0$ ve X vektör alanı için $\nabla E_i|_p = 0$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\nabla \mathrm{R}(X)(p) &= \nabla(\mathrm{tr}(\mathrm{Ric}))(X)(p) \\
&= \nabla_X \sum g(Ric(E_i), E_i) \\
&= \nabla_X \sum g(\mathcal{R}(E_i, E_j)E_j, E_i) \\
&= \sum g(\nabla_X(\mathcal{R}(E_i, E_j)E_j), E_i) \\
&= \sum g((\nabla_X \mathcal{R})(E_i, E_j)E_j), E_i) \\
&= -\sum g((\nabla_{E_j}\mathcal{R})(X, E_i)E_j, E_i) - \sum g((\nabla_{E_i}\mathcal{R})(E_j, X)E_j, E_i) \\
&= -\sum (\nabla_{E_j}\mathcal{R})(X, E_i, E_j, E_i) - \sum (\nabla_{E_i}\mathcal{R})(E_j, X, E_j, E_i) \\
&= \sum (\nabla_{E_j}\mathcal{R})(E_j, E_i, E_i, X) + \sum (\nabla_{E_i}\mathcal{R})(E_i, E_j, E_j, X) \\
&= 2\sum (\nabla_{E_j}\mathcal{R})(E_j, E_i, E_i, X) \\
&= 2\sum \nabla_{E_j}(\mathcal{R}(E_j, E_i, E_i, X)) \\
&= 2\sum \nabla_{E_j} g(Ric(E_j), X) \\
&= 2\sum \nabla_{E_j} g(Ric(X), E_j) \\
&= 2\sum g(\nabla_{E_j}(Ric(X)), E_j) \\
&= 2\sum g((\nabla_{E_j} Ric)(X), E_j) \\
&= 2\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X)(p)
\end{aligned}
$$

olduğundan (2.4) eşitliği sağlanır. □

Lemma 2.29 ([19]). *A, (M^n, g) manifoldu üzerinde simetrik $(0,2)-$tipinde tensör alanı olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için aşağıdaki önermeler sağlanır:*

(i) $\mathrm{div}(fA) = f\mathrm{div}A + A(\nabla f, \cdot)$,

(ii) $\nabla(fA) = f\nabla A + df \otimes A$,

(iii) $\frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2 = \nabla^2 f(\nabla f, \cdot)$.

Lemma 2.30 ([19]). *(M,g) Riemann manifoldu ve A, M üzerinde simetrik $(0,2)-$tipinde olmak üzere, her $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için*

$$\operatorname{div}(A(fV)) = f(\operatorname{div}A)(V) + f\langle \nabla V, A\rangle + A(\nabla f, V) \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için, A tensör alanının $(1,1)$ gösterimi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A(fV)) &= \operatorname{div}(fA(V)) \\
&= A(V)f + f\operatorname{div}A(V) \\
&= \langle \nabla f, A(V)\rangle + f\operatorname{div}A(V) \\
&= A(\nabla f, V) + f\operatorname{div}A(V)
\end{aligned}$$

olur. $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, M manifoldu üzerinde ortonormal çatı alanı olmak üzere, A tensör alanının simetri özelliği göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}A)(V) &= \sum (\nabla_{E_i}A)(V, E_i) \\
&= \sum \langle (\nabla_{E_i}A)(V), E_i\rangle \\
&= \sum \langle \nabla_{E_i}A(V) - A(\nabla_{E_i}V), E_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(A(V)) - \sum \langle (\nabla_{E_i}V), A(E_i)\rangle
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A(fV)) &= A(\nabla f, V) + f((\operatorname{div}A)(V) + \sum_i \langle (\nabla_{E_i}Z), A(E_i)\rangle) \\
&= A(\nabla f, V) + f((\operatorname{div}A)(V) + f\langle \nabla V, A\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan (2.5) eşitliği gösterilmiş olur. □

Lemma 2.31 ([33](Bochner Formülü)). *(M,g) Riemann manifoldu üzerinde*

$$\operatorname{div}(L_V g)(V) = \frac{1}{2}\Delta|V|^2 - |\nabla V|^2 + Ric(V,V) + D_V \operatorname{div}V$$

eşitliği sağlanır. $V=\nabla f$ *gradiyent vektör alanı ise bu eşitlik* $(1,1)-$*tipinde*

$$\mathrm{div}\nabla^2 f = \mathrm{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f \tag{2.6}$$

olarak yazılır.

İspat: $\{E_1, E_2, \dots E_n\}$ ortonormal çatı alanı için,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(L_V g)(V) &= (\nabla_{E_i} L_V g)(E_i, V) \\
&= \nabla_{E_i}(L_V g(E_i, V)) - L_V g(E_i, \nabla_{E_i} V) \\
&= \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i} V, V) + g(E_i, \nabla_V V)) - g(\nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} V) \\
&\quad - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i V}} V) \\
&= \Delta\frac{1}{2}|V|^2 + \nabla_{E_i} g(E_i, \nabla_V V) - |\nabla V|^2 \\
&\quad - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i V}} V) \\
&= \Delta\frac{1}{2}|V|^2 - |\nabla V|^2 + g(\nabla^2_{E_i, V} V, E_i) \\
&= \Delta\frac{1}{2}|V|^2 - |\nabla V|^2 + \mathrm{Ric}(V, V) + g(\nabla^2_{V, E_i} V, E_i) \\
&= \Delta\frac{1}{2}|V|^2 - |\nabla V|^2 + \mathrm{Ric}(V, V) + \nabla_V \mathrm{div} V
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $V=\nabla f$ için,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(2\mathrm{Hess} f)(V) &= \mathrm{div}(L_{\nabla f} g)(V) \\
&= (\nabla_{E_i} L_{\nabla f} g)(E_i, V) \\
&= \nabla_{E_i}(L_{\nabla f} g(E_i, V)) - L_{\nabla f} g(E_i, \nabla_{E_i} V) \\
&= \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i} \nabla f, V) + g(E_i, \nabla_{\nabla f} V)) \\
&\quad - g(\nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} V) - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} V} \nabla f) \\
&= \nabla_{E_i}(g(\nabla_V \nabla f, E_i) + g(E_i, \nabla_{E_i} \nabla_V \nabla f)) \\
&\quad - g(\nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} V) - g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} V} \nabla f) \\
&= 2g(\nabla^2_{E_i, V} \nabla f, E_i) \\
&= 2\mathrm{Ric}(V, \nabla f) + 2g(\nabla^2_{V, E_i} \nabla f, E_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\mathrm{Ric}(\nabla f, V) + 2\nabla_V \mathrm{div}\nabla f \\
&= 2\mathrm{Ric}(\nabla f, V) + 2\nabla_V \Delta f \\
&= 2g(\mathrm{Ric}(\nabla f), V) + 2g(\nabla \Delta f, V)
\end{aligned}
$$

olduğundan (2.6) eşitliği gösterilmiş olur. □

Bishop ve O'Neill [8] tarafından tanımlanan warped çarpım manifoldları, hem geometri hem de fizikte bulunan uygulama alanları sebebiyle güncellliğini koruyan bir çalışma alanıdır. Bu çalışmada kullanılan warped çarpım ve çoklu warped çarpım manifoldlarına ait bazı özellikler bu bölümde gösterilecektir.

2.1. Warped Çarpım Manifoldları

Tanım 2.32 ([40]). (B, g_B) ve (F, g_F) Riemann manifoldları olmak üzere, $g = \pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$ metrik tensörü ile verilen $B \times F$ manifolduna, B ve F manifoldlarının *Riemann çarpım manifoldu* denir. Burada, $(p,q) \in B \times F$ için,

$$
\begin{aligned}
\pi : B \times F &\to B,\ \pi(p,q) = p \\
\sigma : B \times F &\to F,\ \sigma(p,q) = q
\end{aligned}
$$

düzgün izdüşüm fonksiyonlarıdır.

$p \times F = \pi^{-1}(p) = \{(p,r) | r \in F\}$ ve $B \times q = \sigma^{-1}(q) = \{(s,q) | s \in B\}$ kümeleri, $B \times F$ çarpım manifoldunun alt manifoldlarıdır. $\forall (p,q) \in M \times N$ için, $M \times q$ ve $p \times N$ alt kümeleri, $M \times N$'nin alt manifoldlarıdır. Ayrıca, $T_{p,q}(M \times N)$, kendisinin $T_{p,q}(M)(\equiv T_{(p,q)}(M \times q))$ ve $T_{(p,)q}(N)$ alt uzaylarının direkt toplamıdır.

Tanım 2.33 ([40]). (B, g_B) ve (F, g_F) Riemann manifoldları olmak üzere, $f \in \mathfrak{F}(B), f > 0$ fonksiyonu verilsin. $g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$ metrik tensörü ile verilen $B \times F$ çarpım manifolduna B ve F manifoldlarının *warped çarpım manifoldu* denir ve $B \times_f F$ ile gösterilir. Burada, B manifolduna *taban manifoldu*, F manifolduna ise *fiber* manifoldu denir.

Her (p,q) noktasında $B\times_f F$ manifolduna teğet x vektörü için,

$$g(x,x) = g_B(d\pi(x),d\pi(x)) + f^2(p)g_F(d\sigma(x),d\sigma(x))$$

dir. Burada, $M = B\times_f F$ manifoldunun *fiberleri* $p\times F = \pi^{-1}(p)$, *lifleri* $B\times q = \sigma^{-1}(q)$ eşitlikleriyle belirli alt manifoldlarıdır. Ayrıca, $\pi^{-1}(p)$ ve $\sigma^{-1}(q)$ alt manifoldlarına sırasıyla $M = B\times_f F$ warped çarpım manifoldunun *lifleri* ve *yaprakları* denir. Lif uzayına teğet vektörlere (p,q) noktasındaki *dikey* vektörler, yaprak uzayına teğet vektörlere (p,q) noktasındaki *yatay* vektörler denir.

B manifoldu üzerindeki vektör alanlarının $M = B\times_f F$ manifoldu üzerine liftlerinin kümesi $\mathfrak{L}(B)$ ile gösterilir. Buna göre, $x \in T_{(p,q)}(\pi^{-1}(p))$ vektörünün $M = B\times_f F$ manifoldu üzerine lifti $\tilde{x}$ olmak üzere, $d\pi(\tilde{x}) = x$ dir. Ayrıca, $v \in T_{(p,q)}(\sigma^{-1}(q))$ için $d\pi(v) = 0$ dır. Benzer şekilde, F manifoldu üzerindeki vektör alanlarının $M = B\times_f F$ manifoldu üzerine liftlerinin kümesi $\mathfrak{L}(F)$ ile gösterilir. Buna göre, $v \in T_{(p,q)}(\sigma^{-1}(q))$ vektörünün $M = B\times_f F$ manifoldu üzerine lifti $\tilde{v}$ olmak üzere, $d\sigma(\tilde{v}) = v$ dir. Ayrıca, $x \in T_{(p,q)}(\pi^{-1}(p))$ için $d\sigma(x) = 0$ dır.

Önerme 2.34 ([40]). *$M = B\times_f F$ manifoldu warped çarpım manifoldu üzerinde, $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V,W \in \mathfrak{L}(F)$ için,*

(1) $\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$, *$B$ üzerinde $\nabla_X Y$ vektör alanının liftidir.*

(2) $\nabla_X V = \nabla_V X = (\dfrac{Xf}{f})V$ *dir.*

(3) nor $\nabla_V W = h(V,W) = -(\langle V,W\rangle/f)\ \nabla f$ *dir.*

(4) tan $\nabla_V W \in \mathfrak{L}(F)$, *$F$ üzerinde $\nabla_V W$ vektör alanının liftidir.*

önermeleri sağlanır.

Önerme 2.35 ([40]). *$M = B\times_f F$ warped çarpım manifoldu üzerinde $X,Y,Z \in \mathfrak{L}(B)$ $U,V,W \in \mathfrak{L}(F)$ olsun. Bu durumda M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü $\mathcal{R}$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

(1) $\mathcal{R}_{XY}Z \in \mathfrak{L}(B)$, *B üzerinde* D_XY *vektör alanının liftidir.*

(2) $\mathcal{R}_{VX}Y = (\mathrm{Hess}f(X,Y)/f)V$.

(3) $\mathcal{R}_{XY}V = \mathcal{R}_{VW}X = 0$.

(4) $\mathcal{R}_{XV}W = (\langle V,W\rangle/f)\nabla_X(\nabla f)$.

(5) $\mathcal{R}_{VW}U = {}^F\mathcal{R}_{VW}U - \frac{|\nabla f|^2}{f^2}\{\langle V,U\rangle W - \langle W,U\rangle V\}$.

Sonuç 2.36 ([40]). *$M = B \times_f F$ warped çarpım manifoldu üzerinde $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V,W \in \mathfrak{L}(F)$ ve $k = dim\ F > 1$ olsun. Bu durumda M manifoldunun Ricci tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

(1) $\mathrm{Ric}(X,Y) = {}^B\mathrm{Ric}(X,Y) - \dfrac{k}{f}\mathrm{Hess}f(X,Y)$,

(2) $\mathrm{Ric}(X,V) = 0$,

(3) $\mathrm{Ric}(V,W) = {}^F\mathrm{Ric}(V,W) - \left\{\dfrac{\Delta f}{f} - (k-1)\dfrac{\langle\nabla f,\nabla f\rangle}{f^2}\right\}$.

2.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldları

Warped çarpım manifoldlarının bir genellemesi çoklu warped çarpım manifoldlarıdır. Bu kısımda çoklu warped çarpım manifoldları için temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.37 ([42]). (B,g_B) ve (F_i,g_{F_i}), sırasıyla r ve $s_i\,(i \in \{1,2,\cdots,m\})$ boyutlu Riemann manifoldları ve $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ için $b_i : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar için π ve σ_i, sırasıyla B ve F_i için doğal izdüşüm fonksiyonları olmak üzere,

$$g = \pi^*(g_B) \oplus (b_1 \circ \pi)^2\sigma_1^*(g_{F_1}) \oplus \cdots \oplus (b_m \circ \pi)^2\sigma_m^*(g_{F_m})$$

eşitliği ile tanımlanan $g = g_B \oplus b_1^2 g_{F_1} \oplus \cdots \oplus b_m^2 g_{F_m}$ metrik tensörü ile birlikte $B^r \times F_1^{s_1} \times F_2^{s_2} \times \cdots \times F_m^{s_m}$ çarpım manifolduna *çoklu warped çarpım manifoldu* denir. Burada b_i fonksiyonlarına warping fonksiyonları denir. $m = 1$ olması durumunda warped çarpım manifoldu elde edilir.

Lemma 2.38 ([15]). *$M = B \times_{b_1} F_1 \times_{b_2} F_2 \times_{b_3} \cdots \times_{b_m} F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu olsun. $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V \in \mathfrak{L}(F_i)$ ve $W \in \mathfrak{L}(F_j)$ için aşağıdaki önermeler sağlanır.*

i) $\nabla_X Y$, *B manifoldu üzerindeki* ${}^B\nabla_X Y$ *nin liftidir,*

ii) $\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(b_i)}{b_i} V$,

iii) $\nabla_V W = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } i \neq j, \\ {}^{F_i}\nabla_V W - \left(\frac{g(V,W)}{b_i}\right) \operatorname{grad}_B(b_i) & , \text{ eğer } i = j. \end{cases}$

Önerme 2.39 ([15]). *$M = B \times_{b_1} F_1 \times_{b_2} F_2 \times_{b_3} \cdots \times_{b_m} F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu ve $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler sağlanır.*

(i) $\nabla \tilde{\varphi} = {}^B\nabla \varphi$,

(ii) $\Delta \tilde{\varphi} = \Delta_B \varphi + \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \frac{g_B({}^B\nabla\varphi, {}^B\nabla b_i)}{b_i}$.

Warping fonksiyonlarının eşit olması durumunda, yani $b_i = b$ ise aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.40 ([27]). *Let $M = B \times_b F_1 \times_b F_2 \times_b \cdots \times_b F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu ve $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\Delta \tilde{\varphi} = \Delta_B \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i \right) \frac{{}^B\nabla \varphi(b)}{b}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.41 ([15]). *$M = B \times_{b_1} F_1 \times_{b_2} F_2 \times_{b_3} \cdots \times_{b_m} F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu olsun. $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V \in \mathfrak{L}(F_i)$ ve $W \in \mathfrak{L}(F_j)$ için aşağıdaki önermeler sağlanır.*

(i) $\operatorname{Ric}(X,Y) = {}^B\operatorname{Ric}(X,Y) - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{s_i}{bi} \operatorname{Hess}_B b_i(X,Y)$,

(ii) $\mathrm{Ric}(X,V)=0$,

(iii) $i\neq j$ *için* $\mathrm{Ric}(X,V)=0$,

(iv) $i=j$ *için*

$$\mathrm{Ric}(V,W)= {}^{F_i}\mathrm{Ric}(V,W) - \left[\frac{\Delta_B b_i}{b_i}+(s_i-1)\frac{|\mathrm{grad}_B b_i|^2}{b_i^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} s_k \frac{g_B(\mathrm{grad}_B b_i,\mathrm{grad}_B b_k)}{b_i b_k}\right] g(V,W).$$

3. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE ÖZEL YAPILAR

3.1. Gradiyent Ricci Solitonlar

Ricci solitonlar, Einstien manifoldlarının doğal bir genellemesidir. Ricci solitonlar, Hamilton [24,25] tarafından 1982 yılında tanımlanan Ricci akışının kendine benzer çözümleri olarak tanımlanmıştır. Bu manifoldların Perelman [31, 32] tarafından Poincaré hipotezinin çözümünde kullanılması, konu üzerinde yapılan çalışmaların güncelliğini korumasını sağlamıştır [10, 11, 16, 26, 29, 33, 34].

Tanım 3.1 ([13])**.** (M,g) bir Riemann manifoldu olsun ve $L_V g$, Ric tensörleri sırasıyla g metrik tensör alanının V vektör alanına göre Lie türevini ve Ricci tensörünü belirtsin. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $V \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\frac{1}{2}L_v g + Ric = \lambda g \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanıyor ise (M,g) Riemann manifolduna *Ricci soliton* denir ve (M,g,V,λ) dörtlüsü ile gösterilir.
Burada V vektör alanına, Ricci solitonun *potansiyel vektör alanı* denir.
$\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ değerleri için sırasıyla (M,g,V,λ) Ricci solitonuna *shrinking, steady* ve *expanding* Ricci soliton denir.

Tanım 3.2 ([13])**.** V potansiyel alanı, sıfır veya Killing vektör alanı ise (M,g,V,λ) dörtlüsüne *aşikar Ricci soliton* denir.

Tanım 3.3 ([13])**.** V potansiyel alanı bir $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonunun gradiyenti ise (M,g,V,λ) dörtlüsüne *gradiyent Ricci soliton* denir ve $(M^n,g,\nabla f,\lambda)$ ile gösterilir. Bu durumda (3.1) eşitliği

$$Ric + \mathrm{Hess} f = \lambda g \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 3.4. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı üzerinde g standart metriği ile birlikte $(\mathbb{R}^n, g)$ uzayı göz önüne alınsın. $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = a\frac{|x|^2}{2} + g(x, v) + b$ potansiyel foksiyonu olmak üzere $(\mathbb{R}^n, g)$ manifoldu bir gradiyent Ricci solitondur. Burada a sabitinin işaretine göre soliton shrinking, steady veya expanding dir.

3.2. Gradiyent Almost Ricci Solitonlar

Almost Ricci solitonlar Pigola, Rigoli, Rimoldi ve Setti [36] tarafından tanımlanmıştır. Yapılan bu çalışmada, (3.1) denklemindeki λ sabitini bir fonksiyon olarak alarak almost Ricci solitonların varlığını ve yapısı ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Tanım 3.5 ([36]). (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve diferensiyellenebilir bir $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\frac{1}{2}L_v g + Ric = \lambda g \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanıyor ise (M, g) Riemann manifolduna almost Ricci soliton denir.

Tanım 3.6 ([36]). (M, g, V, λ) almost Ricci solitonun V potansiyel vektör alanı bir f fonksiyonunun gradiyent vektör alanı ise $(M, g, \nabla f, \lambda)$ dörtlüsüne *gradiyent almost Ricci soliton* denir. Bu durumda (3.3) eşitliği

$$Ric + \mathrm{Hess} f = \lambda g \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir.

Almost Ricci solitonların karakterizasyonları ve rigiditisi ile ilgili bir çok çalışma bulunmaktadır [4–6, 19, 36, 37]. Bir gradiyent almost Ricci soliton için,

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda \nabla f \tag{3.5}$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir [5]. (3.4) eşitliğinde her iki tarafın izi alınır ve (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$-2\lambda \nabla f + \nabla((2-n)\lambda + |\nabla f|^2 - \Delta f) = 0 \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir.

3.3. (m-)quasi-Einstein Manifoldları

Ricci tensörünün doğal bir genellemesi

$$\mathrm{Ric}_f^m = \mathrm{Ric} + Hess\ f - \frac{1}{m}\nabla f \otimes \nabla f, \qquad 0 < m \leq \infty$$

eşitliği ile verilen Ric_f^m Bakry-Emery Ricci tensörüdür.

Tanım 3.7 ([14]). (M, g) bir Riemann manifoldu, $f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathrm{Ric}_f^m = \mathrm{Ric} + Hess\ f - \frac{1}{m}\nabla f \otimes \nabla f = \lambda g \tag{3.7}$$

eşitliğini sağlayan g metriğine *(m-)quasi-Einstein* metriği denir.

Not 3.8. *$m = \infty$ olduğunda* (3.7) *denklemi gradiyent Ricci soliton denklemine indirgenir. f fonksiyonu sabit olduğunda ise* (3.7) *denklemi* (2.3) *Einstein denklemi olur.*

m-quasi-Einstein manifoldları üzerine özellikle manifoldun çapı, kompaktlığı, skalar eğriliği ve warped çarpım manifoldları ile ilgisi konularında günümüze kadar çalışmalar yapılmıştır [4, 12, 14, 28, 39, 41, 44]. Kim ve Kim [28], aşağıdaki teoremde bazı varsayımlar altında warping fonksiyonu sabit olmayan bir warped çarpım Einstein uzayının bulunmadığını göstermişlerdir.

Teorem 3.9 ([28]). *$M = B \times_f F$ bir Einstein warped çarpım manifoldu ve B taban manifoldu kompakt olsun. M manifoldunun skalar eğriliği pozitif değil ise warped çarpım manifoldu bir Riemann çarpım manifoldudur.*

Bu teorem sayesinde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.10 ([28]). *$M = B^n \times_f F^m$ warped çarpım manifoldunun* $\mathrm{Ric} = \lambda g$ *eşitliği ile birlikte Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter koşul* *(i)* ${}^{B}\mathrm{Ric} = \lambda g_B + \frac{m}{f}\nabla^2 f,$

(ii) (F, g_F) *fiber manifoldu* ${}^{F}\mathrm{Ric} = \mu g_F$ *eşitliği ile birlikte Einstein manifoldudur,*

(ii) $-f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 = \mu$

önermelerinin sağlanmasıdır.

Catino [12], *m*-quasi-Einstein manifoldları ile ilgili aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 3.11 ([12])**.** $n \geq 3$ için, (M^n, g) bir complete Riemann manifoldu üzerinde

$$\mathrm{Ric} + Hess\ f - \mu \nabla f \otimes \nabla f = \lambda g \tag{3.8}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $f, \mu, \lambda \in \mathfrak{F}(M)$ varsa M manifolduna *genelleştirilmiş quasi-Einstein manifoldu* denir.

3.4. Gradiyent Ricci-Harmonik Solitonlar

Perelman tarafından Poincaré hipotezini kanıtlamak için yapılan çalışmalarda iki farklı akışı bir arada kullanılmış yani ikili sisteme sahip bir akış tanımlanmıştır. Bu fikirden yola çıkarak, Müller tarafından doktora tezinde Ricci akışı ve harmonik dönüşüm ısı akışı bir araya getirilerek Ricci-Harmonik akış tanımlanmıştır. Bu kısımda Ricci-Harmonik akıştan elde edilen Ricci-Harmonik solitonlar incelenecektir.

Tanım 3.12 ([30])**.** $(M^m, g(t))$ ve (N^n, h) sınırı olmayan düzgün, kompakt Riemann manifoldları ve $N^n \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ olsun. $g(t)$, M manifoldu üzerinde bir metrik ailesi ve $\phi(t)$, M den N ye bir düzgün dönüşüm ailesi olsun. Ricci akışı ve harmonik dönüşüm ısı akışı ikili sistem (kısaca $(RH)_\alpha$ akış) olmak üzere, $(g(t), \phi(t))_{t\in[0,T)}$ ikilisi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g = -2\mathrm{Ric} + 2\alpha \nabla\phi \otimes \nabla\phi \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi = \tau_g \phi \end{cases} \tag{$(RH)_\alpha$}$$

eşitliklerini sağlıyorsa bu ikiliye $(RH)_\alpha$ sisteminin bir çözümü denir. Burada Ric, M manifoldunun Ricci eğriliği; $\tau_g\phi$, g metriğine bağlı ϕ dönüşümünün tensiyon alanı ve α zamana bağlı bir sistem sabitidir $(\alpha(t) \geq 0)$.

Tanım 3.13 ([30])**.** $(g(t),\phi(t))_{t\in[0,T)}$, $(RH)_\alpha$ akışın bir çözümü, bir parametreli difeomorfizm ailesi $\psi_t : M \longrightarrow M$, $\psi_0 = \mathrm{id}_M$ ve bir ölçeklendirme fonksiyonu $c : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ için,

$$\begin{cases} g(t) = c(t)\psi_t^* g(0), \\ \phi(t) = \psi_t^* \phi(0) \end{cases}$$

eşitliğini sağlıyorsa $(g(t),\phi(t))_{t\in[0,T)}$ çözümüne soliton denir. Eğer ψ_t difeomorfizmlerini üreten X vektör alanı M üzerinde bir fonksiyonun gradiyenti ise bu durumda solitona gradiyent soliton ve f fonksiyonuna potansiyel fonksiyonu denir.

Bu tanımdan yola çıkarak,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(t)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[c(t)\varphi_t^* g(0)\right]|_{t=0} \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} c(t)\right)\varphi_t^* g(0)\right]|_{t=0} \\
&\quad + c(t)|_{t=0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_t^* g(0)\right]|_{t=0} \\
&= \dot{c}(0)g(0) + c(0)L_{X(0)}g(0) \\
&= \dot{c}(0)g(0) + 2\mathrm{Hess}(f(\cdot,0)) \\
-2\mathrm{Ric}_{g(0)} + 2c(d\phi\otimes d\phi)(0) &= \dot{c}(0)g(0) + 2\mathrm{Hess}(f(\cdot,0)) \\
\mathrm{Ric}_{g_0} - c(d\phi\otimes d\phi)(0) &= -\frac{\dot{c}(0)}{2}g_0 - \mathrm{Hess}(f(\cdot,0)) \\
\mathrm{Ric}_{g_0} + \mathrm{Hess}(f(\cdot,0)) - c(d\phi\otimes d\phi)(0) &= -\frac{1}{2}\dot{c}(0)g_0
\end{aligned}$$

ve

$$(\tau_g\phi)(0) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t)|_{t=0} = L_{X(0)}\phi(0) = \langle \nabla\phi, \nabla f\rangle$$

olduğundan Ricci-Harmonik soliton denkleminin sağlandığı görülür.

Lemma 3.14 ([30])**.** *$(g(t),\phi(t))_{t\in[0,T)}$ potansiyel fonksiyonu f olan bir gradiyent soliton olsun. Bu durumda, λ bir sabit olmak üzere her $t_0 \in [0,T)$ için soliton,*

$$\begin{cases} \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f - c\, d\phi\otimes d\phi = \lambda g \\ \tau(\phi) - d\phi(\nabla f) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

ikili eliptik sistemi sağlar. Karşıt olarak, M manifoldu üzerinde 3.9 sisteminin bir çözümü olan f fonksiyonu verildiğinde, $(g(t), \phi(t))$ *ikilisi* $(RH)_\alpha$ *akışının bir çözümü olacak şekilde bir parametreli sabit ailesi* $c(t)$ *ve* $\psi_t : M \longrightarrow M$ *difeomorfizmleri vardır.*

Lemma 3.14 kullanılarak gradiyent Ricci-Harmonik soliton tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.15 ([30]). (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve $\phi : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenibilir bir fonksiyon, $c \geq 0$ ve λ bir sabit olmak üzere,

$$\begin{cases} \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f - c\, d\phi \otimes d\phi = \lambda g \\ \tau(\phi) - d\phi(\nabla f) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanıyor ise $((M, g), (N, h), \phi, f, \lambda)$ beşlisine *gradiyent Ricci harmonik soliton* denir. $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ olması durumunda bu solitona sırasıyla *shrinking*, *steady* ve *expanding* denir.

Tanım 3.16 ([30]). f potansiyel fonksiyonu sabit olursa, yani

$$\begin{cases} \mathrm{Ric} - c\, d\phi \otimes d\phi = \lambda g \\ \tau(\phi) = 0 \end{cases}$$

ikili sistemi sağlanıyorsa, g metriğine *harmonik Einstein* denir.

Örnek 3.17. ϕ dönüşümü sabit olsun. Bu durumda Ricci harmonik soliton denklemi gradiyent Ricci soliton denklemine dönüşür.

Örnek 3.18 ([23]). (M, g) bir Einstein manifoldu (Ric $= \alpha g$) ve $I : M \longrightarrow M$ özdeşlik(birim) dönüşümü olsun. Özdeşlik dönüşümü harmonik olduğundan,$((M, g), (M, g), I, f, \lambda)$ beşlisi $\lambda = c - \alpha$ için harmonik Einstein manifoldudur.

Tanım 3.19 ([2]). M, N Riemann manifoldları ve $\phi : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. ϕ dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\phi)$, N manifoldu üzerinde ϕ

dönüşümü boyunca bir vektör alanıdır ve

$$\tau(\phi) = \mathrm{tr}(\nabla \mathrm{d}\phi)$$

eşitliğiyle belirlidir. Yani,

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathrm{d}\phi)(\partial_j, \partial_j) &= \nabla^{\phi}_{\partial_i} \phi_*(\partial_j) - \phi_*(\nabla_{\partial_i} \partial_j) \\
&= \nabla^{\phi}_{\partial_i} \left[\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right] - \phi_* \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \partial_k \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j}(\partial_i) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \left(\nabla^{\phi}_{\partial_i} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right) \right] - \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \phi_*(\partial_k) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \left(\nabla_{\phi_*(\partial_i)} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right) \right] - \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \left(\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \left(\nabla_{\left(\sum_{\beta=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_{\beta}} \right)} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right) \right] - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \sum_{\beta=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_{\beta}}} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \right] - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \sum_{\beta=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \left(\sum_{\gamma=1}^{d} \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}} \right) - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{\beta=1}^{d} \sum_{\gamma=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}} - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}} - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{d} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.20 ([9]). $\phi : M \longrightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $E(\phi) = \int_M |\nabla\phi|^2 dV_g$ enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına *harmonik dönüşüm* denir. Bir ϕ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\tau(\phi) = 0$ olmasıdır.

Wang [43], Ricci-Harmonik solitonlar ile Bakry-Emery eğrilik tensörünü bir arada kullanarak aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 3.21 ([43])**.** (N,h) bir Riemannian manifoldu olsun. Bir $\phi : M \longrightarrow N$ dönüşüm, bir $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ potansiyel fonksiyon ve $\alpha \geq 0$, λ sabitler olmak üzere, M manifoldunun bir g metriği

$$\begin{cases} \mathrm{Ric} + \nabla^2 u - \dfrac{1}{\tau} du \otimes du - \alpha d\phi \otimes d\phi = \lambda g, & (3.10) \\ \tau(\phi) - d\phi(\nabla u) = 0. & (3.11) \end{cases}$$

ikili sistemini sağlıyorsa g metriğine τ-quasi Ricci-Harmonik metrik denir.

4. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE GRADİYENT RICCI SOLİTONLAR

Ricci solitonların warped çarpım manifoldu olması durumu son yıllarda çalışılan güncel bir konudur [1, 13, 17, 20, 27, 38]. Bu bölümde ilk olarak konu ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları verilecek ve warped çarpım manifoldunun Ricci soliton olması durumu ile ilgili elde edilen yeni sonuçlar ispatlanacaktır [20].

4.1. Warped Çarpım Manifoldu Üzerinde Gradiyent Ricci Solitonlar

Feitosa, Filho ve Gomes [17] tarafından 2017 yılında yayınlanan "On the construction of gradient Ricci soliton warped product" makalesinde $M = B \times_f F$ warped çarpım manifoldunun gradiyent Ricci soliton olması durumu incelenmiştir. Burada $M = B \times_f F$ gradiyent Ricci solitonunun potansiyel fonksiyonu $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun lifti olarak alınmıştır.

4.1.1. Warped Çarpım Rici Solitonların İnşası

Önerme 4.1 ([17])**.** *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda bir c sabiti için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c.$$

Önerme 4.2 ([17])**.** *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

$${}^{B}\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}_B\varphi = \lambda g_B + \frac{m}{f}\mathrm{Hess}_B f$$

ve $\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f)$ olmak üzere ${}^{F}\mathrm{Ric} = \mu g_F$ eşitlikleri sağlanır.

Önerme 4.3 ([17])**.** *(B^n, g) bir Riemann manifoldu ve $f > 0, \varphi$ fonksiyonları B üzerinde diferansiyellenebilir olmak üzere, $m \neq 0, c, \lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\varphi = \lambda g + \frac{m}{f}\mathrm{Hess}f \tag{4.1}$$

ve

$$2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c \tag{4.2}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, bir $\mu \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) \tag{4.3}$$

eşitliği f ve φ fonksiyonları arasında sağlanır.

Teorem 4.4 ([17])**.** *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ bir expanding veya steady gradiyent Ricci soliton olsun. Warping fonksiyonu f maksimum ve minimum değerlerine sahip ise M bir Riemann çarpım manifoldudur.*

Teorem 4.5 ([17])**.** *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir shrinking gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda M kompaktır.*

Teorem 4.6 ([17])**.** *(B^n, g_B) bir complete Riemann manifoldu ve $f > 0, \varphi$ bu manifold üzerinde* (4.1) *ve* (4.2) *eşitliklerini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $(F^m, g_F)(m > 1)$ complete Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü* (4.3) *eşitliğini sağlayan bir μ sabiti için ${}^F Ric = \mu g_F$ olsun. Bu durumda, $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton warped çarpım manifoldudur.*

4.1.2. Elde Edilen Yeni Sonuçlar

Warped çarpım manifoldunun gradiyent Ricci soliton olması durumu ile ilgili elde edilen yeni sonuçlar, gradiyent Ricci solitonun potansiyel vektör alanının konformal olması durumu ve potansiyel fonksiyonun fiber manifoldu üzerinde tanımlı olması ile ilgilidir.

4.1.2.1. Potansiyel Vektör Alanının Konformal Olması Durumu

Lemma 4.7 ([20]). *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. $\nabla\varphi$ vektör alanı B üzerinde konformal ise taban manifoldu B genelleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldudur.*

İspat: $\nabla\varphi$ vektör alanı B manifoldu üzerinde konformal vektör alanı olsun, yani $\alpha : B \longrightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyonu için $\nabla^2\varphi = \alpha g_B$ eşitliği sağlansın. $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ için $\nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = \nabla^2\varphi(X,Y)$ eşitliği ve Sonuç 2.36 kullanılarak,

$$\begin{aligned} {}^B\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(X,Y) &= \mathrm{Ric}(X,Y) \\ &= \lambda g(X,Y) - \nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) \\ &= \lambda g_B(X,Y) - \nabla^2\varphi(X,Y) \\ &= \lambda g_B(X,Y) - \alpha g_B(X,Y) \\ &= (\lambda - \alpha) g_B(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

$f = e^{-\frac{u}{m}}$ ve $\gamma = \lambda - \alpha,\ \gamma : B^n \longrightarrow \mathbb{R}$ olarak seçilirse, $\nabla^2 u - \frac{1}{m} du \otimes du = -\frac{m}{f}\nabla^2 f$ olur ve

$$ {}^B\mathrm{Ric} + \nabla^2 u - \frac{1}{m} du \otimes du = \gamma g_B, \tag{4.4}$$

bulunur. Bu durumda taban manifoldu $\mu = \dfrac{1}{m}$ olacak biçimde (3.8) eşitliğini sağlar, $(B^n, g_B, \nabla u, \gamma)$ bir genelleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldudur. □

Sonuç 4.8 ([20]). *∇f vektör alanının konformal olması için gerek ve yeter koşul $n \geq 3$ için, B^n Einstein manifoldu olmasıdır.*

Potansiyel vektör alanı konformal olması durumunda aşağıdaki teoremin doğru olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.9 ([4]). *$n \geq 3$ için, $(B^n, g_B, \nabla\varphi, \gamma)$ aşikar olmayan bir generalleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldu olsun. (B^n, g_B) bir Einstein manifoldu veya $\nabla\left(e^{-\frac{\varphi}{m}}\right)$ bir konformal vektör alanı ise aşağıdaki önermelerden biri doğrudur.*

1. *B^n manifoldu $\mathbb{S}^n$ standart küresine izomorftur.*
2. *B^n manifoldu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına izomorftur.*
3. *B^n manifoldu $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayına izomorftur.*

Teorem 4.9 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.10 ([20]). *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. $\nabla\varphi$ vektör alanı B üzerinde konformal ise M manifoldu $\mathbb{S}^n \times_f F^m$, $\mathbb{R}^n \times_f F^m$ veya $\mathbb{H}^n \times_f F^m$ manifolduna izomorftur.*

İspat: $M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Lemma 4.7 kullanılırsa B^n taban manifoldunun bir generalleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldu olduğu görülür. $\nabla\varphi$ bir konformal vektor alanı olduğunda Sonuç 4.10 elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde potansiyel vektör alanın konformal olması durumunda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.11 ([20]). *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, taban manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. $\nabla\varphi, \nabla f$ vektör alanları, $\nabla^2\varphi = \alpha g_B$ ve $\nabla^2 f = \beta g_B$ olacak şekilde B üzerinde konformal ise $\{\nabla\alpha, \nabla\beta, \nabla f\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Özel olarak, $\nabla\beta = \frac{f}{m}\nabla\alpha$ ise f fonksiyonu sabittir, yani M bir Einstein manifoldudur.*

İspat: $\nabla\varphi$ vektör alanı B manifoldu üzerinde bir konformal vektör alanı olsun. Lemma 4.7 kullanılarak B manifoldunun (4.4) eşitliğini sağlayan bir genelleştirilmiş m-quasi-Einstein manifoldu olduğu görülür. ∇f bir konformal vektör alanı olduğunda,

$$^{B}\mathrm{Ric} = (\lambda - \alpha + \frac{m}{f}\beta)g_B \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır. $n \geq 3$ için, $\lambda - \alpha + \frac{m}{f}\beta$ sabittir. Buradan, $R = n(\lambda - \alpha + \frac{m}{f}\beta)$ skalar eğriliği sabit olur. (4.5) eşitliğinin diverjansı alınır ve (2.4) özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}\left(^{B}\mathrm{Ric}\right) - \frac{\nabla(^{B}R)}{2} \\ &= -\nabla\alpha - \frac{m\beta}{f^2}\nabla f + \frac{m}{f}\nabla\beta \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\nabla\alpha - \frac{m}{f}\nabla\beta + \frac{m\beta}{f^2}\nabla f = 0$ dir. Bu durumda $\{\nabla\alpha, \nabla\beta, \nabla f\}$ kümesi linner bağımlıdır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında, $\nabla f = \frac{f}{\beta}\left(\nabla\beta - \frac{f}{m}\nabla\alpha\right)$ olarak yazılabilir. $\nabla\beta = \frac{f}{m}\nabla\alpha$ vektör alanı için, f warping fonksiyonu sabit olur.

Diğer taraftan, $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ için,

$$\lambda g(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = {}^{F}\mathrm{Ric}(V,W) - \left(f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\right) g_F(V,W)$$

dir. $\nabla^2\varphi(V,W) = f\left(\nabla\tilde{\varphi}(f)\right) g_F(V,W)$ olduğundan,

$$^{F}\mathrm{Ric} = \left(\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f)\right) g_F$$

dir. f fonksiyonu sabit olduğundan, $^{F}\mathrm{Ric} = \lambda f^2 g_F$ dir. B manifoldu Einstein olduğundan, M bir Einstein manifoldu olur. □

4.1.2.2. Potansiyel Fonksiyonun Fiber Manifoldundan Lift Edilmesi Durumu

Lemma 4.12 ([20]). *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, fiber manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 1)$ aşikar olmayan bir gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda taban manifoldu (B^n, g_B, f, λ) bir m-quasi-Einstein manifoldudur ve fiber manifoldu $\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2$*

eşitliği ile belirli bir sabit olmak üzere

$$^{F}\mathrm{Ric} + f^2 \overset{F}{\nabla}{}^2 \varphi = \mu g_F$$

eşitliğini sağlar.

İspat: $M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu, $\tilde{\varphi}$ taban manifoldu üzerinde tanımlı bir düzgün $\varphi : F^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun M manifolduna lifti ve $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun.

Sonuç 2.36 kullanılarak, her $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ için,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(X,Y)$$

yazılabilir. (3.2) eşitliğinden

$$\lambda g(X,Y) - \nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(X,Y) \tag{4.6}$$

dir. $\nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = g(\nabla_X\nabla\tilde{\varphi}, Y) = 0$ olduğundan (4.6) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(X,Y) = \lambda g_B(X,Y) \tag{4.7}$$

elde edilir. Yani B taban manifoldu bir m-quasi-Einstein manifoldudur.

(4.7) eşitliğinde her iki tarafının izi alınırsa,

$$^{B}R = n\lambda + \frac{m}{f}\Delta f \tag{4.8}$$

olur. (4.8) eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa $\nabla(^{B}R) = -\frac{m}{f^2}\nabla f \Delta f + \frac{m}{f}\nabla\Delta f$ eşitliği bulunur.

Ayrıca, (4.7) eşitliğinin diverjansı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(^{B}\mathrm{Ric}) &= m\mathrm{div}\left(\frac{1}{f}\nabla^2 f\right) \\
&= -\frac{m}{f^2}\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) + \frac{m}{f}\mathrm{div}\nabla^2 f \\
&= -\frac{m}{2f^2}\nabla|\nabla f|^2 + \frac{m}{f}\mathrm{Ric}(\nabla \mathrm{f}) + \frac{m}{f}\nabla\Delta f
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.4) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}\left({}^{B}\mathrm{Ric}\right) - \frac{\nabla({}^{B}R)}{2} \\ &= -\frac{m}{2f^2}\nabla|\nabla f|^2 + \frac{m}{f}\mathrm{Ric}(\nabla \mathrm{f}) + \frac{m}{f}\nabla\Delta f + \frac{m}{2f^2}\nabla f\Delta f - \frac{m}{2f}\nabla\Delta f \end{aligned}$$

bulunur.

(4.7) eşitliğinde Ricci tensör alanı $(1,1)-$tipinde $\mathrm{Ric}(\nabla f)$ olarak yazılırsa,

$$-\frac{m}{2f^2}\nabla|\nabla f|^2 + \frac{m}{f}\left(\lambda\nabla f + \frac{m}{2f}\nabla|\nabla f|^2\right) + \frac{m}{f}\nabla\Delta f + \frac{m}{2f^2}\nabla f\Delta f - \frac{m}{2f}\nabla\Delta f = 0$$

olur ve eşitliğin her iki tarafı $\frac{2f^2}{m}$ ile çarpılırsa

$$\lambda f\nabla f + \Delta f\nabla f + f\nabla\Delta f + (m-1)\nabla|\nabla f|^2 = 0$$

bulunur. O halde, $\nabla\left(\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\right) = 0$ dir. Sonuç olarak $\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabittir.

Diğer taraftan, her $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ için,

$$\mathrm{Ric}(V,W) = {}^{F}\mathrm{Ric}(V,W) - \left(f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\right) g_F(V,W)$$

olur. (3.2) eşitliğinden,

$$\lambda f^2 g_F(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = {}^{F}\mathrm{Ric}(V,W) - \left(f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\right) g_F(V,W)$$

yazılabilir. $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(F)$ olduğundan,

$$\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = g(\nabla_V\nabla\tilde{\varphi}, W) = g(\overset{F}{\nabla}_V\nabla\varphi, W) = \overset{F}{\nabla}{}^2\varphi(V,W)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$ {}^{F}\mathrm{Ric}(V,W) + \overset{F}{\nabla}{}^2\varphi(V,W) = \left(\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\right) g_F(V,W) \qquad (4.9)$$

dir. $\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2$ fonksiyonu sabit olduğundan, (4.9) eşitliği

$$ {}^{F}\mathrm{Ric} + \overset{F}{\nabla}{}^2\varphi = \mu g_F \qquad (4.10)$$

olarak yazılabilir. Yani, F^m fiber manifoldu bir gradiyent Ricci solitondur. □

Teorem 4.13 ([20]). *$\tilde{\varphi}$ fonksiyonu, kompakt fiber manifoldu üzerinde tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti ve $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)(m > 2)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. $\nabla\varphi$ vektör alanı F üzerinde konformal ise M manifoldu $B^n \times_f \mathbb{S}^m$ manifolduna izomorftur. Sonuç olarak M bir Einstein manifoldudur.*

İspat: $M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Lemma 4.12 kullanılarak F^m fiber manifoldunun potansiyel fonksiyonu φ olan bir gradiyent Ricci soliton olduğu açıktır. Aşikar olmayan bir $\nabla\varphi$ konformal vektör alanı için, [5] makalesindeki Teorem 2 nin ispatına benzer bir yol izlenebilir.

$\nabla\varphi$ vektör alanı, fiber manifoldu üzerinde bir konformal vektör alanı olsun. Bu durumda $\nabla^2\varphi = \alpha g_F$ eşitliği sağlanacak şekilde bir $\alpha \in \mathfrak{F}(F)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda, (4.10) eşitliği ${}^F\mathrm{Ric} = (\mu - \alpha)g_F$ olarak yazılabilir. $m \geq 3$ için, $\mu - \alpha$ sabittir, o halde fiber manifoldunun skaler eğriliği ${}^F R = n(\mu - \alpha)$ sabit olur. Sonuç olarak

$$L_{\nabla\varphi}{}^F\mathrm{Ric} = 2(\mu - \alpha)\alpha g_F$$

elde edilir. Şimdi [45] - Teorem 4.2 (s.54) uygulanırsa F^m fiber manifoldunun $\mathbb{S}^m$ Öklid küresine izometrik olduğu söylenebilir. B taban manifoldu bir m-quasi-Einstein manifoldu olduğundan, Sonuç 3.10 kullanılarak M manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu açıktır. □

Teorem 4.14 ([20]). *$M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve $\tilde{\varphi}$, fiber manifoldu üzerinde tanımlı bir $\varphi : F^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun M manifolduna lifti ve sabit olmayan bir fonksiyon olsun. $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton ise M manifoldu bir Riemann çarpım manifoldudur, yani f fonksiyonu sabittir.*

İspat: M bir gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda her $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ için (3.2) eşitliği sağlanır. Özel olarak $\nabla f \in \mathfrak{L}(B)$ ve $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(F)$ vektör alanları seçildiğinde,

$$\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi}) + \nabla^2\tilde{\varphi}(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi}) = \lambda g(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi})$$

yazılabilir. Sonuc 2.36 den $Ric(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi}) = 0$ dır ve $g(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi}) = 0$ olduğu açıktır. O halde,

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^2\tilde{\varphi}(\nabla f, \nabla\tilde{\varphi}) &= g(\nabla_{\nabla f}\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) \\ &= g\left(\frac{\nabla f(f)}{f}\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}\right) \\ &= \frac{|\nabla f|^2}{f}|\nabla\tilde{\varphi}|^2 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda warping fonksiyonu f sabittir, yani M manifoldu bir Riemann çarpım manifoldudur. □

4.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldu Üzerinde Ricci Solitonlar

Bu kısımda çoklu warped çarpım manifoldunun Ricci soliton olması durumu ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları [1, 27] verilecektir.

Önerme 4.15 ([27]). *(B^r, g_B) bir Riemann manifoldu ve $b > 0, \varphi \in \mathfrak{F}(B)$ olsun. $c, \lambda, s_i(\neq 0) \in \mathbb{R}$ için*

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\varphi = \lambda g_B + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\frac{\mathrm{Hess}b}{b} \tag{4.11}$$

ve

$$2\lambda - ||grad_B\varphi||^2 + \Delta_B\varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\frac{grad_B\varphi(b)}{b} = c \tag{4.12}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, b ve φ fonksiyonları arasında bir $\mu \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere

$$\lambda b^2 - b\ grad_B\varphi(b) + b\Delta_B b + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)||grad_B\varphi||^2 = \mu \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.16 ([27]). *$M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b F_2^{s_2} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}$ çoklu warped çarpım manifoldu ve $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ olmak üzere $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. $\sum_{i=1}^{m} s_i > 1$ için, $\lambda \geq 0$ ve warping fonksiyonu minimum ve maksimum değerlerini alıyor ise M manifoldu bir Riemann çarpımıdır.*

Teorem 4.17 ([27]). *$M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b F_2^{s_2} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}$ çoklu warped çarpım manifoldu ve $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ olmak üzere $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Taban ve fiber manifoldları kompakt olmak üzere, $\lambda < 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} s_i > 1$ ise M manifoldu kompakttır.*

Teorem 4.18 ([27]). *(B^r, g_B) bir complete Riemann manifoldu, $b > 0, \varphi \in \mathfrak{F}(B)$ olsun ve (4.11) ve (4.12) eşitlikleri sağlansın. $\sum_{i=1}^{m} s_i > 1$ iken $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ complete Riemann manifodları için (4.13) sağlanacak şekilde ${}^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}$ ise $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ olmak üzere $(M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b F_2^{s_2} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}, g, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci solitondur.*

Teorem 4.19 ([1]). *$\left(M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b F_2^{s_2} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}, g = g_B + b^2 \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}\right)$ çoklu warped çarpım manifoldu; $X \in \mathfrak{L}(B)$, $V_i \in \mathfrak{L}(F_i)$ ve $\bar{X} = X + V_i$ olmak üzere $(M, g, \bar{X}, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Taban manifoldu $\left(B, g_B, X - \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) \nabla(\ln b), \lambda\right)$ bir Ricci solitondur ve b warping fonksiyonu sabit ise her bir fiber manifoldu $\left(F_i, g_{F_i}, b^2 V_i, \lambda b^2\right)$ olacak biçimde Ricci solitondur.*

Teorem 4.20 ([1]). *(B, g_B, X, λ) bir Ricci soliton ve $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ manifoldları ${}^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu_i g_{F_i}$ olacak biçimde Einstein manifoldları olsun. Bu durumda,*

(i) $1 \leq i \leq m$ için V_i vektör alanı $2\rho_i$ faktörü ile konformal vektör alanı,

(ii) $\mathrm{Hess}_B^b = 0$,

(iii) $1 \leq i \leq m$ için $(\lambda - \rho_i) b^2 = bX(b) + \mu_i - \left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right) |\nabla b|^2$

koşulları sağlanıyor ise $\left(M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}, g = g_B + b^2 \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}, \bar{X}, \lambda\right)$ manifoldu bir Ricci solitondur.

Teorem 4.21 ([1]). *$(M = B \times_b F_1 \times_b F_2 \times_b \cdots \times_b F_m, g, \phi, \lambda)$ bir gradiyent Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

(i) $u = \phi_1 - \sum s_i \ln b$ olmak üzere (B, g_B, u, λ) bir gradiyent Ricci solitondur ve $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ üzerinde bir sabit noktada $\phi_1 = \phi$ dir.

(ii) b fonksiyonu sabit ise B manifoldu üzerinde bir sabit nokta için $u_i = \phi$ olacak biçimde $(F_i, g_{F_i}, u_i, \lambda b^2)$ bir gradiyent Ricci solitondur.

5. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE GRADİYENT ALMOST RICCI SOLİTONLAR

Ricci solitonların bir genellemesi olan almost Ricci solitonların warped çarpım manifoldu olması durumu Feitosa, Filho, Gomes ve Pina [18] tarafından "Gradient almost Ricci soliton warped product" isimli makalede incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında bu makalede elde edilen bazı sonuçlar verilecek ve tez çalışması ile ilgili olarak elde edilen yeni sonuçlar [21] ikinci kısımda ispatlanacaktır.

5.1. Warped Çarpım Gradiyent Almost Ricci Solitonlar

Önerme 5.1 ([18])**.** *(B^n, g) bir Riemann manifoldu ve $f > 0, \lambda, \varphi \in \mathfrak{F}(B)$ olsun. $m(\neq 0) \in \mathbb{R}$ sabiti için,*

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f \tag{5.1}$$

ve

$$-2\lambda\nabla\varphi + \nabla\left((2-m-n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi - \frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\right) = 0 \tag{5.2}$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, λ, f, φ fonksiyonları arasında $\mu \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere,

$$\lambda f^2 + f\nabla f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) = \mu \tag{5.3}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.2 ([18])**.** *(B^n, g_B) bir complete Riemann manifoldu, $f > 0, \lambda, \varphi \in \mathfrak{F}(B)$ olsun ve* (5.1) *ve* (5.2) *eşitlikleri sağlansın. $m > 1$ iken (F^m, g_F) complete Riemann manifoldu için* (5.3) *sağlanacak şekilde ${}^F\mathrm{Ric} = \mu g_F$ ise $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci solitondur.*

Teorem 5.3 ([18])**.** *$m > 1$ olmak üzere ${}^F\mathrm{Ric} = \mu g_F$ ise $(M = B^n \times_f F^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton warped çarpım manifoldu olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa M manifoldu bir Riemann çarpım manifoldudur:*

1. f fonksiyonu miminum değerini alır ve $\lambda \geq \dfrac{\mu}{f^2}$ (f fonksiyonu maksimum değerini alır ve $\lambda \leq \dfrac{\mu}{f^2}$).

2. $\lambda \leq 0$ ve p,q noktaları sırasıyla f fonksiyonunun minimum ve maksimum değerleri olmak üzere $\lambda(p) \leq \lambda(q)$.

5.2. Çoklu Warped Çarpım Manifoldları Üzerinde Gradiyent Almost Ricci Solitonlar İçin Elde Edilen Sonuçlar

Önerme 5.4 ([21]). *$M = B^r \times_b F_1^{s_1} \times_b F_2^{s_2} \times_b \cdots \times_b F_m^{s_m}$ çoklu warped çarpım manifoldu, $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\lambda : B \longrightarrow \mathbb{R}$ iki düzgün fonksiyon ve $(M, g, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton olsun. Bu durumda ψ fonksiyonu taban manifoldunda tanımlı bir φ fonksiyonunun lifti, yani $\psi = \tilde{\varphi}$ dir. Ayrıca,*

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda^B\nabla\varphi \\ &\quad +\nabla\left(\left(2-r-\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\lambda + |^B\nabla\varphi|^2 - \Delta_B\varphi - \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\frac{^B\nabla\varphi(b)}{b}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(M, g, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton ve $X \in \mathfrak{L}(B)$, $V_j \in \mathfrak{L}(F_j),\ 1 \leq j \leq m$ olsun. Lemma 2.41 den,

$$\mathrm{Ric}(X, V_j) = 0,\ 1 \leq i \leq m$$

olduğu açıktır. $(\nabla\psi)_B \in \mathfrak{L}(B)$ ve $(\nabla\psi)_{F_i} \in \mathfrak{L}(F_i),\ 1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\nabla\psi$,

$$\nabla\psi = (\nabla\psi)_B + (\nabla\psi)_{F_1} + \cdots + (\nabla\psi)_{F_m}$$

biçiminde yazılabilir. (3.4) eşitliği göz önüne alındığında,

$$\mathrm{Ric}\,(X, V_j) + \nabla^2\psi\,(X, V_j) = \tilde{\lambda} g\,(X, V_j)$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
0=\nabla^2\psi(X,V_j) &= g(\nabla_X\nabla\psi,V_j)\\
&= g(\nabla_X(\nabla\psi)_B,V_j)+g\left(\nabla_X\left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla\psi)_{F_i}\right),V_j\right)\\
&= g(\nabla_X(\nabla\psi)_{F_1},V_j)+\cdots+g(\nabla_X(\nabla\psi)_{F_m},V_j)\\
&= \frac{Xb}{b}g((\nabla\psi)_{F_1},V_j)+\cdots+\frac{Xb}{b}g((\nabla\psi)_{F_m},V_j)\\
&= \frac{Xb}{b}g\left((\nabla\psi)_{F_j},V_j\right).
\end{aligned}$$

Burada her $1\leq j\leq m$ için $(\nabla\psi)_{F_j}=0$ olduğundan $\nabla\psi=(\nabla\psi)_B\in\mathfrak{L}(B)$ dir. Dolayısıyla, liftin tekliğinden $\psi=\tilde{\varphi}$ olacak biçimde bir $\varphi:B\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Diğer taraftan (3.6) eşitliği kullanılarak

$$-2\tilde{\lambda}\nabla\tilde{\varphi}+\nabla\left(\left(2-r-\sum_{i=1}^{m}s_i\right)\tilde{\lambda}+|\nabla\tilde{\varphi}|^2-\Delta\tilde{\varphi}\right)=0$$

olduğu görülür. Lemma 2.38 ve Sonuç 2.40 kullanılarak,

$$-2\lambda{}^B\nabla\varphi+\nabla\left(\left(2-r-\sum_{i=1}^{m}s_i\right)\lambda+|{}^B\nabla\varphi|^2-\Delta_B\varphi-\left(\sum_{i=1}^{m}s_i\right)\frac{{}^B\nabla\varphi(b)}{b}\right)=0$$

eşitliği elde edilir. □

Lemma 2.41 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Önerme 5.5 ([21]). *$M=B\times_{b_1}F_1\times_{b_2}F_2\times_{b_3}\cdots\times_{b_m}F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu ve $\varphi,\lambda:B\longrightarrow\mathbb{R}$ iki düzgün fonksiyon ve $(M,g,\nabla\tilde{\varphi},\tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,*

$${}^B\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}_B^{\varphi}=\lambda g_B+\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i}{b_i}\mathrm{Hess}_B^{b_i} \tag{5.5}$$

ve ${}^{F_i}\mathrm{Ric}=\mu\sum_{i=1}^{m}b_i^2g_{F_i}$ eşitlikleri sağlanır. Burada μ

$$\mu=\tilde{\lambda}-\frac{{}^B\nabla\varphi(b_i)}{b_i}+\frac{\Delta_Bb_i}{b_i}+(s_i-1)\frac{|{}^B\nabla\, b_i|^2}{b_i^2}+\sum_{\substack{i=1\\k\neq i}}^{m}s_k\frac{{}^B\nabla b_i(b_k)}{b_ib_k}$$

eşitliği ile belirlidir.

İspat: $(M,g,\nabla\tilde{\varphi},\tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton olsun. Lemma 2.38 ve (3.4) eşitliği kullanılarak, $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$ için,

$$\tilde{\lambda}(X,Y) - \nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \sum_{i=1}^{m}\frac{s_i}{bi}\mathrm{Hess}_B b_i(X,Y)$$

olur. $\nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = \mathrm{Hess}_B\varphi(X,Y)$ olduğundan,

$$\lambda g_B(X,Y) - \mathrm{Hess}_B\varphi(X,Y) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \sum_{i=1}^{m}\frac{s_i}{bi}\mathrm{Hess}_B b_i(X,Y)$$

(5.5) eşitliği gösterilmiş olur. İkinci eşitliği göstermek için, (3.4) eşitliği ve Lemma 2.41 kullanılarak, $V,W \in \mathfrak{L}(F_i)$ için,

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}g(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = {}^{F_i}\mathrm{Ric}(V,W) \quad - \quad & \left[\frac{\Delta_B b_i}{b_i} + (s_i-1)\frac{|{}^{B}\nabla\, b_i|^2}{b_i^2}\right. \\ & \left. + \sum_{\substack{i=1\\k\neq i}}^{m} s_k \frac{g_B({}^{B}\nabla b_i, {}^{B}\nabla\, b_k)}{b_i b_k}\right] g(V,W)\end{aligned}$$

olur. $\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = g(\nabla_V\nabla\tilde{\varphi},W) = \frac{\nabla\tilde{\varphi}(b_i)}{b_i}g(V,W) = \frac{{}^{B}\nabla\varphi(b_i)}{b_i}\sum_{i=1}^{m} b_i^2 g_{F_i}(V,W)$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}{}^{F_i}\mathrm{Ric}(V,W) = \left[\tilde{\lambda} - \frac{{}^{B}\nabla\varphi(b_i)}{b_i} \quad + \quad \right. & \frac{\Delta_B b_i}{b_i} + (s_i-1)\frac{|{}^{B}\nabla\, b_i|^2}{b_i^2} \\ & \left. + \sum_{\substack{i=1\\k\neq i}}^{m} s_k \frac{g_B({}^{B}\nabla b_i, {}^{B}\nabla\, b_k)}{b_i b_k}\right] \sum_{i=1}^{m} b_i^2 g_{F_i}(V,W)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. □

Warping fonksiyonlarının eşit olması durumunda, yani $b_i = b$ ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.6 ([21]). *$M = B \times_b F_1 \times_b F_2 \times_b \cdots \times_b F_m$ bir çoklu warped çarpım manifoldu,*

$\varphi, \lambda :\longrightarrow \mathbb{R}$ iki düzgün fonksiyon ve $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton olsun. Bu durumda,

$$^{B}\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}_B\varphi = \lambda g_B + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\mathrm{Hess}_B b \tag{5.6}$$

ve $^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}$ *eşitlikleri sağlanır. Burada* μ

$$\mu = \tilde{\lambda} b^2 + b\Delta_B b + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)|^{B}\nabla b|^2 - b^{B}\nabla\varphi(b). \tag{5.7}$$

eşitliği ile belirlidir.

Aşağıdaki önerme ileride elde edeceğimiz sonuçlar için temel teşkil etmektedir.

Önerme 5.7 ([21]). *(B^r, g) bir Riemann manifoldu ve $b > 0$, φ ve λ, B üzerinde tanımlı düzgün fonksiyonlar olsun. Eğer bazı $s_i > 0$ sabitleri için,*

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2 b \tag{5.8}$$

ve (5.4) eşitlikleri sağlanır ise b, φ ve λ fonkisyonları arasında bir $\mu \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\mu = \lambda b^2 + b\Delta b + (\sum_{i=1}^{m} s_i - 1)|\nabla b|^2 - b\nabla\varphi(b) \tag{5.9}$$

dir.

İspat: (5.8) eşitliğinin izi alınırsa

$$R = r\lambda + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\Delta b - \Delta\varphi$$

bulunur ve bu eşitliğin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla R = r\nabla\lambda - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b^2}\Delta b\nabla b + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla\Delta b - \nabla\Delta\varphi \tag{5.10}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan (5.8) eşitliğinin diverjansı alındığında,

$$\mathrm{divRic} = \mathrm{div}(\lambda g) + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) \mathrm{div}(\frac{1}{b}\nabla^2 b) - \mathrm{div}\nabla^2\varphi \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\mathrm{div}\,(\lambda g) = \lambda \mathrm{div} g + g(\nabla\lambda,\cdot) = \nabla\lambda, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\frac{1}{b}\nabla^2 b\right) &= \frac{1}{b}\mathrm{div}\nabla^2 b - \frac{1}{b^2}\nabla^2 b(\nabla b,\cdot) \\
&= \frac{1}{b}\mathrm{div}\nabla^2 b - \frac{1}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 \\
&= \frac{1}{b}\left(\mathrm{Ric}(\nabla b) + \nabla\Delta b\right) - \frac{1}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 \\
&= \frac{1}{b}\left[\lambda\nabla b + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)}{2b}\nabla|\nabla b|^2 - \nabla^2\varphi(\nabla b,\cdot)\right] \\
&\quad + \frac{1}{b}\nabla\Delta b - \frac{1}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 \\
&= \frac{1}{b}\lambda\nabla b + \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 \\
&\quad - \frac{1}{b}\nabla^2\varphi(\nabla b,\cdot) + \frac{1}{b}\nabla\Delta b,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

ve

$$\mathrm{div}\left(\nabla^2\varphi\right) = \lambda\nabla\varphi + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2 b(\nabla\varphi,\cdot) - \frac{1}{2}\nabla|\nabla\varphi|^2 + \nabla\Delta\varphi \tag{5.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.12), (5.13) ve (5.14) eşitlikleri (5.11) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\mathrm{divRic} &= \nabla\lambda + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\lambda\nabla b + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2\varphi(\nabla b,\cdot) + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla\Delta b - \lambda\nabla\varphi - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2 b(\nabla\varphi,\cdot) \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla|\nabla\varphi|^2 - \nabla\Delta\varphi
\end{aligned} \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.10) ve (5.15) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\nabla R + \mathrm{divRic} \\
&= -\frac{r}{2}\nabla\lambda + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{2b^2}\Delta b\nabla b - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{2b}\nabla\Delta b + \frac{1}{2}\nabla\Delta\varphi + \nabla\lambda \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\lambda\nabla b + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right)}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2\varphi(\nabla b,\cdot) + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla\Delta b \\
&\quad - \lambda\nabla\varphi - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla^2 b(\nabla\varphi,\cdot) + \frac{1}{2}\nabla|\nabla\varphi|^2 - \nabla\Delta\varphi \\
&= \frac{2-r}{2}\nabla\lambda + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{2b^2}\Delta b\nabla b - \frac{1}{2}\nabla\Delta\varphi + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{2b}\nabla\Delta b + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\lambda\nabla b \\
&\quad + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right)}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\left(\nabla^2\varphi(\nabla b,\cdot) + \nabla^2 b(\nabla\varphi,\cdot)\right) \\
&\quad - \lambda\nabla\varphi + \frac{1}{2}\nabla|\nabla\varphi|^2 \\
&= \frac{2-r}{2}\nabla\lambda + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{2b^2}\Delta b\nabla b - \frac{1}{2}\nabla\Delta\varphi + \frac{h}{2b}\nabla\Delta b + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\lambda\nabla b \\
&\quad + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right)}{2b^2}\nabla|\nabla b|^2 - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b}\nabla\left(\nabla\varphi(b)\right) - \lambda\nabla\varphi + \frac{1}{2}\nabla|\nabla\varphi|^2
\end{aligned}$$

bulunur. (5.4) eşitliği son satırda yerine yazılır ve eşitliğin her iki tarafı $\frac{2b^2}{\sum_{i=1}^{m} s_i}$ ile çarpılırsa,

$$0 = \nabla\left(\lambda b^2 + b\Delta b + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right)|\nabla b|^2 - b\nabla\varphi(b)\right)$$

elde edilir. Yani, $\lambda b^2 + b\Delta b + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right)|\nabla b|^2 - b\nabla\varphi(b)$ sabittir. $\square$

Teorem 5.8 ([21])**.** *(B^r, g) bir Riemann manifoldu, $b>0$, φ ve λ, B üzerinde tanımlı düzgün fonksiyonlar olsun ve* (5.6) *ve* (5.7) *eşitlikleri sağlansın.* $1 \leq i \leq m$ *olmak üzere $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ complete Riemann manifoldlarının Ricci eğrilik tensörü* (5.9) *eşitliğindeki μ sabiti için ${}^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu \sum\limits_{i=1}^{m} g_{F_i}$ eşitliğini sağlıyor ise $(M = B \times_b F_1 \times_b \cdots \times_b F_m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci solitondur.*

İspat: $(M = B \times_b F_1 \times_b F_2 \times_b \cdots \times_b F_m, g)$ bir çoklu warped çarpım manifoldu olsun. $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ için, $\nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = \mathrm{Hess}_B\varphi(X,Y)$ ve $\nabla^2\tilde{b}(X,Y) = \mathrm{Hess}_B b(X,Y)$ olduğu açıktır. (5.6) eşitliğinden,

$$ {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) + \nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = \tilde{\lambda} g_B(X,Y) + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} s_i}{b} \nabla^2\tilde{b}(X,Y) $$

olur ve Lemma 2.38 kullanılarak,

$$ \mathrm{Ric}(X,Y) + \nabla^2\tilde{\varphi}(X,Y) = \tilde{\lambda} g_B(X,Y) $$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

$X \in \mathfrak{L}(B)$ ve $V \in \mathfrak{L}(F_i)$ için $\nabla^2\tilde{\varphi}(X,V) = g(\nabla_X \nabla\tilde{\varphi}, V) = 0$ dir. Lemma 2.41 den (3.4) eşitliğinin sağlandığı görülür.

$i \neq j$ olmak üzere $V \in \mathfrak{L}(F_i)$ ve $W \in \mathfrak{L}(F_j)$ için $\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = g(\frac{\nabla\tilde{\varphi}(b)}{b}V, W) = 0$ olduğundan ve Lemma 2.41 kullanılarak, (3.4) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Son olarak, $V, W \in \mathfrak{L}(F_i)$ için $\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = g(\frac{\nabla\tilde{\varphi}(b)}{b}V, W)$ dir ve Lemma 2.41, (5.7) eşitliği ve ${}^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu \sum\limits_{i=1}^{m} g_{F_i}$ hipotezi kullanılarak

$$ \begin{aligned} \mathrm{Ric}(V,W) &= \left[\mu - b\Delta_B b - (s_i - 1)|{}^{B}\nabla b|^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{m} s_k |{}^{B}\nabla b|^2 \right] \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}(V,W) \\ &= \left[\mu - b\Delta_B b - \left(\left((\sum_{i=1}^{m} s_i \right) - 1 \right) |{}^{B}\nabla b|^2 \right] \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}(V,W) \\ &= \left[\tilde{\lambda} - \frac{\nabla\tilde{\varphi}(b)}{b} \right] g(V,W) \\ &= \tilde{\lambda} g(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) \end{aligned} $$

bulunur, yani (3.4) eşitliği sağlanır.

Sonuç olarak, çoklu warped çarpım manifoldu M, bir gradiyent almost Ricci solitondur. □

Teorem 5.9 ([21]). *Çoklu warped çarpım gradiyent almost Ricci soliton, $(M = B \times_b F_1 \times_b \cdots \times_b F_m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ olmak üzere,*

(i) b bir minimuma sahip ve $\tilde{\lambda} \geq \frac{\mu}{b^2}$ (veya b bir maksimuma sahip ve $\tilde{\lambda} \leq \frac{\mu}{b^2}$),

(ii) $\tilde{\lambda} \leq 0$ ve p, q noktaları b fonksiyonunun sırasıyla maksimum ve minimum değerleri olmak üzere $\tilde{\lambda}(p) \leq \tilde{\lambda}(q)$

koşullarından birisi sağlanıyor ise M bir Ricci soliton ve Riemannian çarpımıdır.

İspat: Sonuç 5.6 dan (5.6) eşitliği sağlanır ve

$$\mu = \tilde{\lambda}b^2 + b\Delta_B b + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)|^B\nabla b|^2 - b^B\nabla\varphi(b) \tag{5.16}$$

olmak üzere ${}^{F_i}\mathrm{Ric} = \mu \sum_{i=1}^{m} g_{F_i}$ eşitliği sağlanır. Ayrıca Önerme 5.4 den (5.4) eşitliği sağlanır. Sonuç olarak, Önerme 2.39 dan μ nün sabit olduğu söylenebilir. b bir minimum değere sahip ve $\tilde{\lambda} \geq \frac{\mu}{b^2}$ ise $\Delta_B b \leq 0$ olur. Maksimum Prensibinden b fonksiyonu sabittir.

p ve q noktaları b fonksiyonunun sırasıyla maksimum ve minimum değerleri olsun. Bu durumda $\nabla b(p) = \nabla b(q) = 0$ ve $\Delta b(p) \leq 0 \leq \Delta b(q)$ dir. $b > 0$ olduğundan,

$$0 \geq b(p)\Delta b(p) = \mu - \tilde{\lambda}(p)b^2(p) \geq \mu - \tilde{\lambda}(q)b^2(q) = b(q)\Delta b(q) \geq 0$$

ve

$$\mu - \tilde{\lambda}(p)b^2(p) = 0 = \mu - \tilde{\lambda}(q)b^2(q)$$

eşitliği elde edilir. $\lambda(p) = 0$ ise $\mu = 0$ ve $\tilde{\lambda}(q) = 0$ olur. Buradan (5.16) eşitliği

$$-\tilde{\lambda}b = \Delta_B b + \left(\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) - 1\right)\frac{|^B\nabla b|^2}{b} -^B \nabla\varphi(b) \geq 0.$$

olarak yazılabilir. Bu durumda b fonksiyonu sabittir.

$\tilde{\lambda}(p) \neq 0$ ise $\tilde{\lambda}(q) \neq 0$ olur ve $\tilde{\lambda}(p) \leq \tilde{\lambda}(p) < 0$ eşitsizliği kullanılarak

$$b^2(p) = \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda(p)}\right) b^2(q) \leq b^2(q) \leq b^2(p)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $b(p) = b(q)$ olduğu görülür, yani b fonksiyonu sabittir. Her iki durumda da M bir Riemann çarpımıdır. □

Teorem 5.10 ([21]). *$M = B \times_b F_1 \times_b F_2 \times_b \cdots \times_b F_m$ bir çoklu warped çarpım, $\tilde{\varphi}$ taban manifoldu üzerinde tanımlı bir düzgün φ fonksiyonun M manifolduna lifti olsun. $(M, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ bir gradiyent almost Ricci soliton ve $\nabla\varphi$, B üzerinde bir konformal vektor alanı ise, B bir genelleştirilmiş quasi-Einstein manifoldudur.*

İspat: $\nabla\varphi$, B üzerinde bir konformal vektor alanı, yani $\alpha : B^r \longrightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon olmak üzere $\mathrm{Hess}_B\varphi = \alpha g_B$ olsun. Bu durumda (5.6) eşitliği,

$$^B\mathrm{Ric} + \alpha g_B = \lambda g_B + \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b} \mathrm{Hess}_B b. \tag{5.17}$$

olarak yazılır. $\gamma = \lambda - \alpha,\ \gamma : B \longrightarrow \mathbb{R}$ seçilir ve (5.17) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$^B\mathrm{Ric} - \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i}{b} \mathrm{Hess}_B b = \gamma g_B$$

elde edilir. $f = e^{-\frac{u}{k}}$ seçilirse $\nabla^2 u - \frac{1}{k} du \otimes du = -\frac{k}{f}\nabla^2 f$ elde edilir. $k = \sum_{i=1}^{m} s_i$ olarak yazıldığında

$$^B\mathrm{Ric} + \nabla^2 u - \frac{1}{k} du \otimes du = \gamma g_B$$

elde edilir, yani $(B, g_B, \nabla u, \gamma)$ bir genelleştirilmiş quasi-Einstein manifoldudur. □

6. WARPED ÇARPIM MANİFOLDU ÜZERİNDE τ-QUASI RICCI-HARMONİK METRİKLER

Bu bölümde τ-quasi Ricci-Harmonik manifoldunun warped çarpım manifoldu olması durumu incelenelerek elde edilen yeni sonuçlar verilecektir. Bu sonuçların, Batista, Adriano, Tokura [3] tarafından 2019 yılında yayımlanan "On warped product gradient Ricci-Harmonic soliton" isimli makalede yapılan çalışmaların bir genellemesi olduğu düşünülmektedir.

Önerme 6.1 ([22])**.** *$M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve g, M manifoldu üzerinde bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği ve ϕ sabit olmayan bir dönüşüm olsun. Bir $(p,q) \in B \times F$ noktasının komşuluğunda, ϕ dönüşümü $\phi = \phi_B \circ \pi$ veya $\phi = \phi_F \circ \sigma$ biçiminde olması için gerek ve yeter koşul sabit olmayan bir u potansiyel fonksiyonunun B taban manifoldunda tanımlı bir fonksiyonun lifti olmasıdır.*

İspat: $M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve g, M manifoldu üzerinde bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği ve ϕ sabit olmayan bir dönüşümü olsun.

ϕ dönüşümünün $\phi = \phi_B \circ \pi$ veya $\phi = \phi_F \circ \sigma$ biçiminde olduğu ve u fonksiyonunun sabit olmadığı varsayılsın. $X \in \mathfrak{L}(B)$ ve $V \in \mathfrak{L}(F)$ için,

$$\mathrm{Ric}(X,V) + \nabla^2 u(X,V) - \frac{1}{\tau} du \otimes du(X,V) - \alpha d\phi \otimes d\phi(X,V) = \lambda g(X,V) \quad (6.1)$$

dir. $\mathrm{Ric}(X,V) = 0$ ve $g(X,V) = 0$ olduğundan (6.1) eşitliği,

$$\nabla^2 u(X,V) - \frac{1}{\tau} du \otimes du(X,V) = 0 \quad (6.2)$$

olur. u fonksiyonu F fiber manifoldu üzerinde tanımlı bir fonksiyonun lifti olsun. Bu durumda $\nabla u \in \mathfrak{L}(F)$ dir. Buradan, (6.2) eşitliği

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^2 u(X,V) &= \langle \nabla_X \nabla u, V \rangle \\ &= \frac{Xf}{f} \langle \nabla u, V \rangle \end{aligned}$$

haline gelir. Yani, u fonksiyonu sabit demektir. Bu durum varsayımımızla çelişir. Sonuç olarak u fonksiyonu B üzerinde tanımlı bir fonksiyonun liftidir.

Karşıt olarak, u fonksiyonu B üzerinde tanımlı bir fonksiyonun lifti olsun. Buradan $\nabla u \in \mathfrak{L}(B)$ dir. Sonuç 2.36 kullanılarak, $X \in \mathfrak{L}(B)$ ve $V \in \mathfrak{L}(F)$ için

$$\nabla^2 u(X,V) - \frac{1}{\tau} du \otimes du(X,V) = 0$$

ve

$$c d\phi(X) d\phi(V) = 0 \tag{6.3}$$

bulunur. ϕ sabit olmadığından M manifoldunun (p,q) noktası komşuluğundaki bir $W = X + V$ vektör alanı için $d\phi(W)d\phi(W) \neq 0$ dir. Buradan,

$$(d\phi(X))^2 + 2\phi(X)d\phi(V) + (d\phi(V))^2 \neq 0$$

olur. (6.3) yukarıda kullanılırsa kullanılarak $(d\phi(X))^2 + (d\phi(V))^2 \neq 0$, olduğu görülür, yani $d\phi(X) = 0$ veya $d\phi(V) = 0$ dır. $\square$

Not 6.2. *f fonksiyonu sabit olursa M manifoldu warped çarpım manifoldu değil bilinen Riemann çarpım manifoldu olur.*

Önerme 6.1 yardımı ile aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 6.3 ([22]). *$M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu olsun. M üzerinde tanımlı bir g metriğinin bir τ-quasi Ricci-Harmonik metrik olması için gerek ve yeter koşul*

(i) $\phi = \phi_B \circ \pi$ *ise,*

$$^B\mathrm{Ric} - \frac{m}{f}\nabla^2 f + \nabla^2 u - \frac{1}{\tau} du \otimes du - \alpha d\phi \otimes d\phi = \lambda g_B, \tag{6.4}$$

eşitliğinin sağlanması ve F manifoldunun $^F\mathrm{Ric} = \mu g_F$ olacak biçimde Einstein olmasıdır.

(ii) $\phi = \phi_F \circ \sigma$ *ise,*

$$^{B}\mathrm{Ric} - \frac{m}{f}\nabla^2 f + \nabla^2 u - \frac{1}{\tau} du \otimes du = \lambda g_B, \tag{6.5}$$

eşitliğinin sağlanması ve F manifoldunun

$$\begin{cases} ^{F}\mathrm{Ric} = \mu g_F, \\ \tau_g \phi = 0. \end{cases}$$

olacak biçimde harmonik Einstein olmasıdır.

Her iki durumda da μ

$$\mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 + f\nabla f(u) \tag{6.6}$$

eşitliği ile belirlidir.

İspat: *Durum (i):* $\phi = \phi_B \circ \pi$ ve $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ olsun. (3.10) eşitliğinde Sonuç 2.36 kullanıldığında, (6.4) elde edilir. $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ için, (3.10) eşitliği

$$\mathrm{Ric}(V,W) + \nabla^2 u(V,W) - \frac{1}{\tau} du \otimes du(V,W) - \alpha d\phi \otimes d\phi(V,W) = \lambda g(V,W)$$

olur. Önerme 6.1 den, u fonksiyonunun B manifoldundan lifti olduğu bilinmektedir. O halde $du(V) = 0$ ve $d\phi(V) = 0$ dır. Sonuç 2.36 kullanılırsa

$$^{F}\mathrm{Ric}(V,W) - \left(\frac{\Delta f}{f} + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right) g(V,W) + \nabla^2 u(V,W) = \lambda g(V,W) \tag{6.7}$$

eşitliği bulunur. Önerme 2.34 den faydalanarak,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(V,W) &= g\left(\nabla_V \nabla u, W\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla u(f)}{f} V, W\right) \\ &= f g_F\left(V,W\right) \nabla u(f) \end{aligned} \tag{6.8}$$

elde edilir. Bulunan sonuç (6.7) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$^{F}\mathrm{Ric}(V,W) = \left(f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 + f\nabla f(u)\right) g_F(V,W)$$

elde edilir. Yani F manifoldu Einsteindır.

Durum (ii): $\phi = \phi_F \circ \sigma$ ve $X,Y \in \mathfrak{L}(B)$ olsun. (3.10) eşitliğinde Sonuç 2.36 kullanıldığında, $d\phi(X) = 0$ olduğundan (6.5) eşitliği bulunur. $V,W \in \mathfrak{L}(F)$ için, (3.10) eşitliği

$$\mathrm{Ric}(V,W) + \nabla^2 u(V,W) - \frac{1}{\tau} du \otimes du(V,W) - \alpha d\phi \otimes d\phi(V,W) = \lambda g(V,W)$$

olur. Önerme 2.34, $du(V) = 0$ ve (6.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$${}^F\mathrm{Ric}(V,W) - \alpha d\phi \otimes d\phi(V,W) = \mu g(V,W)$$

bulunur. $d\phi(\nabla u) = 0$ olduğundan, F manifoldu harmonik Einsteindır. □

Not 6.4. *Teorem 6.3, Sonuç 3.10 ve [3] makalesindeki Teorem 1.3 ün genelleştirilmiş halidir.*

Sonuç 6.5 ([22]). *$M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve g, M üzerinde bir τ-quasi Ricci-Harmonik metrik olsun. ∇f vektör alanı B taban manifoldu üzerinde konformal vektör alanı için,*

(i) $\phi = \phi_B \circ \pi$ ise B manifoldu üzerindeki g_B metriği bir genelleştirilimiş τ-quasi Ricci-Harmonik metriktir.
(ii) $\phi = \phi_F \circ \sigma$ ise B manifoldu is genelleştirilmiş τ-quasi Einsten manifoldudur.

Teorem 6.6 ([22]). *$M = B^n \times_f F^m$ bir warped çarpım manifoldu ve g, M manifoldu üzerinde bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği ve ϕ sabit olmayan bir dönüşüm olsun. $\lambda \geq 0$ ve $\frac{m}{f}\Delta f \geq {}^B\mathrm{R}$ ise u fonksiyonu sabittir, yani M manifoldu harmonik Einsteindır.*

İspat: (6.4) eşitliğinin izi alınırsa,

$$\Delta_B u = \lambda n + \frac{m}{f}\Delta_B f - {}^B\mathrm{R} + \frac{1}{\tau}|\nabla u|^2 + \alpha|\nabla\phi|^2$$

bulunur. Hipotez kullanılırsa, $\Delta_B u \geq 0$ olmak zorundadır. Maksimum prensibinden u fonksiyonu B üzerinde sabit olmak zorundadır. Bu durumda u fonksiyonunun M

manifolduna lifti sabittir, yani M manifoldu harmonik Einsteindır. $\square$

Buradan itibaren ϕ dönüşümü $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde reel değerli bir fonksiyon olarak kabul edilecektir.

Teorem 6.7 ([22]). *$f = f \circ \xi$, $u = u \circ \xi$, $\varphi \circ \xi$, $\phi = \phi \circ \xi$ fonksiyonları $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} g_0)$ manifoldunda tanımlansın, sabit olmayan bir ϕ dönüşümü ile birlikte $\left(M = \mathbb{R}^n \times_f F^m, g = \varphi^{-2} g_0 + f^2 g_F\right)$ manifoldu üzerinde tanımlı g metriğinin bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği olması için gerek ve yeter koşul*

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' - \frac{1}{\tau}(u')^2 - \theta(\phi')^2 = 0, \tag{6.9}$$

$$\left[\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi}u'\right]||\alpha||^2 = \frac{\lambda}{\varphi^2}, \tag{6.10}$$

$$\left[\frac{f''}{f} - (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + (m-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{f'}{f}u'\right]||\alpha||^2 = \frac{\mu}{f^2\varphi^2} - \frac{\lambda}{\varphi^2}, \tag{6.11}$$

$$\left[\phi'' - (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\phi' + m\phi'\frac{f'}{f} - \phi' u'\right]||\alpha||^2 = 0. \tag{6.12}$$

denklem sisteminin sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 6.3, $B^n \times_f F^m$ manifoldu üzerinde tanımlı g metriğinin τ-quasi Ricci-Harmonik olması için gerek ve yeter koşulu vermektedir. Bu teorem ile birlikte değişmez çözüm tekniği kullanılarak (6.9), (6.10), (6.11) ve (6.12) denklemleri elde edilecektir.

İlk olarak, sıfırdan farklı seçilmiş bir $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vektörü seçilsin. $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\xi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ eşitliği ile tanımlansın. $\varphi(\xi)$, $h(\xi)$, $u(\xi)$ ve $f(\xi)$ fonksiyonları ξ değişkenine bağlı fonksiyonlar olarak düşünülürse,

$$\varphi_{,x_i} = \varphi'\alpha_i, \qquad f_{,x_i} = f'\alpha_i, \qquad u_{,x_i} = u'\alpha_i, \qquad \phi_{,x_i} = \phi'\alpha_i$$

$$\varphi_{,x_i x_j} = \varphi''\alpha_i\alpha_j, \quad f_{,x_i x_j} = f''\alpha_i\alpha_j, \quad u_{,x_i x_j} = u''\alpha_i\alpha_j \quad \phi_{,x_i x_j} = \phi''\alpha_i\alpha_j.$$

yazılabilir. Burada $B=(\mathbb{R}^n,\varphi^{-2}g_0)$ olmak üzere $f=f_B\circ\pi,\ \varphi=\varphi_B\circ\pi,\ u=u_B\circ\pi$ ve $\phi=\phi_B\circ\pi,$ fonksiyonları B manifoldundan lift edilmişlerdir.

$g_B=\varphi^{-2}g_0$ konformal metriği için, Ricci eğrilik tensörü,

$$\mathrm{Ric}_{g_B}=\frac{1}{\varphi^2}\Big\{(n-2)\varphi\mathrm{Hess}_{g_0}(\varphi)+[\varphi\Delta_{g_0}\varphi-(n-1)|\nabla_{g_0}\varphi|^2]g_0\Big\}$$

eşitliği ile belirlidir [7].

$(Hess_{g_0}(\varphi))_{i,j}=\varphi''\alpha_i\alpha_j,\ \Delta_{g_0}\varphi=\varphi''||\alpha||^2$, ve $|\nabla_{g_0}\varphi|^2=\varphi'||\alpha||^2$ olduğundan,

$$(\mathrm{Ric}_{g_B})_{i,j}=\frac{1}{\varphi}\{(n-2)\varphi''\alpha_i\alpha_j\}\quad\forall i\neq j=1,...,n \tag{6.13}$$

$$(Ric_{g_B})_{i,i}=\frac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi\varphi''(\alpha_i)^2+[\varphi\varphi''||\alpha||^2-(n-1)(\varphi')^2||\alpha||^2]\varepsilon_i\right\}\quad\forall i=1,...,n. \tag{6.14}$$

eşitlikleri sağlanır.

$Hess(u)$, g_B metriğine göre hesaplanırsa,

$$(\mathrm{Hess}_{g_B}(u))_{ij}=u_{,x_ix_j}-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k u_{,x_k}$$

bulunur. Birbirinden farklı i,j,k değerleri için Christoffel sembolleri Γ_{ij}^k,

$$\Gamma_{ij}^k=0,\ \Gamma_{ij}^i=-\frac{\varphi_{,x_j}}{\varphi},\ \Gamma_{ii}^k=\varepsilon_i\varepsilon_k\frac{\varphi_{,x_k}}{\varphi}\ \text{ and }\ \Gamma_{ii}^i=-\frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi}$$

eşitlikleri ile belirlidir.

Buradan,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}_{g_B}(u))_{ij} &= u_{,x_ix_j}+\varphi^{-1}(\varphi_{,x_i}u_{,x_j}+\varphi_{,x_j}u_{,x_i})-\delta_{ij}\varepsilon_i\sum_k\varepsilon_k\varphi^{-1}\varphi_{,x_k}u_{,x_k}\\ &= \alpha_i\alpha_j u''+(2\alpha_i\alpha_j-\delta_{ij}\varepsilon_i||\alpha||^2)\varphi^{-1}\varphi'u' \end{aligned}\tag{6.15}$$

olarak hesaplanır.

f fonksiyonunun Laplasiyeni $\Delta_{g_B}f=\sum_k\varphi^2\varepsilon_k(\mathrm{Hess}_{g_B}(f))_{kk}$ ise

$$\Delta_{g_B}f=||\alpha||^2\varphi^2(f''-(n-2)\varphi^{-1}\varphi'f') \tag{6.16}$$

eşitliği ile belirlidir.

Diğer taraftan, g_B konformal metriği üzerinde $\nabla f(u)$, $|\nabla f|^2$ ve $(\nabla\phi\otimes\nabla\phi)_{ij}$

$$\begin{aligned}\nabla_{g_B} f(u) = \langle\nabla_{g_B} f, \nabla_{g_B} u\rangle = \varphi^2\sum_k \varepsilon_k f_{,x_k}u_{,x_k} &= ||\alpha||^2\varphi^2 f'u',\\ |\nabla_{g_B} f|^2 = \varphi^2\sum_k \varepsilon_k f^2_{,x_k} &= ||\alpha||^2\varphi^2(f')^2,\\ (\nabla_{g_B}\phi\otimes\nabla_{g_B}\phi)_{ij} = \phi_{,x_i}\phi_{,x_j} &= \alpha_i\alpha_j(\phi')^2,\\ (\nabla_{g_B}u\otimes\nabla_{g_B}u)_{ij} = u_{,x_i}u_{,x_j} &= \alpha_i\alpha_j(u')^2\end{aligned} \tag{6.17}$$

eşitlikleri ile belirlidir.

$i=j$ için (6.14), (6.15) ve (6.17) eşitlikleri (6.4) denkleminde yerine yazıldığında (6.10) eşitliği elde edilir.

$i\neq j$ için (6.13) ve (6.15) eşitlikleri (6.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\alpha_i\alpha_j\left((n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' - \frac{1}{\tau}(u')^2 - \theta(\phi')^2\right) = 0$$

bulunur. $i\neq j$ için $\alpha_i\alpha_j\neq 0$ olacak şekilde i, j varsa,

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' - \frac{1}{\tau}(u')^2 - \theta(\phi')^2 = 0$$

olur, bu eşitlik (6.9) denklemidir.

Şimdi $\alpha_i\alpha_j = 0$, $\forall i\neq j$ durumu incelenecektir. $\alpha_{k_0} = 1$ ve $k\neq k_0$ için $\alpha_k = 0$ olacak biçimde bir sabit k_0 ele alınsın. Bu durumda, (6.14), (6.15) ve (6.17) eşitlikleri (6.4) denkleminde yerine yazılırsa $i\neq k_0$ için (6.10) denklemi elde edilir, yani, $\alpha_i = 0$ dır. $i = k_0$ için (6.9) denklemi elde edilir, yani, $\alpha_{k_0} = 1$ dir.

(6.16), (6.17) eşitlikleri (6.6) eşitliğinde yerine yazılırsa (6.11) denklemi elde edilir. Son olarak, Laplasiyenin lifti ve (3.11) eşitliği kullanılarak

$$\Delta\phi = \left[\Delta_{g_B}\phi_B + \frac{m}{f}g_B(\nabla\phi, \nabla f)\right] = g_B(\nabla_{g_B}\phi, \nabla_{g_B}u) \tag{6.18}$$

elde edilir. (6.16), (6.17) eşitlikleri (6.18) denkleminde yerine yazılırsa (6.12) eşitliği elde edilir. $\square$

Sonuç 6.8 ([22]). *$f = f \circ \xi$, $u = u \circ \xi$, $\varphi \circ \xi$, $\phi = \phi \circ \xi$ fonksiyonları $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} g_0)$ manifoldunda tanımlansın, sabit olmayan bir ϕ dönüşümü ile birlikte $\left(M = \mathbb{R}^n \times_f F^m, g = \varphi^{-2} g_0 + f^2 g_F\right)$ manifoldu üzerinde g metriği bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği olsun. $||\alpha||^2 = 0$ ise $\lambda = 0$ ve $\mu = 0$, yani, F^m manifoldu Ricci flattir.*

Örnek 6.9. Teorem 6.6 da $||\alpha||^2 = 0$ olsun. Warping fonksiyonu $f(\xi) = e^{\xi}$, $\varphi(\xi) = e^{\xi}$ ve $\phi(\xi) = \xi$ ve $\theta = 1$ olarak seçilirse (6.9) eşitliği,

$$\frac{1}{\tau}(u')^2 - u'' - 2u' = n - 3m - 2 \tag{6.19}$$

ikinci dereceden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemidir. (6.19) denklemi $m = 4$, $n = 3$ ve $\tau = 1$ için çözülürse,

$$u = -\log\left(\cos(\sqrt{10}(c_1 + \xi))\right) + \xi + c_2$$

bulunur. Sonuç olarak, $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} g_0)$ manifoldu üzerinde yukarıdaki eşitlikler ile tanımlı f, u, φ ve ϕ fonksiyonları Teorem 6.6 daki diferansiyel denklem sistemini sağlar, yani $\left(M = \mathbb{R}^n \times_f F^m, g = \varphi^{-2} g_0 + f^2 g_F\right)$ manifoldu üzerinde bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği vardır.

Teorem 6.10 ([22]). *$f = f \circ \xi$, $u = u \circ \xi$, $\varphi \circ \xi$ ve $\phi = \phi \circ \zeta$ fonksiyonları sırasıyla $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} g_0)$ ve $(\mathbb{R}^m, \psi^{-2} g_0)$ manifoldlarında tanımlansın. Sabit olmayan bir ϕ dönüşümü ile birlikte $\left(M = \mathbb{R}^n \times_f F^m, g = \varphi^{-2} g_0 + f^2 g_F\right)$ manifoldu üzerinde tanımlı g metriğinin bir τ-quasi Ricci-Harmonik metriği olması için gerek ve yeter koşul*

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' - \frac{1}{\tau}(u')^2 = 0, \tag{6.20}$$

$$\left[\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi}h'\right]||\alpha||^2 = \frac{\lambda}{\varphi^2}, \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}\left[f''\varphi^2 f - (n-2)\varphi'\varphi f f' + (m-1)(f')^2\varphi^2 - f' f \varphi^2 h'\right]||\alpha||^2 + \lambda f^2 = \\ = \left[\frac{\psi''}{\psi} - (m-1)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]||\beta||^2,\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$(m-2)\frac{\psi''}{\psi}-\alpha(\phi')^2=0, \tag{6.23}$$

$$\left[\psi^2\phi''-(m-2)\psi\psi'\phi'\right]||\beta||^2=0 \tag{6.24}$$

denklem sisteminin sağlanmasıdır.

İspat: Bu ispatta değişmez çözüm tekniği hem taban hem de fiber manifolduna uygulanacaktır. Teorem 6.7 nın ispatında yapıldığı gibi, $i\neq j$ için (6.13) ve (6.17) eşitliklieri (6.5) denkleminde yerine yazılarak (6.20) denklemi elde edilir. $i=j$ için ise (6.14), (6.17) eşitlikleri (6.5) denkleminde yerine yazılarak (6.21) denklemi elde edilir.

Teorem 6.3 den, F manifoldunun harmonik-Einstein manifoldu olduğu bilinmektedir. Buradan $c>0$ olmak üzere,

$$\mathrm{Ric}_{g_F}-c\nabla_{g_F}\phi_F\otimes\nabla_{g_F}\phi_F=\mu g_F \tag{6.25}$$

ve

$$\mu=f\Delta_{g_B}f+(m-1)|\nabla_{g_B}f|^2+\lambda f^2+f\nabla_{g_B}f(u) \tag{6.26}$$

dir. Sıfırdan farklı bir $\beta=(\beta_1,...,\beta_m)$ için $\psi:\mathbb{R}^m\to(0,\infty),\zeta:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ sırasıyla fiber manifoldunun konformal faktörü ve değişmez fonksiyonudur. $u(\zeta)$ olmak üzere,

$$(\nabla_{g_F}\phi_F\otimes\nabla_{g_F}\phi_F)_{ij}=\phi_{,y_i}\phi_{,y_j}\beta_i\beta_j \qquad \forall i,j=1,...,m \tag{6.27}$$

dir. (6.17) eşitliği (6.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[f''\varphi^2f-(n-2)\varphi'\varphi ff'+(m-1)(f')^2\varphi^2-f'f\varphi^2u'\right]||\alpha||^2+\lambda f^2=\mu \tag{6.28}$$

elde edilir. (6.13), (6.14), (6.27) ve (6.28) eşitlikleri (6.25) denkleminde yerine yazılırsa, $i=j$ için (6.22) ve $i\neq j$ için (6.23) denklemleri elde edilir. Son olarak, Teorem 6.3 in (ii) maddesi kullanılarak $\Delta_{g_F}\phi_F=0$ olduğu görülür. (6.16) eşitliği kullanılarak (6.24) denklemi elde edilir. □

KAYNAKLAR

[1] Açıkgöz Kaya, D., Onat, L. 2020. Ricci solitons on Multiply Warped Product Manifolds, **Int. Electron. J. Geom.** 13(2): 152–159.

[2] Aubin, T. 1998. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, Berlin Hiedelberg.

[3] Batista, E., Adriano, L., Tokura, W. 2019. On warped product gradient Ricci-Harmonic soliton, **arXiv preprint arXiv:1906.11933**

[4] Barros, A., Ribeiro Jr, E. 2014. Characterizations and Integral Formulae for Generalized m-Quasi-Einstein Metrics, **Bull. Braz. Math. Soc. New Series** 45(2): 325–341.

[5] Barros, A., Ribeiro Jr, E. 2011. Some Characterizations for Compact Almost Ricci Solitons, **Proc. Am. Math. Soc.** 140(3): 1033–1040.

[6] Barros, A., Gomes, J.N., Ribeiro Jr, E. 2013. A note on rigidity of the almost Ricci soliton, **Arch. der Math.** 100: 481–490.

[7] Besse, A. 1987. Einstein Manifolds. Springer-Verlag, Berlin.

[8] Bishop, R.L., O'Neill, B. 1969. Manifolds of negative curvature, **Trans. Amer. Math. Soc.** 145: 1–49.

[9] Eells, J., Sampson, J. 1964. Harmonic mappings of Riemannian manifolds, **Amer. J. Math.** 86: 109–169.

[10] Cao,H.-D. 2006. Geometry of Ricci Solitons, **Chinese Ann. of Math., Series B** 127(2): 121-142.

[11] Cao,H.-D. 2009. Recent Progress on Ricci Solitons, **arXiv preprint arXiv:0908.2006**

[12] Catino, G. 2012. Generalized Quasi-Einstein Manifolds with Harmonic Weyl Tensor, **Math. Z.** 271: 751–756.

[13] Chow, B., Lu, P., Ni,L. 2006. Hamilton's Ricci Flow. American Mathematical Soc., ABD.

[14] Case, J., Shu, Y.-J., Wei, G. 2011. Rigidity of Quasi-Einstein Metrics, **Diff. Geom. and its Appl.** 29: 93–100.

[15] Dobarro, F., Ünal, B. 2005. Curvature of multiply warped products, **J. Geom. Phys.** 55:75–106.

[16] Eminenti, M., La Nave, G., Mantegazza, C. 2008. Ricci solitons-the equation point of view, **Manuscripta Math.** 127: 345-367.

[17] Feitosa, F. E. S., Freitas Filho, A. A., Gomes, J. N. V. 2017. On the construction of gradient Ricci soliton warped product, **Nonlinear Anal.** 161: 30–43.

[18] Feitosa, F. E. S., Freitas Filho, A. A., Gomes, J. N. V. Pina, R. S. 2019. Gradient almost Ricci soliton warped product, **J. Geom. Phys.** 143: 22–32.

[19] Gomes, J.N., Wang, Q., Xia, C. 2017. On the h- almost Ricci Soliton, **J. Geom. Phys.** 114:216–222.

[20] Günsen, S., Onat, L., Açıkgöz Kaya, D. 2019. The warped product manifold as a gradient Ricci soliton and relation to its components, **C. R. Acad. Bulg. Sci.** 72(8): 1015–1023.

[21] Günsen, S., Onat, L. *Multiply warped product almost Ricci solitons*, inceleme aşamasında.

[22] Günsen, S., Onat, L. *On warped product manifolds admitting τ-quasi Ricci-Harmonic Metrics.* inceleme aşamasında.

[23] Guo, H., Philipowski, R., Thalmaier, A. 2015. On gradient solitons of the Ricci-Harmonic flow, ***Acta. Math. Sin.-English Ser.*** 31(11): 1798–1804.

[24] Hamilton, R.S. 1982. Three-manifolds with positive Ricci curvature, **J. Differential Geom.** 17(2): 255–306.

[25] Hamilton, R.S. 1986(1988). The Ricci flow on surfaces, **Mathematics and general relativity** (Santa Cruz, CA) 237–262, **Contemp. Math.** 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[26] Ivey, T. 1993. Ricci solitons on compact three-manifolds, **Differ. Geom. and its Appl.** 3: 301-307.

[27] Karaca, F., Ozgur, C. 2018. Gradient Ricci Solitons on Multiply Warped Product Manifolds, **Filomat** 32(12): 4221–4228.

[28] Kim, D.-S., Kim, Y.H. 2003. Compact Einstein Warped Product Spaces with Nonpositive Scalar Curvature, **Proc. Amer. Math. Soc.** 131: 2573-2576.

[29] Fernandez-Lopez, M., Garcia-Rio, E. 2011. Rigidity of shrinking Ricci solitons, **Math. Z.** 269: 461-466.

[30] Müller, R. 2009. The Ricci flow coupled with harmonic map heat flow. - Ph.D. thesis, ETH Zürich, http://e-collection.library.ethz.ch//view/eth:41938.

[31] Perelman, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, **arXiv:math.DG/0211159v1**.

[32] Perelman, G. Ricci flow with surgery on three-manifolds, **arXiv:math/0303109**.

[33] Petersen, P., Wylie, W. 2009. Rigidity of gradient Ricci solitons, **Pacific J. Math.** 241(2): 329-345.

[34] Petersen, P., Wylie, W. 2010. On the classification of gradient Ricci solitons, **Geom. Topol.** 14(4): 2277-2300.

[35] Petersen, P. 2006. Riemannian Geometry. Springer, ABD.

[36] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M., Setti, A. 2011. Ricci Almost Solitons, **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.** 10(4): 757–799.

[37] Pigola, S., Rimoldi, M., Setti, A. 2011. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons, **Math. Z.** 268: 777–790.

[38] Pina, R., Sousa, M. L. 2017. Gradient Ricci solitons with structure of warped product, **Results Math.** 71: 825–840.

[39] Qian, Z. 1997. Estimates for weighted volumes and applications, **Quart. J. Math. Oxford Ser.** (2)48:190: 235–242.

[40] O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relavity. Academic Press, London.

[41] Wang, L.F., 2011. Rigid Properties of Quasi-Einstein Metrics, **Proc. Amer. Math. Soc.** 139: 3679–3689.

[42] Ünal, B. 2000. Multiply warped products, **J. Geom. Phys.** 34: 287–301.

[43] Wang, L.F., 2016. on Ricci-harmonic metrics, **Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.** 41:417–437.

[44] Wei, G., Wylie, W., 2009. Comparison Geometry for The Bakry-Emery Ricci Tensor, **J. Differential Geom.** 83: 377–405.

[45] Yano, K. 1970. Integral Formulas in Riemannian Geometry. Marcel Dekker, Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Seçkin GÜNSEN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Manisa, 30.05.1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	İzmir Ekonomi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Doktora Öğrenimi	:	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

Günsen, S., Onat, L., Açıkgöz Kaya, D. 2019. The warped product manifold as a gradient Ricci soliton and relation to its components, **C. R. Acad. Bulg. Sci.** 72(8): 1015–1023.

b) Bildiriler

-Uluslararası :

Günsen, S., Onat, L.,A note on $\tau-$quasi Ricci-Harmonic Metrics, International Conference on Mathematical Advences and Applications (ICOMAA), İstanbul, Turkey, June 24-27, 2020.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2015 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	seckin.gunsen@adu.edu.tr
Tarih	:	27.11.2020