

**T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
2021-YL-010**

**KUANTUM SPİN SİSTEMLERİNDE
KUANTUM İLİŞİKSİZLİĞİN İNCELENMESİ**

OĞUZHAN AZARI

**Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Cenk AKYÜZ**

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi OĞUZHAN AZARI tarafından hazırlanan "Kuantum Spin Sistemlerinde Kuantum İlişiksizliğin İncelenmesi" başlıklı tez, 04.01.2021 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Doç. Dr. A. Engin ÇALIK	Ege Üniversitesi	
Üye	: Doç. Dr. Haydar UNCU	Aydın Adnan Menderes Üniv.	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Cenk AKYÜZ	Aydın Adnan Menderes Üniv.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

04.01.2021

OĞUZHAN AZARI

ÖZET

KUANTUM SPİN SİSTEMLERİNDE KUANTUM İLİŞİKSİZLİĞİN İNCELENMESİ

OĞUZHAN AZARI

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Cenk AKYÜZ
2021, 45 sayfa

Kuantum mekaniği yirminci yüzyılın en önemli bilimsel gelişmelerinden biridir. Yapısı itibariyle çok geniş ve etkileyici bir uygulama alanının teorik temelini oluşturur. Gelişmekte olan kuantum enformasyon teorisi ise günümüzde ileri sürdüğü araçlarla var olan teknolojilerin ötesine geçme konusunda ilk adımlarını atmaktadır. Kuantum durumları arasında paylaşılan özel bir ilinti olan dolaşıklık, kuantum teleportasyon, süperyoğun kodlama ve kuantum kriptoloji gibi pek çok enformasyon işleminin gerçekleştirilmesinde temel rol oynayan bir kaynaktır. Dolaşıklık olmadan bu işlemler gerçekleştirilemez. Bunun yanında dolaşıklık, kuantum ilintilerinin en genel formunu oluşturmaz. Birleşik sistemleri oluşturan alt sistemler dolaşık olmasa bile bu alt sistemler arasında kuantum ilintiler olabilmektedir. Bu önemli bir sonuçtur çünkü dolaşıklığın oluşturulması ve sürdürülebilir olması pek çok uygulamada oldukça zordur. Gerçekten de dolaşıklık, çevrenin yıkıcı etkileri nedeniyle çok çabuk bozulur. Bu nedenle alternatif kaynaklara ihtiyaç vardır. Bunlar dikkate alındığında iki veya daha fazla kısımdan oluşmuş bir kuantum durumunun dolaşık, ayrılabilir veya kuantum ilintili olup olmadığının belirlenmesi önemlidir. Kuantum ilişiksizlik, dolaşıklıktan farklı, yerel olmayan bir kuantum ilintidir. Heisenberg spin sistemleri ise dolaşıklık özellikleri sergilemektedir. Bu amaçla bu sistemlerdeki kuantum ilişiksizliklerinin de incelenmesi önem taşır. Bu nedenle bu çalışmada dört kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg spin sisteminde, kuantum ilişiksizlik hem taban durumlar hem de ısıl durumlar için sistemdeki kontrol parametreleri olarak belirlenmiş olan anizotropi parametreleri ve ikinci komşular arasındaki çiftlenim sabitine göre incelenmiştir. Elde edilen sonuçlarla birlikte kuantum ilişiksizliğin, kaynak olarak kullanılacak, dolaşıklığa alternatif bir kuantum ilinti olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Dolaşıklık, $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sistemi, Kuantum İlişiksizlik, von Neumann Entropisi.

ABSTRACT

Investigation of Quantum Discord In Quantum Spin Systems

OĞUZHAN AZARI

M.Sc. Thesis, Department of Physics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Cenk AKYÜZ
2021, 45 pages

Quantum mechanics is one of the most important scientific developments of the twentieth century. It constitutes a theoretical basis for a very broad and impressive application area in terms of its structure. The developing quantum information theory, on the other hand, takes its first steps in going beyond the existing technologies with the tools it puts forward today. Entanglement, a special correlation shared between quantum states, is a resource that plays a fundamental role in the realization of many information processes, such as quantum teleportation, super-dense coding, and quantum cryptology. These operations cannot be performed without entanglement. Besides, entanglement does not constitute the most general form of quantum correlations. Even the non-entangled states of combined systems can exhibit quantum properties as they share quantum correlations between their subsystems. This is an important result because entanglement is difficult to create and maintain in many applications. Indeed, entanglement deteriorates very quickly due to the destructive effects of the environment. Therefore, alternative sources are needed. Considering these, it is important to determine whether a quantum state of two or more parts is entangled, separable, or quantum correlated. Quantum discord is also a nonlocal quantum correlation different from entanglement. Heisenberg spin systems exhibit entanglement properties. For this purpose, it is important to examine also the quantum discord in these systems. Therefore, in this thesis, we analyzed the quantum discord in the four-qubit $J_1 - J_2$ Heisenberg spin system according to the anisotropy parameters we determined as control parameters in the system for both the ground states and the thermal states, and the coupling constant between the next nearest neighbors. We conclude that quantum discord is an alternative source such as entanglement.

Key Words: Entanglement, $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ System, Quantum Discord, von Neumann Entropy.

Önsöz

Yüksek lisans eğitim hayatımın her aşamasında bana yol gösteren, destek ve anlayışını esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Cenk AKYÜZ'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimim sırasında maddi ve manevi olarak her türlü destekte bulunan tüm aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilmekle beraber özellikle annem Meral AZARI'ya, Hamide GÜMÜŞLÜ, Buray AYDIN ve Cihan KİRPİK'e saygı ve sevgilerimi iletirim.

OĞUZHAN AZARI

İçindekiler

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
1. Giriş	1
2. Kuantum Teorisinin Bazı Kavramlarına Kısa Bir Bakış	3
2.1. Kuantum Durumları	3
2.2. İşlemciler ve Özellikleri	3
2.3. Yoğunluk İşlemcisi	5
2.4. İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcisi	6
2.5. Kuantum Ölçümleri ve İşlemleri	7
2.6. Entropi ve Karşılıklı Bilgi	7
3. Kuantum Dolaşıklık	9
3.1. Tanım	9
3.2. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Dolaşıklık	10
4. Kuantum İlintileri	12
4.1. Kuantum İlişiksizlik	13
4.2. İki Kubitlik Bir Sistemin Kuantum İlişiksizliği	15
5. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Kuantum İlişiksizlik	23
5.1. Sistemin Taban Durumlarının Kuantum İlişiksizlikleri	25
5.2. Sistemin Isısal Durumlarının Kuantum İlişiksizlikleri	29
6. Tartışma ve Sonuç	36
KAYNAKLAR	39
EKLER	42
A. Ekler	42

1.1. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Taban Durumların İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcileri	42
1.2. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Isısal Durumların İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcileri	43
ÖZGEÇMİŞ	45



SİMGELER DİZİNİ

H	: Hamiltonyen
$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$: Pauli Spin Matrisleri
k_B	: Boltzmann Sabiti
Z	: Bölüşüm Fonksiyonu
ρ	: Yoğunluk İşlemcisi
J_1, J_2	: Spinler Arasındaki Çiftlenim Sabitleri
T	: Sıcaklık
FM	: Ferromanyetik
AFM	: Antiferromanyetik
Tr	: İz
NN	: En Yakın Komşu Etkileşmesi
NNN	: İkinci En Yakın Komşu Etkileşmesi
QD	: Kuantum İlişiksizlik
CC	: Klasik İlinti
C	: Eşyumluluk
Δ_1, Δ_2	: Anizotropi Parametreleri

Şekil Listesi

Şekil 4.1.	Kuantum koşullu entropinin θ 'ya göre değişimi. $\theta \in [-1, 1]$. . .	19
Şekil 4.2.	Werner durumunun kuantum ilişiksizlik $QD(\rho)$ ve klasik ilinti $CC(\rho)$ grafiğinin c' ye göre değişimi.	20
Şekil 5.1.	Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$). . .	26
Şekil 5.2.	Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1.0$). . .	27
Şekil 5.3.	Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0.5$). . .	28
Şekil 5.4.	Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$). . .	29
Şekil 5.5.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$).	30
Şekil 5.6.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1$).	31
Şekil 5.7.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 1.0, \Delta_2 = 0.5$).	32
Şekil 5.8.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$).	32
Şekil 5.9.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$).	33
Şekil 5.10.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1$).	33
Şekil 5.11.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0.5$).	34
Şekil 5.12.	J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşuyumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$).	34

1. Giriş

20. yüzyılın başında kuantum mekaniğinin ortaya çıkmasıyla, sezgisel olarak algıladığımız doğa anlayışı değişmiştir. Bu alanın gelişmesinde çok önemli katkıları olmasına rağmen Einstein, çalışma arkadaşları Podolsky ve Rosen ile birlikte kuantum mekaniğinin bazı sonuçlarının, teorinin henüz tamamlanmamış bir teori olmasından dolayı kaynaklandığını, ünlü EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) çalışmasında bir düşünce deneyiyle ortaya koymuşlardır. Bu deneyde dolaşıklığın, yerelliği ihlal ettiğini, ışık hızının geçilemeyeceğini ve dolaşıklıkta bilgi aktarımının bu hızı geçtiğini ve bunun mümkün olamayacağını göstermeye çalışmışlardır [1]. Yine aynı makalede gizli değişkenler olduğunu öne sürmüşlerdir. Daha sonra 1964 yılında Bell, yerelliği gözeten gizli değişkenler ile bir kuantum sisteminin uyumlu olamayacağını göstermiştir [2, 3]. Aspect, 1981/82 yıllarında 3 deneyle Bell eşitsizliklerinin ihlal edildiğini göstermiş ve böylece EPR makalesiyle öne sürülen, kuantum mekaniğinin eksik olduğu iddiası ve gizli değişkenler teorisi yanlışlanmıştır [4–6]. Bu sıralarda elektronik, kriptografi, bilgi teorisi [7] ve bilgisayar bilimlerinde pek çok gelişme yaşanmıştır. Kuantum bilgisayar [8] fikrinin ortaya atılmasıyla, kuantum enformasyon ve hesaplama [9] alanında çok önemli çalışmalar yapılmıştır.

Bir kuantum bilgisayarının, donanımsal olarak kuantum mekaniğinin temel özelliklerini kullanarak işlem yapması gerekmektedir. Bu nedenle bu özelliklerin pratikte uygulanabilmesi ve kontrol edilebilmesi gereklidir. Bu konuda ilk başlarda teorik olarak çeşitli çalışmalar yapılmış ve ardından çeşitli uygulamalar gösterilmiştir [10–12]. Bu çalışmalarda, keşfinden sonra uzun bir süre boyunca, kuantum mekaniğinin en tuhaf ve en popüler kavramı olan dolaşıklık kullanılmıştır. Dolaşıklık temel alınarak kuantum kriptografi (quantum cryptography) [13], kuantum yoğun kodlama (quantum dense coding) [14], kuantum teleportasyon

(quantum teleportation) [15] gibi kuantum hesaplama ve enformasyon alanının en önemli çalışmalarıyla birlikte, pratikte uygulanabilecek bir bilgisayar fikri daha da geliştirilmiştir. Buna paralel olarak dolaşıklığın tek ve biricik kuantum ilintisi olmadığı, başka kuantum ilintilerinin de olduğu fikri ortaya çıkmıştır. Tüm bu gelişmelerle beraber kuantum mekaniğinin temel özelliklerine dayanılarak oluşturulacak kuantum bilgisayarların, klasik bilgisayarlara oranla çok daha güvenli ve üssel (exponential) olarak artan bir hesaplama gücüne sahip olduğu gösterilmiştir [16, 17]. Bu yüzden bilgi çağının en büyük sorunlarından olan bilişim güvenlik ve artan hesaplama gücü talebiyle birlikte pratikte kullanılabilir kuantum bilgisayar yapma çalışmaları büyük ivme kazanmıştır. Kuantum bilgisayarlarını işletebilmek için parçacıkların dolaşıklığına ihtiyaç vardır. Ancak dolaşıklık dış koşullardan çok çabuk etkilendiği için pratikte oluşturulması ve muhafaza edilmesi oldukça zordur. Bu yüzden kuantum bilgisayarların laboratuvar koşullarında ve özel şartlarda çalıştırılan basit halleri oluşturulmuştur. Günümüzde büyük şirketlerin birçoğu kuantum bilgisayarları bu şekilde oluşturup, üzerinde çalışmalar yapmaktadırlar. İşte bu tüm bu zorluklar ve yüksek maliyet nedeniyle diğer kuantum ilintileri üzerine yapılan çalışmalar da artmaya başlamıştır. Zurek 2000 yılında yayınladığı bir çalışma ile kuantum ilişiksizlik (quantum discord) olarak adlandırdığı bir tür kuantum ilintiden bahsetmiştir [18]. Kuantum ilişiksizlik üzerine yapılan çalışmalar sonucu, kuantum ilişiksizliğin dış etkilere maruz kaldığında dolaşıklığa göre daha dayanıklı olduğu ve dolaşıklıktan daha genel ve temel bir kuantum ilinti olduğu fikri yaygınlaşmaya başlamıştır. Bu tez çalışmasında, kuantum ilişiksizlik ve dolaşıklık arasındaki farklılıkları incelemek amacıyla, seçilmiş olan dört kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sistemine ait kuantum ilişiksizlik değerleri ve dolaşıklık ölçütü olan eşyumluluk (concurrence) değerleri, sistemin içerdiği değişkenlerin seçilmiş bazı değerleri üzerinden nümerik olarak hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır.

2. Kuantum Teorisinin Bazı Kavramlarına Kısa Bir Bakış

2.1. Kuantum Durumları

Kuantum mekaniğinde, bir fiziksel sistem $|\psi\rangle$ gibi bir durum vektörüyle tanımlanır. Bu vektör Hilbert \mathcal{H} uzayına ait bir vektördür. İki boyutlu Hilbert uzayındaki bir sistem kubit olarak da adlandırılır. Eğer sistem $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ olası durumların süperpozisyonu durumundaysa

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle, \quad (2.1)$$

olarak ifade edilir. Burada a_1 ve a_2 karmaşık sayılardır ve olasılık genliği olarak isimlendirilirler. Süperpozisyon kuantum teorisinin en temel özelliklerinin başında gelmektedir. Kuantum mekaniğinde fiziksel bir sistem gözlemlenmediği sürece, olası tüm durumlarının toplamı şeklinde ifade edilir. Gözlemlendiği zaman bu olası durumlardan herhangi bir tanesi, olasılık genliğinin karesi ihtimali ile gerçekleşir. Dolayısıyla olası tüm durumların olasılıkları toplamının 1 olması gerekir. Çünkü gözlemlediğimizde bu olası durumlardan birisi muhakkak gerçekleşmelidir. Bu nedenle her zaman $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ eşitliği sağlanmalıdır.

Bir kuantum sistemi, iki veya daha fazla alt sistemden oluşabilir. Dolayısıyla bu kuantum sistemi, alt sistemlerin etkileşimi ile ifade edilmelidir. Bu alt sistemler genel olarak Alice (\mathcal{A}) ve Bob (\mathcal{B}) olarak sembolize edilmiştir.

2.2. İşlemciler ve Özellikleri

İşlemciler ve özellikleri, yapılacak olan işlemler için çok önemlidir. Çünkü fiziksel gözlemlenirler yani ölçülebilen şeyler, doğrusal işlemcilerle temsil edilirler. Bir işlemci durum vektörü üzerine etki eder ve yeni bir durum vektörü üretir. Örneğin

A işlemcisi $|\Psi\rangle$ durumu üzerine etki ettiğinde;

$$A|\Psi\rangle = |C\rangle, \quad (2.2)$$

olarak yeni bir durum vektörü üretmiş olur.

Kuantum mekaniğinde işlemciler gözlenebilirleri temsil ettiğinden, bir gözlenebilirin değeri ölçüldüğünde, elde edilebilecek olası sonuçlar işlemcinin özdeğerleridir ve sonuç daima gerçel sayıdır. Buradan da anlaşılacağı üzere bir gözlenebilir, bazı özelliklere sahip işlemcilerle temsil etmek gerekir. Fiziksel olarak anlamlı ve tutarlı sonuçlar elde edebilmek adına bu önemlidir. Bu yüzden doğrusal ve hermitik olmalıdırlar.

Doğrusal bir işlemci, $A|\Psi\rangle = |C\rangle$ ise $|\Psi\rangle, |C\rangle \in \mathcal{H}$ olmak üzere;

- $Az|\Psi\rangle = z|C\rangle, z \in \mathbb{C},$
- $A(|\Psi\rangle + |C\rangle) = A|\Psi\rangle + A|C\rangle,$

özelliklerini sağlar. Hermitik işlemci ise hermitik eşleniği kendisine eşit olan işlemcilere denir. Yani;

$$P = P^\dagger, \quad (2.3)$$

eşitliğini sağlayan P işlemcisi hermitiktir. Eğer $P|A\rangle = |B\rangle$ ise, $\langle A|P^\dagger = \langle B|$ olur.

Dolayısıyla

- $P = P^\dagger,$
- özdeğerleri gerçeldir.

Ayrıca bir işlemci üniter ise $PP^\dagger = P^\dagger P = \mathbb{I}$ eşitliğini gösterir.

2.3. Yoğunluk İşlemcisi

Fiziksel bir sistem üzerinde işlem yapılmak istendiğinde öncelikle o sistemin karakterize edilmesi gerekir. Kuantum mekaniksel bir sistem, belirli bir an için sistemin durum vektörünü hazırlama imkanı vermez çünkü bunu yapabilmek için, bir gözlenebilir kümesine karşılık gelen bir dizi ölçüm yapmak gerekir. Ancak sistem üzerine yapılacak herhangi bir ölçüm, sistemin mevcut durumunu değiştireceği için gözlenebilir kümesine karşılık gelen bir dizi ölçüm yapmak imkansızdır. İşte yoğunluk işlemcisi burada devreye girer. Kuantum sistemlerinin istatistiksel tanımında kullanılan yoğunluk işlemcisi, klasik sistemlerin istatistiksel tanımındaki olasılık dağılım fonksiyonunun işlevini görür [19]. Dolayısıyla yoğunluk işlemcisi bir kuantum sisteminin durumunun dalga fonksiyonuna alternatif bir temsildir.

Yoğunluk işlemcisini matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, $|\Psi\rangle$ dalga fonksiyonunun ve dualinin dış çarpımı olarak yazılır;

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (2.4)$$

Ayrıca yoğunluk işlemcisinin sağlaması gereken özellikler;

- $\rho^2 = \rho$,
- $\rho^\dagger = \rho$,
- $Tr[\rho] = 1$,
- $\rho \geq 0$,

olarak verilir.

2.4. İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcisi

Birleşik sistemlerde alt sistemlerin kendilerine ait yoğunluk işlemcilerine ihtiyaç duyulabilir. Sistemin yoğunluk işlemcisi ρ^A ise, alt sistemlerin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri,

$$\rho^A = Tr_B[\rho^{AB}], \quad \rho^B = Tr_A[\rho^{AB}],$$

olarak ifade edilir. Burada kısmi iz uygulanmıştır. Çünkü birleşik sistemlere ait alt sistemlerin yoğunluk işlemcilerine ulaşmak için kısmi iz uygulanması gerekir. Alice (A) ve Bob (B)'a ait birleşik bir Bell durumunu ele alınp, alt sistemlere ait kubitleri gösterecek şekilde yazılırsa,

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle).$$

Bu ifade birleşik bir sistem olduğu için, şu şekilde de yazılabilir;

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle - |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle).$$

Birleşik sistemin yoğunluk işlemcisi;

$$\begin{aligned} \rho^{AB} &= |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| \\ &= \frac{1}{2} [|0_A 0_B\rangle \langle 0_A 0_B| - |0_A 0_B\rangle \langle 1_A 1_B| - |1_A 1_B\rangle \langle 0_A 0_B| + |1_A 1_B\rangle \langle 1_A 1_B|], \end{aligned} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Alt sistem B' nin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi,

$$\rho^B = Tr_A(\rho^{AB}) = \langle 0_A | \rho^{AB} | 0_A \rangle + \langle 1_A | \rho^{AB} | 1_A \rangle,$$

işlemi uygulanarak elde edilir. A sistemi üzerinden kısmi iz alındığında B sisteminin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi, B sistemi üzerinden kısmi iz alındığında ise A sisteminin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi bulunur. Bu Bell durumu üzerinden işleme devam edilirse $\rho^B = \frac{1}{2}\mathbb{I}$ olarak bulunur. Aynı şekilde benzer işlemler yapıldığında da $\rho^A = \frac{1}{2}\mathbb{I}$ olarak bulunur.

2.5. Kuantum Ölçümleri ve İşlemleri

Kuantum teorisindeki en önemli konulardan birisi de ölçme işlemidir. $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ gibi bir kuantum durumunda yukarı spin(\uparrow) ve aşağı spin(\downarrow) ölçme olasılığı; $p(\uparrow) = |a|^2$, $p(\downarrow) = |b|^2 = 1 - p(\uparrow)$ ifadeleriyle hesaplanır. Ölçme sonrası sistem $|\uparrow\rangle$ veya $|\downarrow\rangle$ durumuna çöker. Ölçme işlemcileri kümesi $\{E_i\}$ olarak tanımlanır. Bu işlemcilerin tamlık denklemini (completeness) $\sum_i E_i^\dagger E_i = \mathbb{I}$ sağlamaları gerekir. Yoğunluk işlemcisi ρ olan, ölçme işlemcileri kümesi $\{E_i\}$ olarak tanımlanan bir durumun i sonucunun olasılığı;

$$p_i = \text{Tr}[E_i^\dagger E_i \rho], \quad (2.6)$$

i sonucuna varılan ölçme sonrası sistemin yoğunluk işlemcisi;

$$\rho_i = \frac{1}{p_i} (E_i \rho E_i^\dagger), \quad (2.7)$$

olarak ifade edilir.

A ve B gibi iki alt sistemden oluşan birleşik bir sistem üzerinde yerel olarak ölçme yapmak mümkündür. Eğer A üzerinde yerel ölçme yapılırsa B alt sistemi değişikliğe uğramaz. Ölçme işlemcisi $E_i = E_i^A \otimes \mathbb{I}^B$ olarak tanımlanır. Eğer B üzerine yerel ölçme yapılırsa bu kez sistem $E_i = \mathbb{I}^A \otimes E_i^B$ olur.

2.6. Entropi ve Karşılıklı Bilgi

Herhangi bir kuantum durumunun entropisi, klasik olarak bilinen Shannon entropisinin kuantum versiyonu olan von Neumann entropisi ile bulunur. Yoğunluk işlemcisiyle ifade edilen bir kuantum durumunun von Neumann entropisi;

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho], \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Burada yoğunluk işlemcisinin 2 tabanında logaritması bulunacaktır. Özdeğerleri λ ve özvektörleri $|i\rangle$ olan yoğunluk işlemcisinin 2 tabanında

logaritması;

$$\log_2 \rho = \sum_i \log_2(\lambda_i |i\rangle \langle i|), \quad (2.9)$$

olarak bulunur. Buradan von Neumann entropisi;

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2(\lambda_i), \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. Saf kuantum durumunun (pure state) entropisi sistem hakkındaki tüm bilgiyi sunar. Böyle bir durumun von Neumann entropisi sıfırdır. İki alt sistem için karşılıklı bilgi (mutual information) vardır. Tüm sistemin yoğunluk işlemcisi ρ^{AB} ise, karşılıklı bilgi;

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}), \quad (2.11)$$

olarak bulunur. Eğer hiç bir ilişki yoksa ($\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$) karşılıklı bilgi sıfırdır. Aksi halde karşılıklı bilgi sıfırdan büyüktür. Ayrıca von Neumann entropisi ile yakından ilişkili olan kuantum göreceli entropi (quantum relative entropy) olarak isimlendirilen entropi çeşidi de vardır. Kuantum göreceli entropiyi tanımlamak için ρ ve σ olarak iki farklı yoğunluk işlemcisi tanımlanmış olsun. Buna göre kuantum göreceli entropi;

$$S(\rho||\sigma) = Tr[\rho \log_2 \rho] - Tr[\rho \log_2 \sigma], \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. Kuantum göreceli entropi pozitifdir. $\rho = \sigma$ ise $S(\rho||\sigma) = 0$ olur. Aynı zamanda karşılıklı bilgi $I(\rho^{AB}) = S(\rho^{AB}||\rho^A \otimes \rho^B)$ olarak yazılabilir.

3. Kuantum Dolaşıklık

3.1. Tanım

Bir kuantum sistemi, kendisini oluşturan alt sistemlerin birleşimi ise, yani bu sistemlerden herhangi birisi üzerine yapılan bir ölçüm ile diğer kuantum sistemi hakkında bilgi edilebiliyorsa, bu alt sistemler birleşik bir sistem oluşturmaktadırlar ve dolaşık (entangled) olarak ifade edilirler. Tersini durumda ise bu alt sistemler ayrılabilir (seperable) olarak ifade edilirler. Hilbert uzayına ait A ve B gibi iki yerel kuantum durumuyla ifade edilen toplam kuantum durumu $|\Psi\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle$ şeklinde tanımlanıyorsa, bu dolaşık olmayan (ayrılabilir) bir sistemdir. Dolaşık bir kuantum sistemi ise H_A ve H_B Hilbert uzaylarında tanımlanan iki alt sistemin birleşik bir $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ uzayının elemanıdır. Yani;

$$|\Psi_A\rangle \in H_A,$$

$$|\Psi_B\rangle \in H_B,$$

$$|\Psi\rangle \in H_{AB},$$

olarak tanımlandığında;

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle : \quad \text{ayrılabilir,}$$

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle : \quad \text{dolaşık,}$$

olarak tanımlanır. Karışık kuantum durumları (mixed states) için ise yoğunluk işlemcisi;

$$\rho_{sep} = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|, \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebiliyorsa ayrılabilir. Aksi takdirde dolaşıktır.

İki kubitlik bir kuantum sistem

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |0\rangle \otimes |0\rangle + \sin \theta |1\rangle \otimes |1\rangle, \quad (3.2)$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu sistem farklı θ değerleri için incelendiğinde, $\theta = 0$ ya da π olursa $|\psi\rangle = \pm |0\rangle \otimes |0\rangle$ ($\sin 0 = 0, \sin \pi = 0$) gibi iki farklı durum olarak ifade edilebildiği için dolaşık olmayacaktır. Aynı şekilde $\theta = \pi/2$ ya da $3\pi/2$ olursa, bu kez $|\psi\rangle = \pm |1\rangle \otimes |1\rangle$ olur. Bu şekilde de ayrılabilir bir kuantum durumu oluşacaktır. Bu değerlerden farklı bir θ değeri $|\psi\rangle$ durumunu dolaşık hale getirir. Dolayısıyla ayrılabilir bir sistemi dolaşık hale getirmek ya da dolaşık bir sistemi ayrılabilir hale getirmek mümkündür.

Bir sistem dolaşık ise ne kadar dolaşıktır? Dolaşık bir sistemin dolaşıklığı nicel olarak bulunabilir. Bu çalışmada dolaşıklığın ölçütü olarak eşyumluluk (concurrence) kullanılacaktır.

3.2. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Dolaşıklık

Eşyumluluk hesaplamak için;

$$R = \rho(\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (3.3)$$

olan R matrisi tanımlanır. Burada σ^y Pauli spin matrisleridir. Bu matrisin özdeğerlerini bulduktan sonra, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ olacak şekilde seçildiğinde;

$$C = \max\{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0\}, \quad (3.4)$$

C eşyumluluk (concurrence) değeri bulunur. Bu da sistemin dolaşıklığının nicel değeri olur. Ek 1.1'de verilen taban durumlarının yoğunluk işlemcileri üzerinden R matrisi hesaplandığında, 1. ve 2. kubitler için taban durumu $|\Psi_{16}\rangle$ 'nin R matrisi R_{12} 'nin özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = v, \quad \sqrt{\lambda_3} = v - \omega, \quad \sqrt{\lambda_4} = v + \omega,$$

olur. Aynı şekilde 1. ve 3. kubitler için R_{13} 'ün özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = 0, \quad \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_3} = \tilde{v}, \quad \sqrt{\lambda_4} = 2\tilde{v},$$

olur. Taban durumu $|\Psi_{16}\rangle$ ve $|\Psi_{12}\rangle$ 'nin lineer kombinasyonu olduğunda, 1. ve 2. kubitler için taban durumu R_{12} 'nin özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \mu, \quad \sqrt{\lambda_3} = \delta - \varphi, \quad \sqrt{\lambda_4} = \delta + \varphi,$$

olarak bulunur. Aynı şekilde 1. ve 3. kubitler için R_{13} 'ün özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \tilde{\mu}, \quad \sqrt{\lambda_3} = \tilde{\delta} - \tilde{\varphi}, \quad \sqrt{\lambda_4} = \tilde{\delta} + \tilde{\varphi},$$

olur ve taban durumu $|\Psi_{12}\rangle$ olduğunda 1. ve 2. kubitler için R_{12} 'nin özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{\lambda_4} = \frac{1}{16},$$

ve 1. ve 3. kubitler için R_{13} 'ün özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = 1, \quad \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{\lambda_4} = 0,$$

olarak bulunur.

Yine Ek 1.1'de verilen ısısal durumların yoğunluk işlemcileri üzerinden R matrisi hesaplandığında, 1. ve 2. kubitler için R_{12} 'nin özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \frac{v_1}{Z}, \quad \sqrt{\lambda_3} = \frac{v_1 - \omega_1}{Z}, \quad \sqrt{\lambda_4} = \frac{v_1 + \omega_1}{Z},$$

olur ve 1. ve 3. kubitler için R_{13} 'ün özdeğerleri;

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{Z}, \quad \sqrt{\lambda_3} = \frac{\delta_1 - \Lambda_1}{Z}, \quad \sqrt{\lambda_4} = \frac{\delta_1 + \Lambda_1}{Z},$$

olarak bulunur [20, 21].

4. Kuantum İlintileri

Kuantum mekaniğinin en göze çarpan özelliklerinden biri, farklı kuantum sistemleri arasındaki kuantum ilintilerinin (quantum correlations) var olmasıdır. Klasik olarak baktığımızda, iki alt sisteme ayrılmış bir sistemde, alt sistemlerin enformasyonlarının toplamı tüm sistemin enformasyonuna karşılık gelmektedir. Kuantum dünyasında ise bu durum artık doğru değildir. Alt sistemlerden oluşmuş birleşik sistemlerin global kuantum durumları vardır ve bu kuantum özelliği kuantum dolaşıklık (quantum entanglement) olarak ifade edilir [22]. Kuantum dolaşıklık, kuantum teleportasyon, kuantum kriptoloji ve süper-yoğun kodlama gibi bazı enformasyon işlemlerinin gerçekleştirilmesinde bir kaynak olarak kullanılır. Ancak bunun yanında dolaşıklığın, paylaşılan kuantum sistemlerindeki tek kuantum ilintisi formu olduğu fikrine karşı gelişmeler sürmektedir. Örneğin Knill ve Laflamme [23] bir kubitlik deterministik kuantum hesaplama protokolü keşfetmişlerdir. Bu keşifteki iki parçalı sistem dolaşık değildir. Bu durum dolaşıklıktan farklı kuantum ilintisi arayışına neden olmuştur. Bunlardan biri 2000 yılında Oliver ve Zurek [24] ve aynı zamanda Henderson ve Vedral [25] tarafından önerilen ve kuantum ilişiksizlik (quantum discord) olarak bilinen bir kuantum ilintisi ölçütüdür. Bu ölçüt klasik enformasyon teorisinden kavramların kuantize edilmesi ile oluşturulmuştur.

İki parçalı kuantum sistemlerini, kuantum ilişiksizliği kavramına götüren birkaç yol vardır. Bunlar temelde iki kategoriye ayrılabilir. Bunlardan ilki, bu çalışmada da kullanılmış olan, alt sistemlerden herhangi birinin ölçmesine dayanmaktadır. Diğer kategori ise uzaklığa bağlı olan ölçmelere dayanmaktadır.

4.1. Kuantum İlişiksizlik

X ve Y gibi iki klasik rastgele değişkeni ele alalım. $X = x$ ve $Y = y$ sonuçlarını elde etmenin birleşik olasılığı $P_{x,y}$ olsun. Değişkenlerden herhangi birinin diğerine karşılıklı bağımlılığının ölçüsü, değişkenler arasındaki klasik karşılıklı enformasyondur (classical mutual information) [26],

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (4.1)$$

Burada $H(X)$ ve $H(Y)$, $P_{x,}$ ve $P_{.,y}$ marjinal dağılımlarının Shannon entropileridir (buradaki noktalar toplamların hangi değişkenler üzerinden alındığını gösterir). $H(X, Y)$ ise $P_{x,y}$ birleşik dağılımının Shannon entropisidir. (4.1) denkleminin verilen nicelik;

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (4.2)$$

ile ifade edilebilir. Burada $H(X|Y)$ koşullu entropi olup,

$$H(X|Y) = \sum_{y \in Y} P_y H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y), \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlıdır.

Klasik karşılıklı enformasyonun bu tanımlarının kuantum versiyonlarını da tanımlamak mümkündür [27]. Kuantum karşılıklı enformasyon, Shannon entropilerinin von Neumann entropileri ile değiştirilmesinden elde edilebilir. İki parçalı bir ρ^{AB} kuantum durumu için kuantum karşılıklı enformasyon

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}), \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada ρ^A ve ρ^B , A ve B alt sistemlerine ait indirgenmiş yoğunluk işlemcileridir. $S(\rho^A)$ ve $S(\rho^B)$ ise bu alt sistemlere ait von Neumann entropileridir. $S(\rho^{AB})$ 'de ρ^{AB}

yoğunluk işlemcisine ait von Neumann entropisidir. Klasik tanımına benzer olarak kuantum koşullu entropi

$$S(\rho^{AB}|\rho^B) = S(\rho^{AB}) - S(\rho^B), \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}|\rho^B), \quad (4.6)$$

olur. Burada kuantum koşullu entropisi B üzerine yapılacak ölçmeye bağlıdır ve

$$S(\rho^{AB}|\rho^B) = \sum_k p_k S(\rho^{AB}), \quad (4.7)$$

olur. Burada $\{B_k\}$ işlemcileri, sadece AB alt sistemi üzerine gerçekleştirilen von Neumann ölçmelerine karşılık gelen ölçme işlemcileridir (toplamları birim işlemci olan bir boyutlu projeksiyonlar kümesidir). Böyle bir ölçmeden sonra kuantum durumu

$$\rho_k^{AB} = \frac{1}{p_k} (I \otimes B_k) \rho^{AB} (I \otimes B_k), \quad (4.8)$$

olup $p_k = \text{Tr}[(I \otimes B_k) \rho^{AB} (I \otimes B_k)]$ şeklindedir. Böylece kuantum karşılıklı enformasyon

$$I(\rho^{AB}|\{B_k\}) = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}|\{B_k\}), \quad (4.9)$$

olur.

Henderson ve Vedral tarafından klasik ilintilerin bir ölçüsü

$$CC(\rho^{AB}) = \sup_{\{B_k\}} I(\rho^{AB}|\{B_k\}), \quad (4.10)$$

şeklinde, klasik karşılıklı enformasyonun iki kuantum versiyonu olarak tanımlanmıştır [25]. Bunlardan biri $I(\rho^{AB})$ ile gösterilen kuantum karşılıklı enformasyon, diğeri ise $CC(\rho^{AB})$ ile gösterilen ölçüm kaynaklı kuantum enformasyondur. Buna klasik ilinti (classical correlation) de denir. Kuantum karşılıklı enformasyon ile klasik ilintinin farkı ise;

$$QD(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - CC(\rho^{AB}), \quad (4.11)$$

kuantum ilişiksizlik (quantum discord) olarak isimlendirilir.

Kuantum ilişiksizlik her zaman pozitifdir, genel olarak simetrik değildir, yerel üniter işlemler altında değişmezdir.

4.2. İki Kubitlik Bir Sistemin Kuantum İlişiksizliği

İki kubitlik bir sistem için yoğunluk işlemcisi ρ^{AB} ,

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j^A \otimes \sigma_j^B), \quad (4.12)$$

şeklinde olup burada $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli işlemcileridir. Burada $c_j \in \mathbb{R}$ ve \mathbb{I} birim işlemcidir. ρ^{AB} 'yi matris formunda yazarsak

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+c_3 & 0 & 0 & c_1-c_2 \\ 0 & 1-c_3 & c_1+c_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & 1-c_3 & 0 \\ c_1-c_2 & 0 & 0 & 1+c_3 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

olur. Bu yoğunluk matrisinin özdeğerlerini hesapladığımız zaman,

$$\lambda_0^{AB} = \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3), \quad (4.14)$$

$$\lambda_1^{AB} = \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3), \quad (4.15)$$

$$\lambda_2^{AB} = \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3), \quad (4.16)$$

$$\lambda_3^{AB} = \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3), \quad (4.17)$$

olarak bulunur. İndirgenmiş yoğunluk matrisleri $\rho^A = Tr_B(\rho^{AB})$ ve $\rho^B = Tr_A(\rho^{AB})$ şeklinde olup, $\rho^A = \rho^B = \frac{\mathbb{I}}{2}$ olarak elde edilir.

Kuantum karşılıklı enformasyonu bulmak için A ve B alt sistemlerin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri kullanılarak von Neumann entropileri hesaplanmalıdır. Bu alt sistemlerin von Neumann entropileri;

$$S(\rho^A) = -Tr(\rho^A \log_2 \rho^A) = -\sum_i \lambda_i^A \log_2 \lambda_i^A,$$

$$S(\rho^B) = -Tr(\rho^B \log_2 \rho^B) = -\sum_i \lambda_i^B \log_2 \lambda_i^B,$$

şeklindedir. Buradaki λ_i^A ve λ_i^B indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin özdeğerleridir. Bu durumda özdeğerler $\lambda_i^A = \lambda_i^B = \frac{1}{2}$ ($i = 0, 1$) olarak bulunur ve böylece von Neumann entropileri;

$$S(\rho^A) = S(\rho^B) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1, \quad (4.18)$$

olarak bulunur. Tüm sistemin yoğunluk işlemcisine ait von Neumann entropisi $S(\rho^{AB})$ olduğundan kuantum karşılıklı enformasyon

$$I(\rho^{AB}) = 2 + \sum_{i=0}^3 \lambda_i^{AB} \log_2 \lambda_i^{AB}, \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Böylece kuantum ilişiksizliğin bulunabilmesi için elde edilmesi gereken ifadelerden biri olan kuantum karşılıklı enformasyon (4.19) denkleminde bulunmuştur. Şimdi diğer bir ifade olan klasik ilintinin de bulunması gerekiyor. Bunun için öncelikle (4.10) denkleminde de görüldüğü üzere (4.9) ifadesinin bulunması gerekiyor.

B alt sistemi üzerine etki eden yerel bir ölçme

$$\Pi_k = |k\rangle \langle k|, (k = 0, 1), \quad (4.20)$$

olsun. B alt sistemi için von Neumann ölçmesi ise

$$B_k = V \Pi_k V^\dagger, (k = 0, 1), \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $V \in U(2)$ olan herhangi bir üniter işlemcidir ve

$$V = t\mathbb{I} + i\vec{y}\vec{\sigma}, \quad (4.22)$$

olarak yazılabilir ve $t \in \mathbb{R}$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, olmak üzere

$$t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \quad (4.23)$$

koşulunu sağlar. B_k ölçmesinden sonra yoğunluk işlemcisi

$$\rho_k^{AB} = \frac{1}{p_k} (\mathbb{I} \otimes B_k) \rho^{AB} (\mathbb{I} \otimes B_k), \quad (4.24)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda yoğunluk işlemcisi p_k olasılığıyla ρ_0 ve ρ_1 olarak ifade edilir. B alt sistemi üzerine yerel olarak yapılan ölçüm sistemin bütününe etkiler. Olasılıklar ise $p_k = Tr[(\mathbb{I} \otimes B_k)\rho^{AB}(\mathbb{I} \otimes B_k)]$ şeklinde bulunur. (4.24) denkleminde

$$\begin{aligned} p_k \rho_k^{AB} &= (\mathbb{I} \otimes B_k)\rho^{AB}(\mathbb{I} \otimes B_k) \\ &= [\mathbb{I} \otimes (V\Pi_k V^\dagger)]\rho^{AB}[\mathbb{I} \otimes (V\Pi_k V^\dagger)], \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak yazılır. (4.12) denklemini yerine koyup düzenlendiğinde denklemin son hali

$$p_k \rho_k = \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes V)(\mathbb{I} \otimes \Pi_k) \left(\mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j \otimes (V^\dagger \sigma_j V) \right) (\mathbb{I} \otimes \Pi_k) (\mathbb{I} \otimes V^\dagger), \quad (4.26)$$

olur.

$$V^\dagger \sigma_1 V = (t^2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)\sigma_1 + 2(ty_3 + y_1y_2)\sigma_2 + 2(-ty_2 + y_1y_3)\sigma_3, \quad (4.27)$$

$$V^\dagger \sigma_2 V = 2(-ty_3 + y_1y_2)\sigma_1 + (t^2 - y_1^2 + y_2^2 - y_3^2)\sigma_2 + 2(ty_1 + y_2y_3)\sigma_3, \quad (4.28)$$

$$V^\dagger \sigma_3 V = 2(ty_2 + y_1y_3)\sigma_1 + 2(-ty_1 + y_2y_3)\sigma_2 + (t^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2)\sigma_3, \quad (4.29)$$

yazılabilir. Ayrıca $\Pi_0 \sigma_3 \Pi_0 = \Pi_0$, $\Pi_1 \sigma_3 \Pi_1 = -\Pi_1$, ve $j=0,1$ ve $k=1,2$ için $\Pi_j \sigma_k \Pi_j = 0$ eşitlikleri kullanılır. p_0 ve p_1 olasılık değerleri

$$\begin{aligned} p_0 &= Tr[(\mathbb{I} \otimes V\Pi_0 V^\dagger)\rho^{AB}(\mathbb{I} \otimes V\Pi_0 V^\dagger)], \\ p_1 &= Tr[(\mathbb{I} \otimes V\Pi_1 V^\dagger)\rho^{AB}(\mathbb{I} \otimes V\Pi_1 V^\dagger)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

olup, $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ olarak bulunur. Olasılıkları (4.26) denkleminde yerlerine yazıp,

$$z_1 := 2(-ty_2 + y_1y_3), \quad (4.31)$$

$$z_2 := 2(ty_1 + y_2y_3), \quad (4.32)$$

$$z_3 := (t^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2), \quad (4.33)$$

tanımlarını yaptıktan sonra

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + c_1 z_1 \sigma_1 + c_2 z_2 \sigma_2 + c_3 z_3 \sigma_3) \otimes (V\Pi_0 V^\dagger), \quad (4.34)$$

ve

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - c_1 z_1 \sigma_1 - c_2 z_2 \sigma_2 - c_3 z_3 \sigma_3) \otimes (V \Pi_1 V^\dagger), \quad (4.35)$$

olarak bulunur.

ρ_0 ve ρ_1 yoğunluk işlemcilerinin özdeğerleri;

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{c_1^2 z_1^2 + c_2^2 z_2^2 + c_3^2 z_3^2}), \quad (4.36)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{c_1^2 z_1^2 + c_2^2 z_2^2 + c_3^2 z_3^2}), \quad (4.37)$$

olarak bulunur. Şimdi ise

$$\theta := \sqrt{c_1^2 z_1^2 + c_2^2 z_2^2 + c_3^2 z_3^2}, \quad (4.38)$$

tanımlaması yapıлып, (2.8) denklemi kullanılarak

$$S(\rho_0) = S(\rho_1) = -\frac{1-\theta}{2} \log_2\left(\frac{1-\theta}{2}\right) - \frac{1+\theta}{2} \log_2\left(\frac{1+\theta}{2}\right), \quad (4.39)$$

bulunur. Böylelikle

$$S(\rho^{AB}|\{B_k\}) = p_0 S(\rho_0) + p_1 S(\rho_1) = \frac{1}{2} S(\rho_0) + \frac{1}{2} S(\rho_1), \quad (4.40)$$

olur ve sonuç olarak

$$S(\rho^{AB}|\{B_k\}) = -\frac{1-\theta}{2} \log_2\left(\frac{1-\theta}{2}\right) - \frac{1+\theta}{2} \log_2\left(\frac{1+\theta}{2}\right), \quad (4.41)$$

bulunur. (4.18) denklemlerinde bulunan sonuçlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I(\rho^{AB}|\{B_k\}) &= S(\rho^A) - S(\rho^{AB}|\{B_k\}) \\ &= 1 + \frac{1-\theta}{2} \log_2\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + \frac{1+\theta}{2} \log_2\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1-\theta}{2} \log_2(1-\theta) + \frac{1+\theta}{2} \log_2(1+\theta), \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$ olduğu görülür. Ayrıca

$$c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}, \quad (4.43)$$

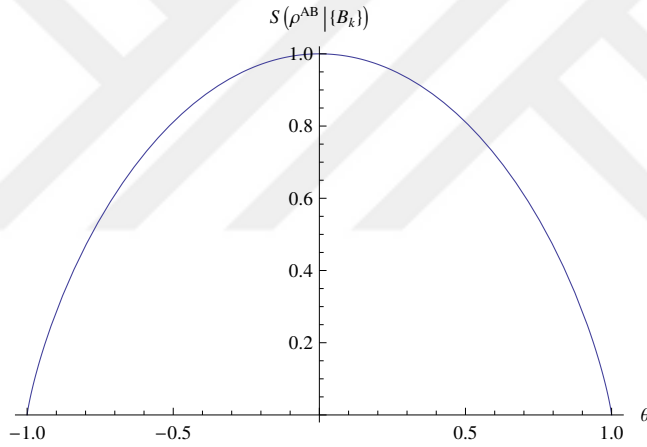
olarak seçilirse, her zaman

$$\theta \leq \sqrt{|c^2|(|z_1^2| + |z_2^2| + |z_3^2|)} = c, \quad (4.44)$$

yazılabilir ve buradan görüldüğü üzere θ için supremum

$$\sup_{B_k} \theta = \sup_V \theta = c, \quad (4.45)$$

olarak bulunur. (4.41)'de, kuantum koşullu entropi $S(\rho^{AB}|\{B_k\})$ sıfırdan küçük



Şekil 4.1. Kuantum koşullu entropinin θ 'ya göre değişimi. $\theta \in [-1, 1]$.

olabilir gibi gözükmemektedir. Ancak entropi sıfırdan küçük olamaz. Şekil 4.1'de $\theta \in [-1, 1]$ için kuantum koşullu entropinin her zaman pozitif olduğu görülmektedir. (4.10) denkleminde θ için bulunan sonuç yerine yazılırsa klasik ilinti

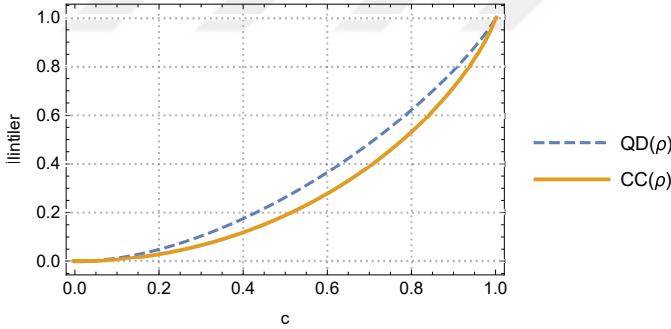
$$CC(\rho^{AB}) = \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) + \frac{1+c}{2} \log_2(1+c), \quad (4.46)$$

olarak elde edilir.

Artık (4.11) denkleminde bulunan kuantum karşılıklı enformasyon $I(\rho^{AB})$ ve klasik ilinti $CC(\rho^{AB})$ yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 QD(\rho^{AB}) &= I(\rho^{AB}) - CC(\rho^{AB}) & (4.47) \\
 &= \frac{1}{4} \left[(1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \right. \\
 &\quad + (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \\
 &\quad + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) \\
 &\quad + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\
 &\quad \left. - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) \right],
 \end{aligned}$$

olarak kuantum ilişiksizlik bulunur [28].



Şekil 4.2. Werner durumunun kuantum ilişiksizlik $QD(\rho)$ ve klasik ilinti $CC(\rho)$ grafiğinin c 'ye göre değişimi.

Bazı özel durumların kuantum ilişiksizliğini hesaplamak için yoğunluk işlemcisi ρ^{AB} 'nin elemanlarını belirleyen c_1 , c_2 ve c_3 katsayıları için belirli bazı değerler seçmek gerekir. Çünkü yoğunluk işlemcisi ρ^{AB} 'nin, kuantum ilişiksizliği hesaplanmak istenen özel durumun yoğunluk işlemcisine eşit olması gerekir. Bu nedenle eğer $c_1 = c_2 = c_3 = -c$ olarak seçilirse, yoğunluk işlemcisi

$$\rho = (1-c) \frac{\mathbb{I}}{4} + c |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|, \quad (4.48)$$

olarak ifade edilir ($c \in [0, 1]$). Bu durum, Werner durumu [29] olarak bilinen özel bir durumdur. Burada $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ şeklindeki bir durumdur. Bu

durumun kuantum ilişiksizliğini bulmak için seçilen değerler yerine koyulduğunda kuantum karşılıklı enformasyon ve klasik ilinti;

$$I(\rho) = \frac{3(1-c)}{4} \log_2(1-c) + \frac{1+3c}{4} \log_2(1+3c), \quad (4.49)$$

$$CC(\rho) = \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) + \frac{1+3}{2} \log_2(1+c), \quad (4.50)$$

olarak bulunur. Böylece Werner durumu için kuantum ilişiksizlik ise

$$QD(\rho) = \frac{1-c}{4} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) + \frac{1+3c}{4} \log_2(1+3c), \quad (4.51)$$

olarak bulunur. Şekil 4.2'de Werner durumu için kuantum ilişiksizliği QD'nin c 'ye göre değişimi görülmektedir. Burada c 'nin değişimi Werner durumunun bir Bell durumuyla ne kadar örtüştüğünü ifade etmektedir. Eğer c değeri 1 olursa Werner durumu Bell durumuyla tamamen örtüşmektedir. Ancak c değeri 0 olduğunda Werner durumu ayrılabilir bir durum olmaktadır. Dolayısıyla Bell durumuyla örtüşmemektedir. Ayrıca yine Şekil 4.2'de görüldüğü gibi kuantum ilişiksizlik değeri, tanımı gereği, her zaman klasik ilinti değerinden büyük olmaktadır. Eğer $c_1 = c_3 = 1$ ve $c_2 = -1$ olarak seçilirse, yoğunluk işlemcisi

$$\rho = |\phi^+\rangle \langle \phi^+|, \quad (4.52)$$

olur ve bu $|\phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ olan bir Bell durumudur. Seçilen c_1, c_2, c_3 katsayıların mutlak değerlerinin maksimumu 1 olur ve $c = 1$ olarak seçilir. Tüm bu değerlere göre kuantum ilişiksizlik, klasik ilinti ve eşyumluluk hesaplandığında

$$QD(\rho) = 1, \quad CC(\rho) = 1, \quad C(\rho) = 1,$$

olarak bulunur. Eğer $c_1 = -1, c_2 = c_3 = 1$ olarak seçilirse, yoğunluk işlemcisi

$$\rho = |\phi^-\rangle \langle \phi^-|, \quad (4.53)$$

olur ve bu $|\phi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$ olan bir Bell durumudur. Görüldüğü üzere yine $c = 1$ olur ve

$$QD(\rho) = 1, \quad CC(\rho) = 1, \quad C(\rho) = 1,$$

olarak elde edilir. Eğer $c_1 = c_2 = 1, c_3 = -1$ olarak seçilirse, yoğunluk işlemcisi

$$\rho = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|, \quad (4.54)$$

olur ve bu $|\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$ olan bir Bell durumudur. Görüldüğü üzere $c = 1$ olur ve

$$QD(\rho) = 1, \quad CC(\rho) = 1, \quad C(\rho) = 1,$$

olarak elde edilir. Eğer $c_1 = c_2 = c_3 = -1$ olarak seçilirse, yoğunluk işlemcisi

$$\rho = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|, \quad (4.55)$$

olur ve bu $|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$ olan bir Bell durumudur. Görüldüğü üzere $c = 1$ olur ve

$$QD(\rho) = 1, \quad CC(\rho) = 1, \quad C(\rho) = 1,$$

olarak elde edilir. Tüm Bell durumları için kuantum ilişiksizlik, klasik ilinti ve eşyumluluk eşit ve maksimum değer olan 1 olarak bulunur.

5. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Kuantum İlişiksizlik

Dört kubitlik anizotropik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ spin sisteminin Hamiltonyeni

$$H = J_1 \sum_{i=1}^4 (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta_1 \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + J_2 \sum_{i=1}^4 (\sigma_i^x \sigma_{i+2}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+2}^y + \Delta_2 \sigma_i^z \sigma_{i+2}^z), \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır. i 'nci kubitin Pauli işlemcileri σ_i^k ($k = x, y, z$) ve sınır koşulları $\sigma_{i+1} = \sigma_1$ ve $\sigma_{i+2} = \sigma_2$ olarak kabul edilsin. J_1 ve J_2 çiftlenim sabitleri olup $J_1, J_2 > 0$ antiferromanyetik (AFM) duruma karşılık gelir, $J_1, J_2 < 0$ ise ferromanyetik duruma (FM) karşılık gelmektedir ve sırasıyla en yakın komşu (NN) ve sonraki en yakın komşu (NNN) kubitleri arasındadır. Δ_1 ve Δ_2 ise z yönündeki sırasıyla NN ve NNN kubitleri arasındaki anizotropi parametreleridir.

H Hamiltonyenin özdeğerleri ise

$$E_1 = E_2 = -4J_1 + 4J_2, \quad (5.2)$$

$$E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = -4J_2, \quad (5.3)$$

$$E_7 = E_8 = 4(J_1 + J_2), \quad (5.4)$$

$$E_9 = E_{10} = -4J_2\Delta_2, \quad (5.5)$$

$$E_{11} = -4J_1\Delta_1 + 4J_2\Delta_2, \quad (5.6)$$

$$E_{12} = -4J_2(2 + \Delta_2), \quad (5.7)$$

$$E_{13} = E_{14} = 4(J_1\Delta_1 + J_2\Delta_2), \quad (5.8)$$

$$E_{15} = 4J_2 - 2J_1\Delta_1 + \gamma, \quad (5.9)$$

$$E_{16} = -4J_2 - 2J_1\Delta_1 - 2\gamma, \quad (5.10)$$

olarak bulunur. Burada

$$\gamma = \sqrt{J_1^2(8 + \Delta_1^2) - 4J_1J_2\Delta_1(-1 + \Delta_2) + 4J_2^2(-1 + \Delta_2)^2}, \quad (5.11)$$

olarak tanımlanır. Hamiltonyenin standart bazdaki özvektörleri ise

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}[-|0111\rangle + |1011\rangle - |1101\rangle + |1110\rangle], \quad (5.12)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}[-|0001\rangle + |0010\rangle - |0100\rangle + |1000\rangle], \quad (5.13)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|1011\rangle + |1110\rangle], \quad (5.14)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0111\rangle + |1101\rangle], \quad (5.15)$$

$$|\Psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0010\rangle + |1000\rangle], \quad (5.16)$$

$$|\Psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0001\rangle + |0100\rangle], \quad (5.17)$$

$$|\Psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0111\rangle + |1011\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle], \quad (5.18)$$

$$|\Psi_8\rangle = \frac{1}{2}[|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle], \quad (5.19)$$

$$|\Psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0011\rangle + |1100\rangle], \quad (5.20)$$

$$|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0110\rangle + |1001\rangle], \quad (5.21)$$

$$|\Psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-|0101\rangle + |1010\rangle], \quad (5.22)$$

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{2}[|0011\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + |1100\rangle], \quad (5.23)$$

$$|\Psi_{13}\rangle = |1111\rangle, \quad (5.24)$$

$$|\Psi_{14}\rangle = |0000\rangle, \quad (5.25)$$

$$|\Psi_{15}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_1^2}}[|0011\rangle + \xi_1|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + \xi_1|1010\rangle + |1100\rangle], \quad (5.26)$$

$$|\Psi_{16}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\xi_2^2}}[|0011\rangle + \xi_2|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + \xi_2|1010\rangle + |1100\rangle], \quad (5.27)$$

olarak bulunur ve burada

$$\xi_1 = \frac{2J_2(-1 + \Delta_2) - J_1\Delta_1 + \gamma}{2J_1}, \quad (5.28)$$

$$\xi_2 = \frac{2J_2(-1 + \Delta_2) - J_1\Delta_1 - \gamma}{2J_1}, \quad (5.29)$$

olarak tanımlanmıştır.

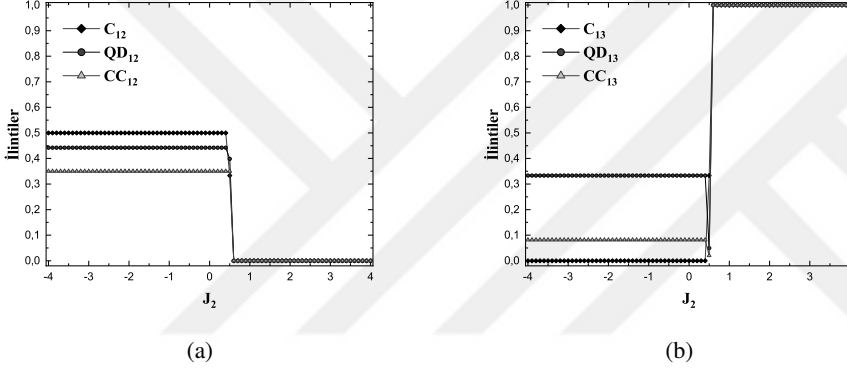
Bu özdeğerler ve özvektörler ile ek kısımda belirtilen taban ve ısıl durumlara ait 1. ve 2. kubitler ile, 1. ve 3. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcileri kullanılarak, kuantum ilişiksizlik (quantum discord) ve klasik ilinti (classic correlation) değerleri bulunmuştur. Bu değerlerin bulunması için bir önceki bölümde anlatılan işlemler uygulanmıştır ve elde edilen sonuçlar grafik olarak sunulmuştur.

5.1. Sistemin Taban Durumlarının Kuantum İlişiksizlikleri

Bu kısımda incelenen dört kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sisteminin taban durumunun, ($T=0$) hem en yakın (1. ve 2.) hem de ikinci en yakın (1. ve 3.) kubitler arasındaki ilintileri (eşyumluluk, kuantum ilişiksizlik ve klasik ilinti) nümerik olarak incelenmiştir. Bunun için Δ_1 ve Δ_2 anizotropi parametreleri 0.5 veya 1.0 değerlerinde seçilmiştir. Çünkü sistemin enerji spektrumu incelendiğinde analitik olarak taban durumları belirlemek çok kolay değildir. Bu nedenle bu kısım nümerik olarak hesaplanmıştır ve seçilen değerler de buna göre seçilmiştir. Bunun yanında tüm grafiklerde $J_1 = 1$ seçilerek, diğer parametreler J_1 ile skalalandırılıp, boyutsuzlaştırılmıştır. Kontrol parametreleri olarak adlandırılan Δ_1 , Δ_2 , T , ve J_2 parametrelerinden anizotropi parametreleri sabit tutulmuş olup, grafiklerde ilintiler J_2 'nin fonksiyonu olarak incelenmiştir.

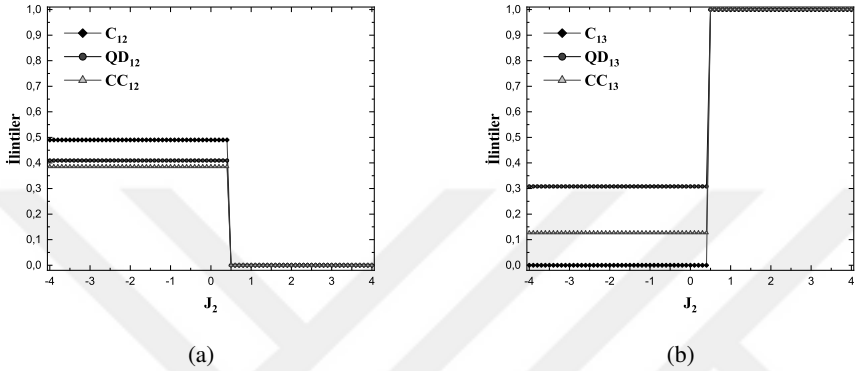
Sistemin enerji spektrumundan taban durumları $|\psi_{16}\rangle$ veya $|\psi_{12}\rangle$ ya da $|\psi_{16}\rangle$ ve $|\psi_{12}\rangle$ 'nin lineer kombinasyonu olarak belirlenmiştir. Taban durumlara ait hesaplanan indirgenmiş yoğunluk matrisleri Ek 1.1'de verilmiştir. Anizotropi

parametrelerinin $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ ve $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ olduğu durumlarda, $-4.0 \leq J_2 \leq 0.4$ için taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olurken, $J_2 = 0.5$ değerinde taban durum dejenere olup, $|\psi_{16}\rangle$ ve $|\psi_{12}\rangle$ 'nin lineer kombinasyonu şeklinde olmaktadır. $0.6 \leq J_2 \leq 4.0$ değerleri için ise taban durum $|\psi_{12}\rangle$ olmaktadır. Şekil 5.1'den görüldüğü üzere



Şekil 5.1. Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$).

taban durumun $|\psi_{16}\rangle$ olduğu durumda ilintiler J_2 'ye bağıllık göstermediği için sabit değerler alır. Bu değerlerde 1. ve 2. kubitler için kuantum ilişiksizlik 0.44 olurken 1. ve 3. kubitler arasında 0.34 olmaktadır. 1. ve 2. kubitler arasındaki eşuyumluluk ise kuantum ilişiksizlikten biraz daha büyük olup 0.5 değerini almaktadır. 1. ve 3. kubitler arasındaki eşuyumluluk ise sıfırdır. 1. ve 2. kubitler arasındaki klasik ilinti ise beklendiği gibi bunlardan daha düşük olup 0.35 gibi bir değer almaktadır. 1. ve 3. kubitler arasındaki klasik ilinti değeri de düşük olmasına rağmen eşuyumluluktan farklı olarak sıfırdan yüksek olduğu görülür. Taban durumun $|\psi_{12}\rangle$ olduğu durumda ise 1. ve 2. kubitler arasında herhangi bir ilinti olmadığı görülürken, 1. ve 3. kubitler arasındaki ilintiler maksimum değerlerinde bulunurlar. Taban durumun dejenere olması halinde ise 1. ve 2. kubitler arasındaki durumda kuantum ilişiksizlik eşuyumdan daha büyük değer almakla birlikte 1. ve 3. kubitler arasında durum tam tersi olmaktadır.

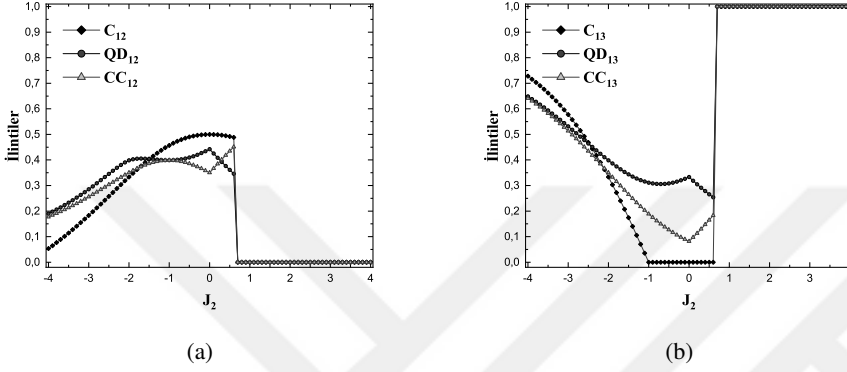


Şekil 5.2. Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşyuumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1.0$).

Benzer bir durum Şekil 5.2'de anizotropi parametrelerinin $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1$ olduğu durumda da görülmektedir. Bu anizotropi değerleri ve $-4.0 \leq J_2 \leq 0.4$ için taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olurken $0.5 \leq J_2 \leq 4.0$ için $|\psi_{12}\rangle$ olur. Taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olduğunda 1. ve 2. kubitler arasında baktığımızda eşyuumluluk yaklaşık 0.5 değerini alırken, anizotropi değerleri $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ olan Şekil 5.1'deki değerlere kıyasla kuantum ilişiksizliğin çok az azaldığı buna karşılık klasik ilintinin de çok az arttığı görülmüştür. 1. ve 3. kubitler arasında bakıldığında ise yine eşyuumluluk sıfır olmasına rağmen kuantum ilişiksizlik ve kuantum ilintinin belli bir değer aldıkları görülür. Taban durumun $|\psi_{12}\rangle$ olması durumunda ise 1. ve 2. kubitler arası tüm ilintiler sıfır olurken, 1. ve 3. kubitler arası tüm ilintiler maksimum değerlerini almaktadırlar.

Şekil 5.3'te $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ değerleri için sonuçlar görülmektedir. Bu anizotropi değerleri ve $-4.0 \leq J_2 \leq 0.6$ için taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olurken, $0.7 \leq J_2 \leq 4.0$ için $|\psi_{12}\rangle$ olur.

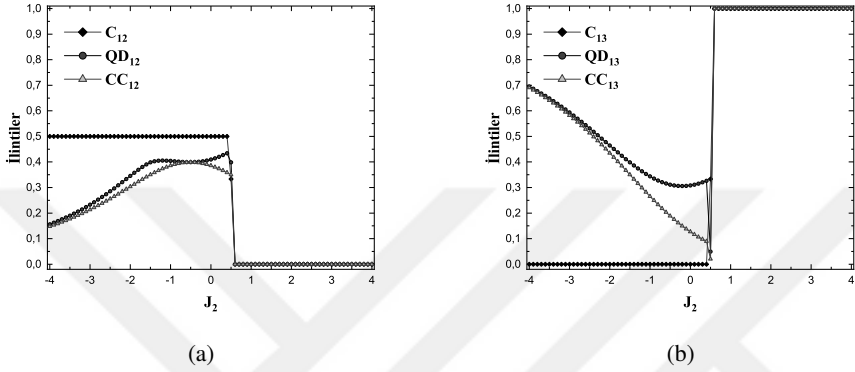
Burada da taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olduğunda kuantum ilişiksizlik ve klasik ilinti değerleri birbirlerine çok yakın değerler alıp bu değerler paralel olarak artıyorken,



Şekil 5.3. Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşuyumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0.5$).

$-1.0 \leq J_2 \leq 0.6$ olduğunda bu paralellik bozuluyor. Kuantum ilişiksizlik $[-1.0, 0.0]$ arasında artıyorken $[0.0, 0.6]$ arasında azalıyor. Klasik ilinti ise aynı aralıklarda tam tersi şekilde davranıyor. Eşuyumluluk ise düzenli olarak artıyorken, $-1.0 \leq J_2 \leq 0.6$ olduğunda ise artış duruyor. Burada özellikle düşük J_2 değerleri için kuantum ilişiksizliğin eşuyumluluktan daha büyük değerler aldığı görülmektedir. 1. ve 3. kubitler arasında ise eşuyumluluk 0.74 gibi bir değerden başlayıp azalmakta ve sıfıra düşmekteyken kuantum ilişiksizliğin 0.65 gibi daha düşük bir değerden başlayıp daha yavaş bir şekilde azaldığı, daha sonra bir miktar artıp, sonrasında tekrar azaldığı ancak sıfıra düşmediği görülür. Klasik ilinti de benzer bir şekilde davranır ancak daha düşük değerlere sahiptir. Taban durumu $|\psi_{12}\rangle$ olduğunda ise 1. ve 2. kubitler arası ilintilerin tümünün değeri yine sıfır oluyorken 1. ve 3. kubitler arasındaki kuantum ilintilerin değerleri maksimum olurlar.

Şekil 5.4 'de ise $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ anizotropi parametresi değerleri için sonuçlar görülmektedir. Burada da taban durum $|\psi_{16}\rangle$ olduğunda 1. ve 2. kubitler arası eşuyumluluk 0.5 sabit değerindeyken kuantum ilişiksizlik ve klasik ilinti paralel davranıyorlar ve 0.15 değerinden yaklaşık olarak 0.4 değerine kadar artıyorlar. $J_2 > -0.5$ olduğunda kuantum ilişiksizlik artmaya devam ederken klasik ilinti



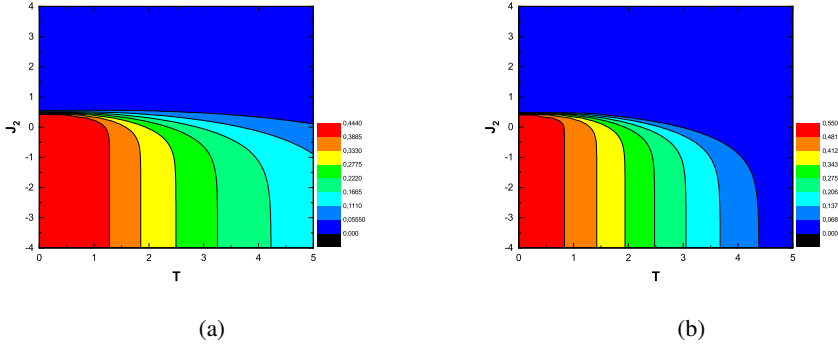
Şekil 5.4. Taban durumlar için ilintilerin (kuantum ilişiksizlik(QD), eşyuumluluk(C) ve klasik ilinti(CC)) J_2 'ye göre değişimleri: (a) 1. ve 2. kubitler, (b) 1. ve 3. kubitler ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$).

azalıyor. Ancak 1. ve 3. kubitler arası duruma baktığımızda eşyuğunun sıfır olduğu görülürken, kuantum ilişiksizliğin sıfırdan farklı olduğu ve özellikle düşük J_2 değerleri için 0.7 gibi yüksek değerler aldığı görülmektedir. Dejenere taban durumları olması halinde ise kuantum ilişiksizlik 1. ve 2. kubitler arası eşyuumluluktan daha büyük değer alırken, 1. ve 3. kubitler arasında daha düşük değer almaktadır. Taban durumun $|\psi_{12}\rangle$ olması halindeyse daha önceki durumlarda olduğu gibi 1. ve 2. kubitler arası ilintilerin değerlerinin tümü sıfır oluyorken, 1. ve 3. kubitler arasındaki kuantum ilintilerin değerleri maksimum olurlar.

5.2. Sistemin Isısal Durumlarının Kuantum İlişiksizlikleri

Isısal dengedeki sistemin durumu yoğunluk işlemcisi $\rho(T) = \frac{1}{Z}e^{-\beta H}$ ile belirlenir. Burada Z bölüşüm fonksiyonu (partition function) olup, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ olarak tanımlıdır. T sıcaklık, k_B ise Boltzmann sabitidir. Bu çalışmadaki tüm hesaplamalarda basitlik olması için $k_B = 1$ olarak alınmıştır. Hem 1. ve 2. hem de 1. ve 3. kubitler arasındaki ilintileri elde etmek için gerekli indirgenmiş ısısal yoğunluk işlemcileri Ek 1.2'de verilmiştir. Sıcaklık sıfır olduğunda, sistem taban durumda bulunur. Sıcaklık yükseldiğinde ise sistemin uyarılmış durumlarda bulunma olasılığı

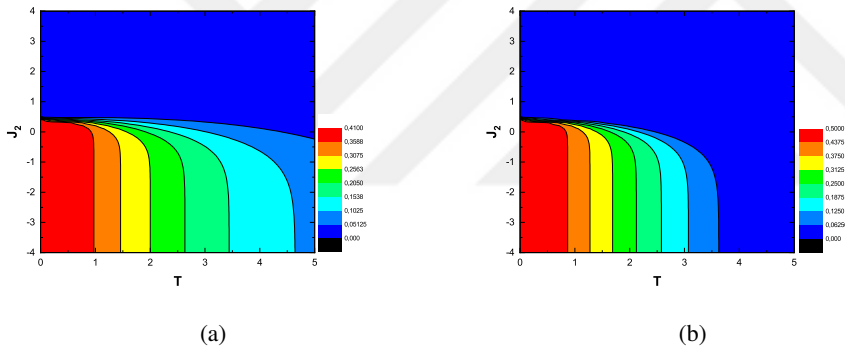
sıfırdan farklı olur. Sonlu sıcaklıklarda sistemin yoğunluk işlemcisi sistemin Boltzmann faktörü ile ağırlıklandırılmış tüm durumlarının dış çarpımlarının toplamıdır. Diğer bir deyişle karışım durum, kuantum durumlarının Boltzmann faktörleri ile ağırlıklandırıp karıştırılmasından elde edilir. Çalışmanın bu kısmında ise incelenmiş olan sistemdeki kuantum durumları kullanılarak oluşturulmuş bu karışımında kuantum durumları arasındaki ilintiler incelenmiştir. Bunun için kuantum ilişiksizlik QD, eşyuumluluk C ve klasik ilinti CC hem 1. ve 2. hem de 1. ve 3. kubitler arasında, anizotropi parametreleri Δ_1 ve Δ_2 'nin belli farklı değerlerinde ve sonlu T sıcaklıklarında hesaplanmıştır. $T = 0.1$ gibi düşük sıcaklıklarda tüm anizotropi değerleri için indirgenmiş yoğunluk işlemcilerine olan en büyük katkı taban durumlardan gelmektedir. Bu nedenle düşük sıcaklıklardaki kuantum ilintilerinin davranışı taban durumlar için incelenen durumla aynıdır. Ancak $T \geq 0.1$ sıcaklıklarında ise taban durumun yanında uyarılmış durumlardan da kayda değer katkılar gelmektedir.



Şekil 5.5. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$).

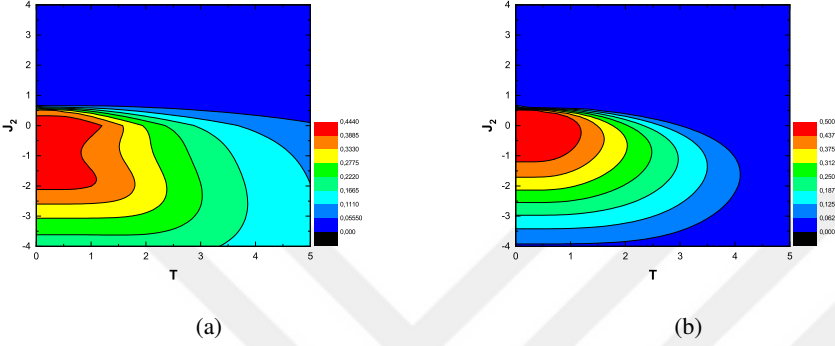
İlk olarak ısısal durumlar için 1. ve 2. kubitler arasındaki kuantum ilişiksizlik QD ve eşyuumluluk C, $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ anizotropi değerlerinde Şekil 5.5'de görüldüğü gibi kontur grafiği olarak verilmiştir. Sabit ve düşük sıcaklık değerinde grafiğe bakıldığında $J_2 < 0.5$ için kuantum ilişiksizliğin belli değerlerde olduğu,

$J_2 \geq 0.5$ için ise azalıp sıfıra düştüğü görülür. Sıcaklık arttıkça bu davranışın tekrarladığı ancak değişimin olduğu yani QD'nin sıfıra düştüğü J_2 değerinin azaldığı görülür. Bunun yanında sabit J_2 değerlerinde ise sıcaklık arttıkça kuantum ilişiksizlik QD beklendiği gibi azalmaktadır. Benzer bir durum eşyumluluk durumunda da görülmektedir. Eşyumluluk C, QD'ye göre biraz daha büyük değerlere ulaşsa da kuantum ilişiksizliğin sıcaklığa karşı daha dayanıklı olduğu görülmektedir. Şekil 5.6'da $\Delta_1 = 0.5$, $\Delta_2 = 1$ anizotropi değerlerinde kuantum



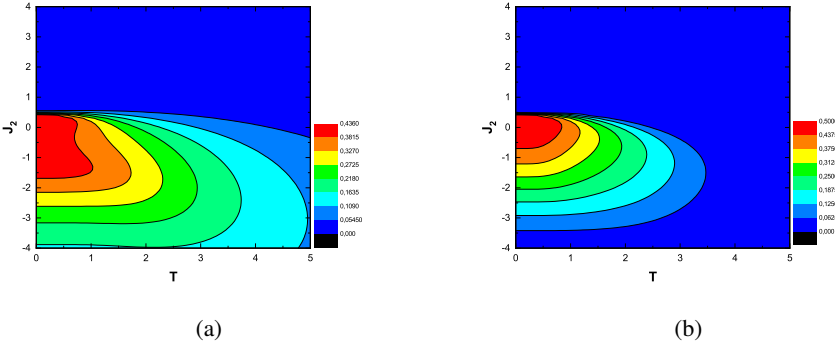
Şekil 5.6. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1$).

ilişiksizlik ve eşyumluluğun kontur grafikleri görülmektedir. Burada da grafiklerin genel formu $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ değerlerindeki gibi olmakla beraber, $\Delta_1 < \Delta_2$ olduğu için eşyumluluğun sıcaklıkla daha hızlı azaldığı görülmekteyken kuantum ilişiksizliğin azalışının daha yavaş olduğu görülmektedir. Bunun yanında hem QD'nin hem de C'nin aldığı en büyük değerler biraz azalmıştır. Şekil 5.7'de ise $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ anizotropi değerlerinde kuantum ilişiksizlik ve eşyumluluğun kontur grafikleri görülmektedir. Burada da sıcaklık arttıkça (sabit J_2 değerleri için) hem eşyumluluk hem de kuantum ilişiksizlik azalmaktadır. Bunun yanında sabit sıcaklıklarda J_2 arttıkça QD ve C'nin önce artıp sonra azaldığı ve J_2 'nin yaklaşık 0.5 değerinden itibaren ise ani bir şekilde azaldığı görülmektedir. Bu ani azalış eşyumluluk için daha keskindir. Ayrıca QD'nin



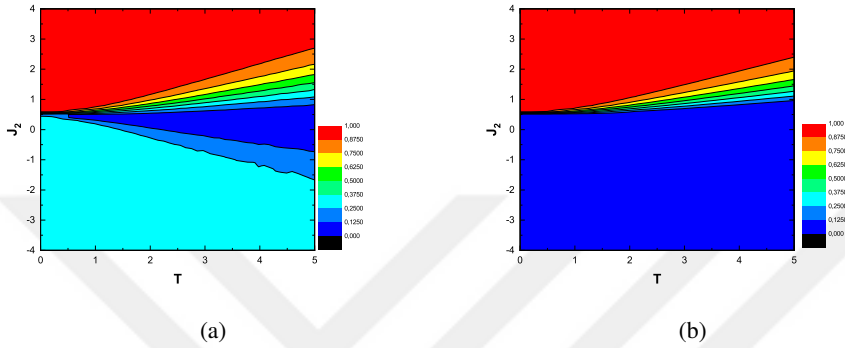
Şekil 5.7. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 1.0, \Delta_2 = 0.5$).

eşyuumluluğa göre sıcaklığa daha dayanıklı olduğu burada da görülmektedir. Şekil 5.8’de ise $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$ anizotropi değerlerinde kuantum ilişiksizlik



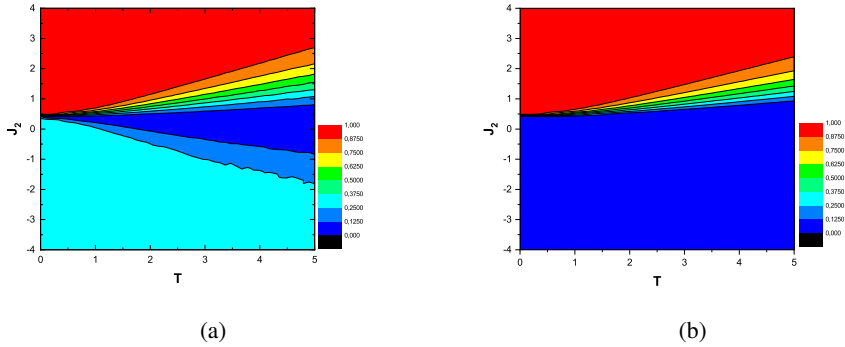
Şekil 5.8. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 2. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$).

ve eşyuumluluğun kontur grafikleri görülmektedir. Burada da Şekil 5.7’deki davranışın bir benzeri görülmekle birlikte hem eşyuumluluk hem de kuantum ilişiksizlik yüksek sıcaklıklarda daha küçük değerler almaktadır. Isısal durumlar için 1. ve 3. kubitler arasındaki kuantum ilişiksizlik QD ve eşyuumluluk C , $\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0$ anizotropi değerlerinde, Şekil 5.9’da kontür grafiği olarak verilmiştir. Burada da sabit J_2 değerlerinde sıcaklık arttıkça hem kuantum ilişiksizliğin hem de eşyuumluluğun beklendiği gibi azaldığı görülmektedir. Bunun yanında



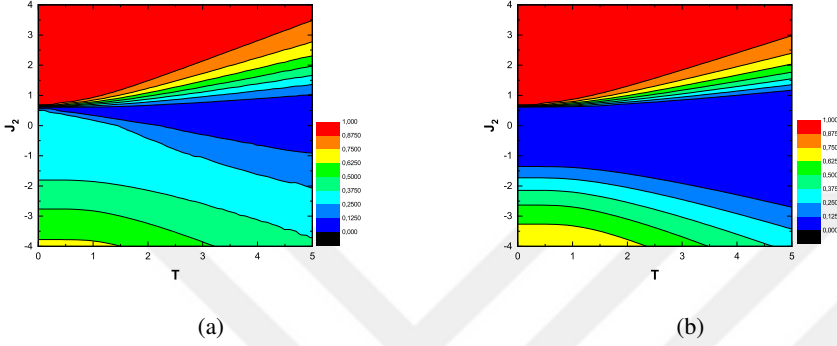
Şekil 5.9. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$).

sabit sıcaklıklarda $J_2 \geq 0.5$ değerlerinde eşyuumluluk ve kuantum ilişiksizlik gözlenirken, $J_2 \leq 0.5$ değerlerinde eşyuumluluk gözlenmemektedir ancak kuantum ilişiksizlik gözlenmektedir. Ayrıca yüksek sıcaklıklarda eşyuumluluğun kuantum ilişiksizliğe göre daha büyük değerler aldığı bölgelerin daha çok olduğu görülür. Şekil 5.10'da ise $\Delta_1 = 0.5$ ve $\Delta_2 = 1.0$ anizotropi değerlerinde kuantum ilişiksizlik



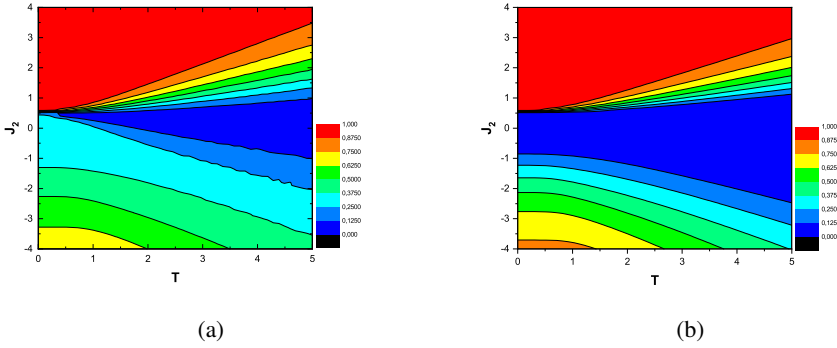
Şekil 5.10. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 1$).

ve eşyuumluluğun kontur grafikleri görülmektedir. Burada da Şekil 5.9'daki davranışın bir benzeri görülmektedir. Ancak eşyuumluluk için yüksek sıcaklık değerlerinde çok küçük bir azalma gözlenmektedir. Şekil 5.11'de ise $\Delta_1 = 1.0$ ve $\Delta_2 = 0.5$ anizotropi değerlerinde kuantum ilişiksizlik QD ve eşyuumluluk



Şekil 5.11. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0.5$).

C 'nin kontur grafikleri görülmektedir. Burada $J_2 < 0$ değerlerinde sıcaklık arttıkça kuantum ilişiksizliğin daha yavaş azaldığı görülürken, eşyuumluluğun daha hızlı azaldığı görülmektedir. Bunun yanında $J_2 > 0$ için ise kuantum ilişiksizlik daha hızlı azalmaktadır. Sabit sıcaklıklarda ise J_2 arttıkça hem QD hem de C azalıp artan bir davranış gösterir. Ancak eşyuumluluk bu davranış sırasında her zaman kuantum ilişiksizliğe göre daha düşük değerlere ulaşmaktadır. Şekil 5.12'de ise $\Delta_1 = 0.5 =$



Şekil 5.12. J_2 çiftlenim sabiti ve T sıcaklığına göre 1. ve 3. kubitler arası: (a) Isısal kuantum ilişiksizlik QD, (b) Isısal eşyuumluluk C ($\Delta_1 = 0.5, \Delta_2 = 0.5$).

$\Delta_2 = 0.5$ anizotropi değerlerinde kuantum ilişiksizlik QD ve eşyuumluluk C 'nin kontur grafikleri görülmektedir. Burada da Şekil 5.11'deki davranışın bir benzeri

görülmektedir. Ancak burada sabit sıcaklıklarda eşyuumluluğun düşük değerler aldığı J_2 değerlerinde bir miktar azalma görülür.



6. Tartışma ve Sonuç

Kuantum ilişiksizlik ile ilgili çalışmalar, dolaşıklıkla alternatif kuantum ilinti kaynağı olarak kullanılabilmesi açısından önem teşkil etmektedir. Her ne kadar dolaşıklık hâlâ birçok kuantum uygulamada kullanılıyorsa da bu çalışmada ve daha birçok benzer çalışmada da görüldüğü üzere kuantum ilişiksizliğin çevre değişimlerine daha dayanıklı ve daha temel bir kuantum ilinti türü olduğu fikri yaygınlaşmaktadır. Bu çalışmada incelenmiş dört kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ sisteminde hem taban durumlarda hem de ısısal durumlarda bu davranış görülmektedir.

Öncelikle bu çalışmada incelenmiş olan farklı kuantum ilintileri ölçütlerinin değerlerine bakıldığında 0 ve 1 aralığında değiştikleri görülmektedir. Herhangi iki kubit arasındaki tüm kuantum ilinti değerleri 0 ise bu kubitler arasında herhangi bir kuantum ilinti olmadığı, yani birisi üzerine yapılan işlemin diğerini etkilemediği anlaşılmaktadır. Ancak dolaşıklık ölçütü olan eşyuumluluk 0 olup, kuantum ilişiksizlik 0'dan farklıysa bu kubitler tanım olarak ayrılabilir durumurlar ancak bu aralarında kuantum ilintisi olmadığı anlamına gelmemektedir. Çünkü bu kubitler arasında kuantum ilişiksizlik olarak adlandırılan kuantum ilinti türü vardır. Eğer bu kubitler arasındaki kuantum ilinti ölçütü değerleri 1 ise kubitlerin maksimum dolaşık oldukları anlaşılmaktadır.

Taban durumları için çeşitli antizotropi ve J_2 değerlerinde dolaşıklık ölçütü eşyuumluluk ile kuantum ilişiksizlik değerleri genel olarak paralellik göstermektedir. İncelenmiş olan grafikler üzerinden bazı durumlarda, kubitler arasında, daha yüksek eşyuumluluk değerleri elde edilmişken, bazı durumlarda eşyuumluluk değerinin sıfır olduğu ancak kuantum ilişiksizlik değerinin sıfırdan büyük olduğu görülmüştür. Hatta eşyuumluluk değerinin sıfır olup, kuantum

ilişiksizlik değerinin çok yüksek değer aldığı da görülmüştür. Yani bunun anlamı, bu kubitlerin ayrılabilir olmalarına rağmen yüksek kuantum ilintili olduklarıdır.

Isısal durumlar incelendiğinde ise taban durumlardan farklı olarak sıcaklık değerleri de, kubitler arasındaki kuantum ilinti ölçütlerinin değerlerinde önemlidir. Anizotropi parametrelerinin değerine göre düşük J_2 değerlerinde eşyuumluluk ve kuantum ilişiksizlik değerleri değişkenlik göstermekteyken, yüksek J_2 değerlerinde ise her iki kuantum ilintisi de gözlenmemektedir. Farklı anizotropi parametrelerinde ise özellikle eşyuumluluk değerinin, düşük J_2 değerlerinde, minimum olduğu durumlar da görülmektedir. Bu durumdaki kuantum ilişiksizlik değerleri incelendiğinde ise, düşük J_2 değerlerinde, eşyuumluluğa kıyasla daha yüksek olduğu görülmektedir. Isısal durumlar için genel olarak gözlemlenen durum, kuantum ilişiksizliğin eşyuumluluğa göre sıcaklık değişimlerine nispeten daha dayanıklı olduğudur.

Hem taban durumları hem de ısısal durumlar için, bir çok değişik parametre değişimi altında, kuantum ilişiksizliğin ve dolaşıklığın paralel değerler aldığı, ancak ilişiksizlik değerlerinin daha çok yayıldığı görülmektedir. Özellikle, ısısal durumlarda sıcaklığın nispeten yüksek değerlerinde, dolaşıklığın, kuantum ilişiksizliğe oranla çok daha çabuk kaybolduğu görülmektedir. Yani kuantum ilişiksizliğin sıcaklığa olan direnci, dolaşıklığa oranla daha yüksektir. Her ne kadar bu fark çok büyük olmasa da, daha önce de bahsettiğimiz çeşitli alanların uygulanabilirliği açısından önem teşkil edecek seviyededir.

Ayrıca kuantum ilinti ölçütlerinin değerleri, kubitler arasındaki mesafeye göre de farklı davranmaktadır. Eğer 1. ve 2. kubitler arasındaki kuantum ilişiksizlik değerleri ile 1. ve 3. kubitler arasındaki kuantum ilişiksizlik değerleri incelenirse, düşük J_2 değerlerinde birbirlerine yakın ilişiksizlik değerleri görülüyorken, 0.5'ten daha yüksek J_2 değerleri incelendiğinde, 1. ve 2. kubitler arasındaki kuantum ilişiksizlik değeri minimum değer iken 1. ve 3. kubitler arasındaki kuantum

ilişiksizlik değeri maksimum değer olan 1 olmaktadır. 1. ve 2. kubitlerin birbirlerine olan mesafenin, 1. ve 3. kubitlerin birbirlerine olan mesafeden daha kısa olduğu düşünüldüğünde, kubitler arasındaki mesafenin kuantum ilintilerin değerleri açısından ne kadar büyük değişim yarattığı görülmektedir. Aynı kıyaslama eşyumluluk ve klasik ilinti için yapıldığında da benzer bir davranış görülmektedir. Dolayısıyla kubitler arasındaki mesafenin de kuantum ilinti değerleri üzerinde önemli etkisi vardır. Buradan da görüldüğü üzere kubitler arasındaki mesafe kuantum ilintiler açısından çok önemlidir.

Sonuç olarak, incelenen model üzerinde, kubitler arasındaki kuantum ilintinin varlığı açısından kuantum ilişiksizlik dolaşıklığa göre daha temel bir kuantum ilinti türüdür. Çünkü çalışmada en dikkat çekici sonuç, dolaşıklığın olmadığı durumlarda kuantum ilişiksizliğin gözlemlenmesidir. Eğer kubitler arasında dolaşıklık yoksa, aralarında kuantum ilinti olmadığı anlamına gelmemektedir. Çünkü kuantum ilişiksizlik olabilir. Ancak bu kubitler arasında kuantum ilişiksizlik yoksa, aralarında herhangi bir kuantum ilinti olmadığına dair daha güçlü bir kanıt elde edilmiştir. Çünkü bu çalışmada kuantum ilişiksizliğin olmadığı ancak dolaşıklığın olduğu bir durum gözlenmemiştir. Bundan dolayıdır ki kuantum ilişiksizlik dolaşıklıktan daha temel bir kuantum ilintisidir ve çeşitli uygulamalarda dolaşıklığa alternatif olarak kullanılabilir.

Kaynakça

- [1] Einstein, A., Rosen, N., Podolsky, B. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Phys. Rev.**, 47: 777 - 780.
- [2] Bell, J. S., 1964. On The Einstein Podolsky Rosen Paradox. **Physics**, 1 : 195 - 200.
- [3] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., Holt, R. A. 1969. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. **Phys. Rev. Lett.**, 23 : 880–884.
- [4] Aspect, A., Grangier, P., Roger, G. 1981. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.**, 47 : 460–463.
- [5] Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G. 1982. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. **Phys. Rev. Lett.**, 49 : 1804–1807.
- [6] Aspect, A., Grangier, P. , Roger, G. 1982. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities. **Phys. Rev. Lett.**, 49 : 91–94.
- [7] Shannon, C. 1953. The lattice theory of information. **Trans. of the IRE Prof. Group on Inf. Theory**, 1 : 105-107.
- [8] Feynman, R. P. 1982. Simulating Physics with Computers. **Inter. Jour. of Theo. Phys.**, 21 : 467 - 488.
- [9] Ekert, A. , Jozsa, R. 1996. Quantum Computation And Shor's Factoring Algorithm. **Rev. Mod. Phys.**, 68 : 733 - 753.
- [10] Bennett, C. H., Wiesner, S. J. 1992. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. **Phys. Rev. Lett.**, 69 : 2881 - 2884.
- [11] Deutsch, D. 1985. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. **Proc. R. Soc. Lond. A** , 400: 97 - 117.
- [12] Deutsch, D., Jozsa, R. 1992. Rapid Solution of Problems by Quantum Computation. **Proc. R. Soc. Lond. A**, 439 : 553 - 558.
- [13] Ekert, A.K. 1991. Quantum Cryptography Based On Bell's Theorem. **Phys. Rev. Lett.**, 67 : 661–663.

- [14] Bennett, C. H., Wiesner, S. J. 1992. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. **Phys. Rev. Lett.**, 69 : 2881–2884.
- [15] Bennett, C. H., et al. 1993. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Phys. Rev. Lett.**, 70 : 1895–1899.
- [16] Jozsa, R. 1997. Entanglement and quantum computation. arXiv:quant-ph/9707034.
- [17] Jozsa, R. , Linden, N. 2003. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. **Proc. R. Soc. A**, 459 : 2011–2032.
- [18] Zurek, W. H. 2000. Einselection And Decoherence From an Information Theory Perspective. **Ann. Phys.**, 5 : 855 – 864.
- [19] Sabbaghzadeh, J., Dalafi, A. 2007. The Role of the density operator in the statistical description of quantum systems. **Am. J. Phys.**, 75 : 1162 - 1165.
- [20] Eryiğit, R., Gündüç, Y. , Eryiğit, R. 2006. Magnetic entanglement in J_1 - J_2 model. **Phys. Lett. A**, 349 : 37 - 44.
- [21] Eryiğit, R., Gündüç, Y. , Eryiğit, R. 2004. Quantum phase transitions and entanglement in J_1 - J_2 model. **Int. J. Mod. Phys. C**, 15 : 1095 - 1103.
- [22] Schrödinger, E., 1995. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, 31: 555 - 563.
- [23] Knill, E. , Laflamme, R. 1998. Power of one bit of quantum information. **Phys. Rev. Lett.**, 81 : 5672 - 5675.
- [24] Oliver, H., Zurek, W. H. 2001. Quantum Discord: A measure of the quantumness of correlations. **Phys. Rev. Lett.**, 88 : 017901-1 - 017901-4.
- [25] Henderson, L., Vedral, V. 2001. Classical, quantum and total correlations. **J. Phys. A : Math. Gen.**, 34: 6899 - 6905.
- [26] Cover, T. M., Thomas, J. A. 2006. Elements of Information Theory. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- [27] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. 2000. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] Luo, S., 2008. Quantum discord for two-qubit systems. **Phys. Rev. A**, 77 : 042303-1 - 042303-6.

- [29] Werner, R. F. 1989. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. **Phys. Rev. A**, 40 : 4277 - 4281.



A. Ekler

1.1. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Taban Durumların İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcileri

$\rho = |\Psi_{16}\rangle \langle \Psi_{16}|$ için 1. ve 2. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{12} = Tr_{34}(\rho) = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \omega & 0 \\ 0 & \omega & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

ve

$$v = \frac{1}{2(2 + \xi_2^2)}, \quad v = \frac{1 + \xi_2^2}{2(2 + \xi_2^2)}, \quad \omega = \frac{\xi_2}{2 + \xi_2^2},$$

olarak tanımlanır. ρ 'nun 1. ve 3. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{13} = Tr_{24}(\rho) = \begin{pmatrix} \tilde{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{v} & \tilde{v} & 0 \\ 0 & \tilde{v} & \tilde{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{v} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

ve

$$\tilde{v} = \frac{\xi_2^2}{2(2 + \xi_2^2)}, \quad \tilde{v} = \frac{1}{(2 + \xi_2^2)},$$

olarak tanımlanır.

Taban durumu $|\Psi_{12}\rangle$ ve $|\Psi_{16}\rangle$ 'nin lineer kombinasyonları $\rho = \frac{1}{2}|\Psi_{12}\rangle \langle \Psi_{12}| + \frac{1}{2}|\Psi_{16}\rangle \langle \Psi_{16}|$ olarak ifade edilirse 1. ve 2. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{12} = Tr_{34}(\rho) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & \delta & 0 \\ 0 & \delta & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

ve

$$\mu = \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2 + \xi_2^2)}, \quad \varphi = \frac{1}{8} + \frac{1 + \xi_2^2}{4(2 + \xi_2^2)}, \quad \delta = \frac{\xi_2^2}{2(2 + \xi_2^2)},$$

olarak tanımlanır. Yine aynı taban durumunun 1. ve 3. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{13} = Tr_{24}(\rho) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} & \tilde{\delta} & 0 \\ 0 & \tilde{\delta} & \tilde{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mu} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

ve

$$\tilde{\mu} = \frac{\xi_2^2}{4(2 + \xi_2^2)}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(2 + \xi_2^2)}, \quad \tilde{\delta} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(2 + \xi_2^2)},$$

olarak tanımlanır.

Taban durumu $|\Psi_{12}\rangle$ olduğunda $\rho = |\Psi_{12}\rangle\langle\Psi_{12}|$ 1. ve 2. kubitler arasındaki indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{12} = \frac{1}{4}I, \quad (\text{A.5})$$

1. ve 3. kubitlerin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi ise

$$\rho_{13} = Tr_{24}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

olarak tanımlanmaktadır.

1.2. Dört Kubitlik $J_1 - J_2$ Heisenberg XXZ Sisteminde Isısal Durumların İndirgenmiş Yoğunluk İşlemcileri

Isısal durumların yoğunluk operatörü

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{16} e^{-\beta E_i} |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (\text{A.7})$$

ve burada $\beta = \frac{1}{k_B T}$ dir ve k_B Boltzman sabitidir. Burada k_B Boltzman sabiti 1 alınmıştır. Bu durumda 1. ve 2. kubitler için indirgenmiş yoğunluk işlemcisi

$$\rho_{12} = Tr_{34}(\rho) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

ve

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{4} \left[2e^{-E_{10}/T} + e^{-E_{12}/T} + 4e^{-E_{14}/T} + 2e^{-E_2/T} + 2e^{-E_5/T} + 2e^{-E_6/T} \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-E_8/T} + \frac{2e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{2e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right], \\
v_1 &= \frac{1}{4} \left[2e^{-E_{10}/T} + e^{-E_{12}/T} + 4e^{-E_{14}/T} + 2e^{-E_2/T} + 2e^{-E_5/T} + 2e^{-E_6/T} \right. \\
&\quad \left. + 2e^{-E_8/T} + \frac{2e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{2e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right], \\
\omega_1 &= \frac{1}{4} \left[-e^{-E_1/T} - e^{-E_2/T} + e^{-E_7/T} + e^{-E_8/T} + \frac{4\xi_1 e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{4\xi_2 e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Aynı şekilde 1. ve 3. kubitler için indirgenmiş yoğunluk işlemcileri ise

$$\rho_{13} = Tr_{24}(\rho) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{2} \left[e^{-E_{11}/T} + 2e^{-E_{14}/T} + e^{-E_2/T} + 2e^{-E_6/T} + e^{-E_8/T} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi_1^2 e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{\xi_2^2 e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right], \\
\delta_1 &= \frac{1}{4} \left[e^{-E_1/T} + 2e^{-E_{10}/T} + 2e^{-E_{12}/T} + e^{-E_2/T} + 2e^{-E_4/T} + 2e^{-E_5/T} \right. \\
&\quad \left. + e^{-E_7/T} + e^{-E_8/T} + 2e^{-E_9/T} + \frac{4e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{4e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right], \\
\Lambda_1 &= \frac{1}{4} \left[e^{-E_1/T} - 2e^{-E_{12}/T} + e^{-E_2/T} - 2e^{-E_4/T} - 2e^{-E_5/T} + e^{-E_7/T} \right. \\
&\quad \left. + e^{-E_8/T} + \frac{4e^{-E_{15}/T}}{2 + \xi_1^2} + \frac{4e^{-E_{16}/T}}{2 + \xi_2^2} \right]
\end{aligned}$$

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : OĞUZHAN AZARI
Doğum Yeri : AYDIN

EĞİTİM DURUMU

Lisans öğrenimi : Çukurova Üniversitesi
Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce