T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2021-YL-017

(2,4,4) ÜÇGENSEL GRUBUNUN ALT GRUPLARI

Ceren AYDIN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ceren AYDIN tarafından hazırlanan ‘‘(2,4,4) Üçgensel Grubunun Alt Grupları’’ başlıklı tez, 29/01/2021 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. İbrahim ÇANAK	Ege Üniversitesi	
Üye	:	Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU	ADÜ	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER	ADÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu yüksek lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ……..…Sayılı kararıyla ………….…….. tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

29/01/2021

Ceren AYDIN

ÖZET

(2,4,4) ÜÇGENSEL GRUBUNUN ALT GRUPLARI

Ceren AYDIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Adnan Melekoğlu

2021, 34 sayfa

Bu çalışmanın amacı (2,4,4) üçgensel grubunun alt gruplarını incelemek ve bunları bölüm uzaylarına göre sınıflandırmaktır.

Birinci bölümde kısaca tez özetlenmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması için gerekli olan temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde (2,4,4) üçgensel grubunun alt grupları incelenmiş ve bunlar bölüm uzaylarına göre sınıflandırılmıştır.

Son bölümde ise (2,4,4) üçgensel grubunun indeksi 10 dan küçük veya eşit olan bazı alt grupları ve bunların her biri için birer üreteç kümesi belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Grup, Üçgensel grup, (2,4,4) üçgensel grubu, Temel bölge, Bölüm uzayı.

ABSTRACT

SUBGROUPS OF (2,4,4) TRIANGLE GROUPS

Ceren AYDIN

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

2021, 34 pages

The aim of this study is to investigate the subgroups of (2,4,4) triangle group and classify them according to their quotient spaces.

In the first chapter the thesis is summarized briefly.

The second chapter is devoted to basic concepts that are required in the later chapters.

In the third chapter, the subgroups of (2,4,4) triangle group have been investigated and they are classified according to their quotient spaces.

In the last chapter, some of the subgroups of (2,4,4) triangle group of index less than or equal to 10 with a generating set have been determined.

Key Words: Group, Triangle group, (2,4,4) triangle group, Fundamental region, Quotient space.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca ilgi, anlayış ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim süresince bana destek olan sevgili eşim, kızım ve oğluma da sonsuz teşekkür ediyorum.

Ceren AYDIN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

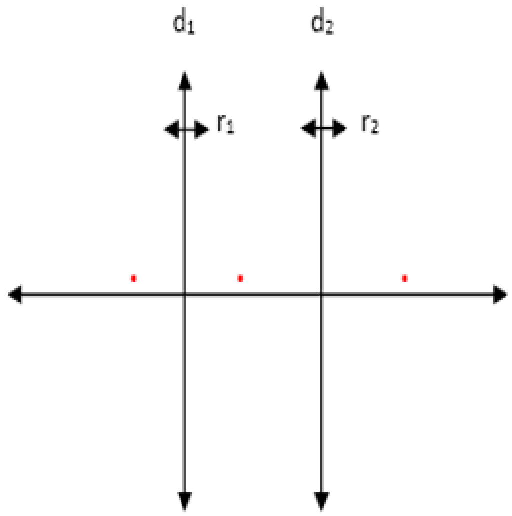
ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

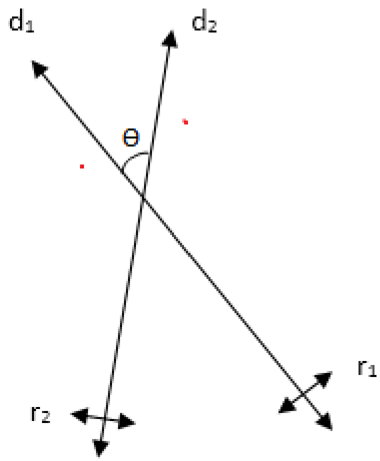
Öklid düzleminin tüm izometrileri fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup E_2 notasyonu ile gösterilir ve Öklid grubu olarak adlandırılır (Armstrong, 1988).

E_2 grubundaki elemanlar; yansımalar, ötelemeler, döndürmeler ve ötelemeli yansımalar olmak üzere dört türe ayrılırlar. Bunlardan döndürmeler ve ötelemeler yönü korurlar, yansımalar ve ötelemeli yansımalar ise yönü korumazlar.

Öklid düzleminde d_1 ve d_2 doğruları verilsin. Bunlar üzerindeki yansımalar sırasıyla r_1 ve r_2 olmak üzere, $r_1 r_2 = r_1 \circ r_2$ izometrisi eğer d_1 ve d_2 doğruları paralel ise düzlemdeki her bir noktayı verilen doğrular arasındaki uzaklığın iki katı kadar öteleyen bir ötelemedir (Şekil 1.1.1), eğer kesişiyorlarsa düzlemdeki her bir noktayı kesişme noktası etrafında doğrular arasındaki açının iki katı kadar döndüren bir döndürmedir (Şekil 1.1.2).

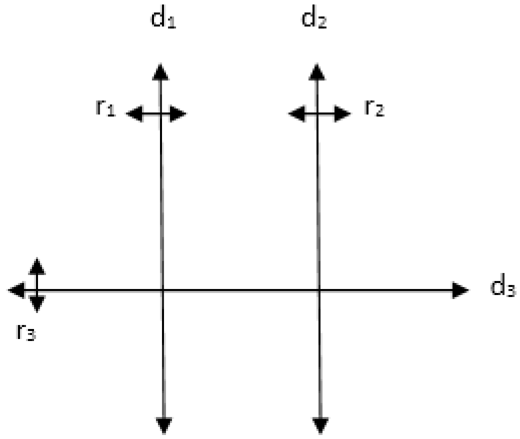


Şekil 1.1.1 Paralel doğrular üzerindeki yansımalar



Şekil 1.1.2 Kesişen doğrular üzerindeki yansımalar

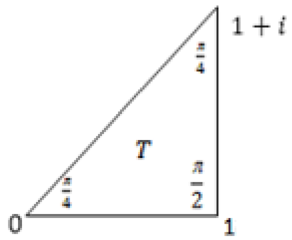
Eğer r_3, d_1 ve d_2 doğrularını dik kesen bir d_3 doğrusu üzerindeki yansıma ise, $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2\mathrm{r}_3$ izometrisi bir ötelemeli yansımadır (Şekil 1.1.3).



Şekil 1.1.3 Ötelemeli yansıma

Dolayısıyla Öklid düzleminin her izometrisi yansımaların bileşkesi olarak ifade edilebilir.

T, karmaşık düzlemde ($\mathbb{C}$) iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ ve $\frac{\pi}{4}$ radyan olan bir üçgen olsun. Örneğin T üçgeninin köşeleri 0, 1 ve $1+i$ alınabilir (Şekil 1.1.4).



Şekil 1.1.4 T üçgeni

Bu üçgenin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımalar,

$$a(z) = \bar{z}, b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

ile verilen $a, b, c: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarıdır (Alling ve Greenleaf, 1971). Bu yansımalar fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir G grubunu üretir ve aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ac)^4 = 1$$

(Coxeter ve Moser, 1980). Bu G grubu $(2,4,4)$ üçgensel grubu olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen T üçgeni G grubu için bir temel bölgedir. Yani G grubunun elemanları altında T üçgeninin görüntülerinin birleşimi karmaşık düzlemdir. Ayrıca, herhangi iki görüntünün içlerinin kesişimi boş kümedir.

G grubunun indeksi N olan bir H alt grubu verilsin. H grubunun bölüm uzayı kompakttır ve Teorem 2.1.1 gereğince herhangi bir temel bölgesinin alanı, G grubunun bir temel bölgesinin alanının N katıdır. Dolayısıyla H alt grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanı $\frac{N}{2}$ birim kare olur. Böylece G grubunun herhangi bir alt grubunun temel bölgesinin topolojik özelliği grubun bazı cebirsel özellikleri hakkında bilgi vermektedir.

Örneğin G grubunun sonsuz üçgensel alt grubu vardır ve bunların bölüm uzayları üçgendir. Her üçgen diske homeomorf olduğu için üçgensel grupların bölüm uzayı disk kabul edilecektir. Ayrıca G grubunun her üçgensel alt grubu $(2,4,4)$ üçgensel grubu olduğu için G grubuna izomorftur.

Karmaşık düzlemde kenarları G grubuna ait yansımalar tarafından sabit tutulan dikdörtgenler mevcuttur. Böyle bir dikdörtgenin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki dört yansıma, G grubunun dikdörtgensel alt grup adı verilen bir alt grubunu üretir. Dikdörtgensel alt grupların da bölüm uzayı disktir ama G grubunun bir dikdörtgensel alt grubu bir üçgensel alt grubuna izomorf olamaz. Bunun sebebi, dikdörtgensel alt gruplarda yansımalar ve 180 derecelik döndürmeler dışında sonlu mertebeli elemanın bulunmamasıdır. Dolayısıyla dikdörtgensel alt gruplar G grubunun farklı bir alt grup sınıfını oluşturur.

G grubunun herhangi bir üçgensel veya dikdörtgensel alt grubu verildiğinde, bunun yönü koruyan izometrilerden oluşan alt grubunun bölüm uzayı küreye homeomorftur. Dolayısıyla böyle bir alt gruba küresel alt grup denir. Elemanlarının mertebeleri dikkate alındığında G grubunun iki farklı küresel alt grup sınıfına sahip olduğu görülür.

G grubunun lineer bağımsız iki öteleme tarafından üretilen bir H alt grubunun bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Böyle bir alt grup G grubunun torsal alt grubu olarak adlandırılır. Tor yüzeyleri kompakt olduğu için H grubunun G deki indeksi sonludur.

G grubunun bir öteleme tarafından üretilen bir alt grubu için bir temel bölge bir sonsuz şerittir ve alanı sonlu değildir. Bu nedenle bu alt grubun bölüm uzayı bir sonsuz silindirdir ve G deki indeksi sonlu değildir. Böyle bir sonsuz devirli alt gruba G grubunun silindirik alt grubu denir.

G grubunun yansıma ve döndürmeler tarafından üretilen sonlu devirli alt grupları da mevcuttur. Bunların bölüm uzayları sırasıyla kapalı yarı düzlem veya konidir.

Aralarındaki dar açının ölçüsü $\frac{\pi}{n}$ radyan olan kesişen iki doğru üzerindeki yansımalar ise $2n$ elemanı bulunan D_n dihedral grubunu üretirler.

İzomorf alt grupların bölüm uzayları homeomorftur, ancak bölüm uzayı homeomorf olan alt grupların izomorf olmaları gerekmez. Örneğin G grubunun üçgensel ve dikdörtgensel iki alt grubu izomorf değildir, ama bunların bölüm uzayları küre olduğu için homeomorftur.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde G grubunun yukarıda tanımlanan alt grup sınıfları detaylı bir şekilde incelenecek ve her bir sınıfa ait sayılabilir sonsuz alt grup belirlenecektir. Böylece, terimleri G grubunun alt gruplardan oluşan bir $\{G_n\}$ dizisi elde edilecektir.

Dördüncü ve son bölümde ise MAGMA yazılımı kullanılarak $(2,4,4)$ üçgensel grubunun yukarıda bahsedilen türlere ait ve indeksi 10 dan küçük veya eşit olan alt grupları belirlenecek ve bu alt gruplar bir çizelgede verilecektir. Çizelgede söz konusu grupların türleri ve üreteçleri de bulunacaktır. Göz önüne alınan alt grupların G grubundaki indeksleri sonlu olduğu için çizelgede sadece bölüm uzayı kompakt olan alt gruplar yer alacaktır. Bunlar ise G grubunun üçgensel, dikdörtgensel, küresel ve torsal alt gruplarıdır. G grubunun sonlu ve silindirik alt gruplarının bölüm uzayları kompakt olmadığı için bu tür alt gruplar çizelgede yer almayacaktır.

2 TEMEL BİLGİLER

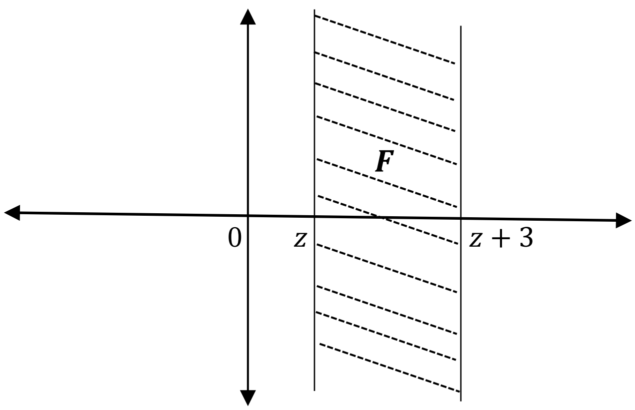
2.1 Temel Bölge ve Bölüm Uzayı

Tanım 2.1.1 X boştan farklı bir küme $a \in X$ ve $\varphi : G \times X \to X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun. Bu durumda, $G_a = \{\varphi(g, a) | g \in G\}$ kümesine a noktasının yörüngesi denir.

Tanım 2.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve $f: X \to X$ biçimindeki homeomorfizmaların kümesi G olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda, (X, τ) topolojik uzayının aşağıdaki özelliklere sahip olan kapalı bir F alt kümesine G grubunun bir temel bölgesi denir:

i. $\bigcup_{f \in G} f(F) = X$,
ii. Her $f \in G - \{e\}$ için $\mathring{F} \cap f(\mathring{F}) = \emptyset$.

Örnek 2.1.1 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(z) = z + 3$ olarak tanımlanan f ötelemesi sonsuz devirli bir G grubunu üretir. Şekil 2.1.1 de verilen F kümesi G grubunun bir temel bölgesidir.



Şekil 2.1.1 $\langle z \to z + 3 \rangle$ grubu için bir temel bölge

Bir G grubunun birden fazla temel bölgesi olabilir ve bunların alanları eşittir (Jones ve Singerman, 1987). Bu çalışma boyunca herhangi bir G grubunun bir temel bölgesinin alanı sonlu ise $A(G)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Temel bölgeleri bilinen grupların alt gruplarının indekslerini belirlemede ve indeksleri bilinen alt gruplar için temel bölge belirlemede aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 2.1.1 G bir grup ve G grubunun indeksi N olan bir alt grubu H olsun. Bu durumda

$$\frac{A(H)}{A(G)} = N$$

dir.

Tanım 2.1.3 X bir topolojik uzay ve G, X uzayına etki eden bir grup olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$x\beta y \Leftrightarrow y \in G_x$$

olarak tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik bağıntısına göre bir x elemanının denklik sınıfı, x'in yörüngesidir. Ayrıca, bu bağıntıya göre $X/\beta = \{G_x | x \in X\}$ bölüm kümesi ve $\pi(x) = G_x$ ile verilen $\pi : X \to X/\beta$ fonksiyonu bölüm fonksiyonu olmak üzere,

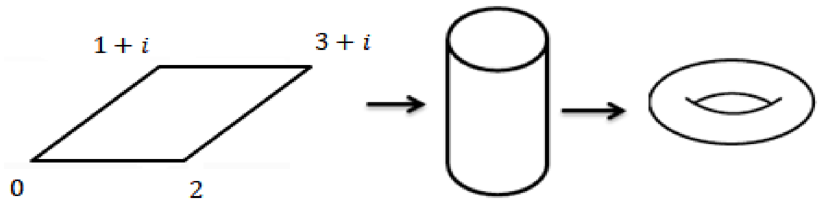
$$\tau_\beta = \{O \subset X/\beta \mid \pi^{-1}(O) \in \tau\}$$

olarak tanımlanan τ_β ailesi X/β kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir. Böylece $(X/\beta, \tau_\beta)$ bir topolojik uzaydır X/β kümesi bu topolojiyle birlikte ele alındığında bir topolojik uzaydır ve $(X/\beta, \tau_\beta)$ topolojik uzayına bölüm uzayı denir.

Burada X/β bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan, $(X/\beta, \tau_\beta)$ topolojik uzayına bazı kaynaklarda yörünge uzayı denir.

Ayrıca, bu bölüm uzayı geometrik olarak şu şekilde elde edilir. $F \subset X$ alt kümesi G grubu için bir temel bölge olsun. Temel bölge tanımı gereğince $\mathring{F}$ kümesindeki herhangi iki nokta aynı denklik sınıfında bulunamaz. Ancak F kümesinin sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı denklik sınıfında bulunabilir. X/β bölüm uzayı, F kümesinin sınırı üzerindeki aynı denklik sınıfında bulunan noktalar birleştirilerek elde edilir.

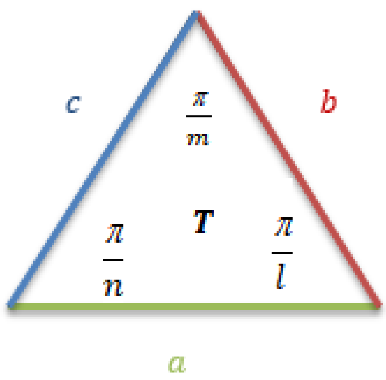
Örnek 2.1.2 Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 2$ ve $g(z) = z + 1 + i$ ile verilen f ve g ötelemelerinin bileşke işlemine göre ürettiği grup G olsun. Bu durumda, köşeleri $0, 2, 1 + i$ ve $3 + i$ olan paralelkenar, G grubu için bir temel bölgedir. Bu temel bölge üzerinde aynı denklik sınıfında olan noktalar birleştirilirse bölüm uzayının tor yüzeyi olduğu görülür (Şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.2 İki öteleme tarafından üretilen bir grubun bölüm uzayı

2.2 Üçgensel Gruplar

l, m, n 1 den büyük pozitif tamsayılar olmak üzere, karmaşık düzlemde iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ radyan olan bir T üçgeni verilsin. Böyle bir üçgen (l, m, n) üçgeni olarak adlandırılır.



Şekil 2.2.1 Bir üçgensel grup için temel bölge

T üçgeninin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımalar fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir G grubunu üretir. Bu grup (l, m, n) üçgensel grubu olarak adlandırılır ve

$$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^l = (bc)^m = (ac)^n = 1 \rangle$$

olarak ifade edilebilir. Şekil 2.2.1'de görülen T üçgeni, grubu G grubu için bir temel bölge olmaktadır. T üçgeni karmaşık düzlemde bulunduğu için $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ve l, m, n sayılarının alabileceği değerlerin; 2,4,4, 2,3,6 ve 3,3,3 olduğu biliniyor. Bu çalışmanın ana konusu $(2,4,4)$ üçgensel grubu ve alt grupları olduğu için $(3,3,3)$ ve $(2,3,6)$ üçgensel grupları dikkate alınmayacaktır.

3. (2,4,4) ÜÇGENSEL GRUBUNUN ALT GRUPLARI

G bir $(2,4,4)$ üçgensel grubu olsun. İşlemlerin daha kolay yapılabilmesi amacıyla birinci bölümde olduğu gibi bu bölümde de G grubu, karmaşık düzlemde köşeleri $0, 1$ ve $1+i$ olan T üçgeninin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki

$$a(z) = \bar{z},\ b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

yansımaları tarafından üretilen grup olarak alınacaktır.

Bu bölümde G grubunun değişik türden alt grupları incelenecek ve her bir türe ait sayılabilir sonsuz alt grup belirlenecektir. Böylece, her bir terimi belli bir türe ait ve G grubunun alt grubu olan bir dizi elde edilecektir.

3.1. Üçgensel Alt Gruplar

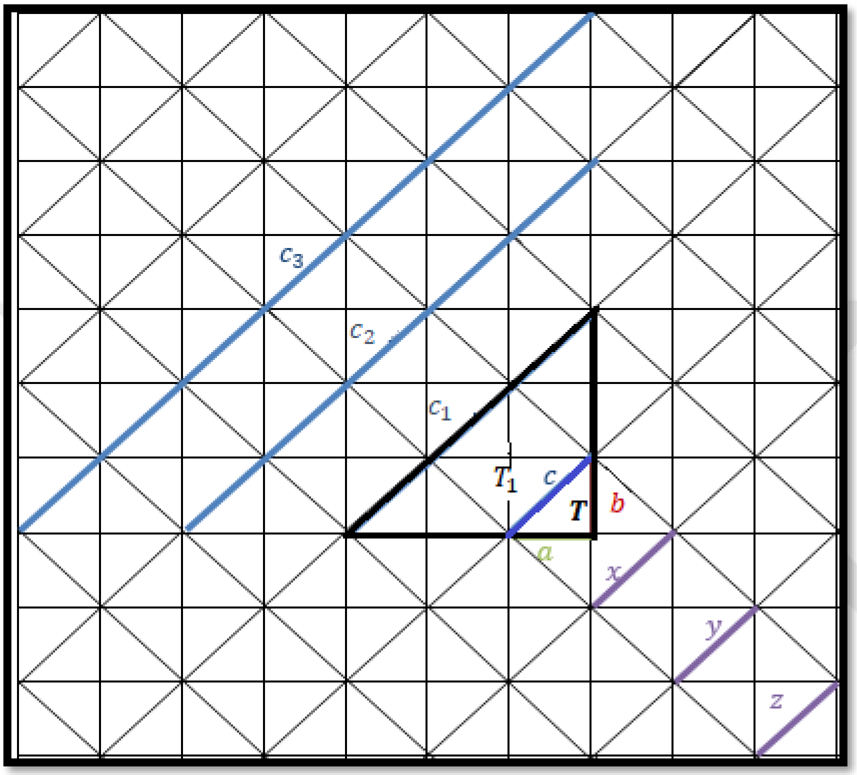
G grubunda

$$x = (ab)c(ab)^{-1} = abcba$$

elemanı c ile eşleniktir. Eşlenik elemanlar aynı türden oldukları için x elemanı da bir yansımadır. Aynı sebepten dolayı

$$c_1 = cxc = cabcbac = c(abc)^2$$

elemanı da G grubunda bir yansımadır. Şekil 3.1.1'de görüldüğü gibi; T_1 üçgeninin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımalar a, b ve c_1'dir. T_1 üçgeninin alanı, T üçgeninin alanının 9 katıdır. O halde Teorem 2.1.1 gereğince a, b ve c_1 yansımaları G'nin indeksi 9 olan bir G_1 alt grubunu üretirler. Ayrıca $G_1 = \langle a, b, c_1 \rangle$ grubunun bir $(2,4,4)$ üçgensel grubu olduğu açıktır.



Şekil 3.1.1 G_1 grubu için bir temel bölge

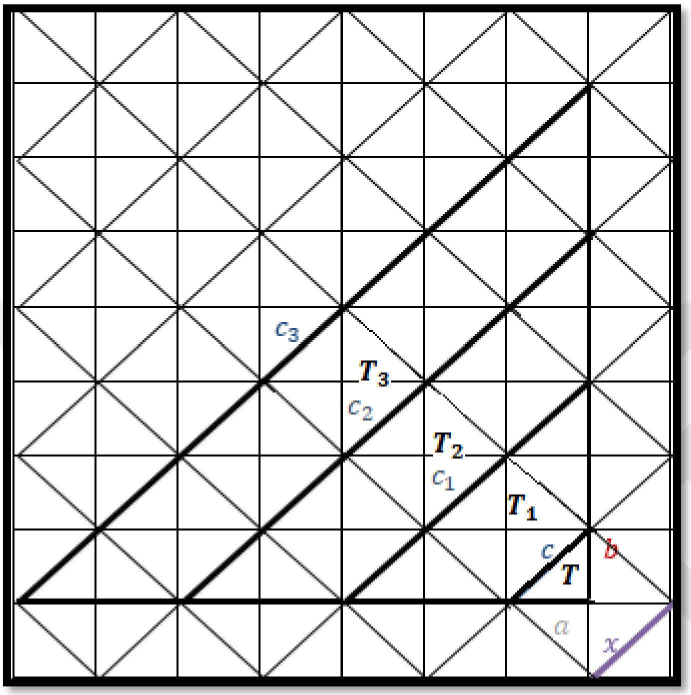
Benzer şekilde,

$$y = abc_1(ab)^{-1} = abcabcbacba$$

ve

$$c_2 = cyc = cabcabcbacbac = c(abc)^4$$

elemanları G grubunda yansımalardır.

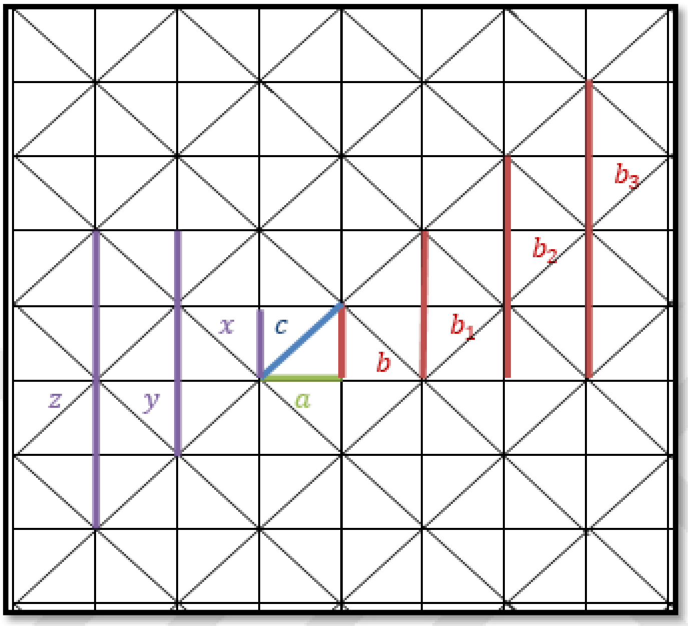


Şekil 3.1.2 Üçgensel alt gruplar için temel bölgeler

Şekil 3.1.2'de görüldüğü gibi; T_2 üçgeninin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımalar a, b ve c_2 dir. T_2 üçgeninin alanı, T üçgeninin alanının 25 katıdır. Böylece a, b ve c_2 yansımaları G grubunun indeksi 25 olan bir G_2 alt grubunu üretirler. Ayrıca, $G_2 = \langle a, b, c_2 \rangle$ grubu da bir $(2, 4, 4)$ üçgensel grubudur.

Yukarıda yapılan işlemlere benzer şekilde devam edilirse, n. adımda G grubunun a, b ve $c_n = c(abc)^{2n}$ yansımaları tarafından üretilen G_n üçgensel alt grubu elde edilir. Temel bölgelerin alanları dikkate alınarak Teorem 2.1.1. yardımıyla G_n alt grubunun G grubundaki indeksinin $(2n + 1)^2$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, terimleri G grubunun üçgensel alt gruplarından oluşan ve genel terimi $\mathrm{G}_n = \langle a, b, c_n \rangle$ olan bir $\{\mathrm{G}_n\}$ dizisi elde edilmiştir.



Şekil 3.1.3 a yansıması ile eşlenik olan yansımalar

Şimdi de G grubunun her m pozitif tam sayısına karşılık $G_m = \langle a, c, b_m \rangle$ biçimindeki alt gruplarını elde edelim. Şekil 3.1.3'te görüldüğü gibi, a yansıması ile eşlenik olan

$$x = cac$$

elemanı ve x ile eşlenik olan

$$b_1 = bxb = bcacb = (bcac)b$$

elemanları G grubunun birer yansımasıdır. Ayrıca, a, c, b_1 yansımaları tarafından üretilen G_1 grubu G grubunun bir $(2,4,4)$ üçgensel alt grubudur. Bu yansımaların sabit tuttuğu doğrular tarafından sınırlanan ve alanı T üçgeninin alanının 4 katı olan ikizkenar dik üçgen G_1 grubu için bir temel bölgedir. O halde G_1 alt grubunun G grubundaki indeksi 4 olur.

Benzer şekilde,

$$y = xbx = cacbcac$$

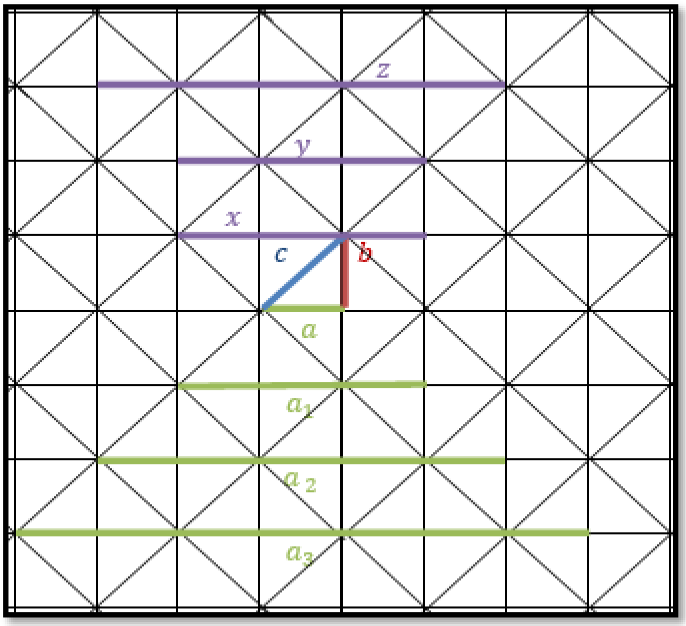
ve

$$b_2 = byb = bcacbcacb = (bcac)^2 b$$

elemanlarının her ikisi de G grubunda yansıma olan elemanlardır ve a, c, b_2 yansımaları tarafından üretilen G_2 grubu, G grubunun bir $(2,4,4)$ üçgensel alt grubudur. Bu yansımaların sabit tuttuğu doğrular tarafından sınırlanan ve alanı T üçgeninin alanının 9 katı olan ikizkenar dik üçgen G_2 grubu için bir temel bölge olur. Dolayısıyla G_2 alt grubunun G grubundaki indeksi 9 dur.

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde devam edilirse, m. adımda G grubunun a, c ve $b_m = (bcac)^m b$ yansımaları tarafından üretilen G_m üçgensel alt grubu elde edilir. Temel bölgelerin alanları dikkate alındığında G_m alt grubunun G grubundaki indeksinin $(n+1)^2$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, terimleri G grubunun $(2,4,4)$ üçgensel alt gruplarından oluşan ve genel terimi $G_m = \langle a, c, b_m \rangle$ olan bir $\{G_m\}$ dizisi elde edilmiştir.



Şekil 3.1.4 b yansıması ile eşlenik olan yansımalar

Son olarak G grubunun her k pozitif tam sayısına karşılık $G_k = \langle b, c, a_k \rangle$ biçimindeki alt gruplarını elde edelim. Şekil 3.1.4'te görüldüğü gibi, b yansıması ile eşlenik olan

$$x = cbc$$

elemanı ve bununla eşlenik olan

$$a_1 = axa = acbca = (acbc)a$$

elemanı G grubunun birer yansımasıdır. Bu durumda, b, c, a_1 yansımaları tarafından üretilen G_1 grubu G grubunun bir $(2, 4, 4)$ üçgensel alt grubudur. b, c, a_1 yansımalarının sabit tuttuğu doğrular tarafından sınırlanan ve alanı T üçgeninin alanının 4 katı olan ikizkenar dik üçgen G_1 grubu için bir temel bölgedir. O halde G_1 alt grubunun G grubundaki indeksi 4 olur.

Benzer şekilde,

$$y = xax = cbcacbc$$

ve

$$a_2 = aya = acbcacbca = (acbc)^2a$$

elemanlarının her ikisi de G grubunda bir yansımadır. Ayrıca, b, c, a_2 yansımaları tarafından üretilen G_2 grubu, G grubunun bir alt grubudur. Daha önceki irdelemeler dikkate alındığında G_2 alt grubunun G grubundaki indeksinin 9 olduğu görülür.

Aynı yol izlenerek, k. adımda G grubunun b, c ve $a_k = (acbc)^k a$ yansımaları tarafından üretilen G_k üçgensel alt grubu elde edilir. Temel bölgelerin alanları dikkate alındığında G_k alt grubunun G grubundaki indeksinin $(n + 1)^2$ olduğu görülür.

Böylece, terimleri G grubunun $(2, 4, 4)$ üçgensel alt gruplarından oluşan ve genel terimi $G_k = \langle b, c, a_k \rangle$ olan bir $\{G_k\}$ dizisi elde edilmiştir.

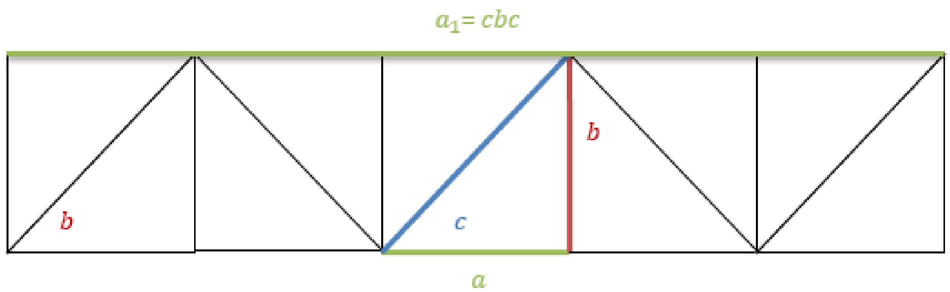
G grubunun şu ana kadar elde edilen alt gruplarının üreteçlerinden sadece bir tanesi G grubunun üreteçlerinden farklı idi. Bu durum işlemleri kolaylaştırmaktadır. Ancak G grubunun üreteçlerinin üçü de a, b, c den farklı olan üçgensel alt grupları da mevcuttur. Örneğin bu kısımda karşılaşılan $a_1 = acbca,\ b_1 = bcacb$ ve $c_1 = cabcbac$ elemanları G grubunun indeksi 25 olan bir üçgensel alt grubunu üretir. Eğer bu düşünce genelleştirilirse, her n pozitif tam sayısına karşılık G grubunun $a_n = (acbc)^n a,\ b_n = (bcac)^n b$ ve $c_n = c(abc)^{2n}$ yansımaları tarafından üretilen ve indeksi $(4n+1)^2$ olan bir G_n üçgensel alt grubu ve dolayısyla $\{G_n\}$ alt grup dizisi elde edilir.

3.2. Silindirik Alt Gruplar

Karmaşık düzlemde bir ötelemenin iki paralel doğru üzerindeki yansımaların bileşkesi olarak ifade edilebileceği, bir öteleme tarafından üretilen bir H grubunun $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorf olduğu ve $\mathbb{C}/H$ bölüm uzayının bir sonsuz silindir olduğu biliniyor. Bu nedenle H grubu silindirik grup olarak adlandırılır.

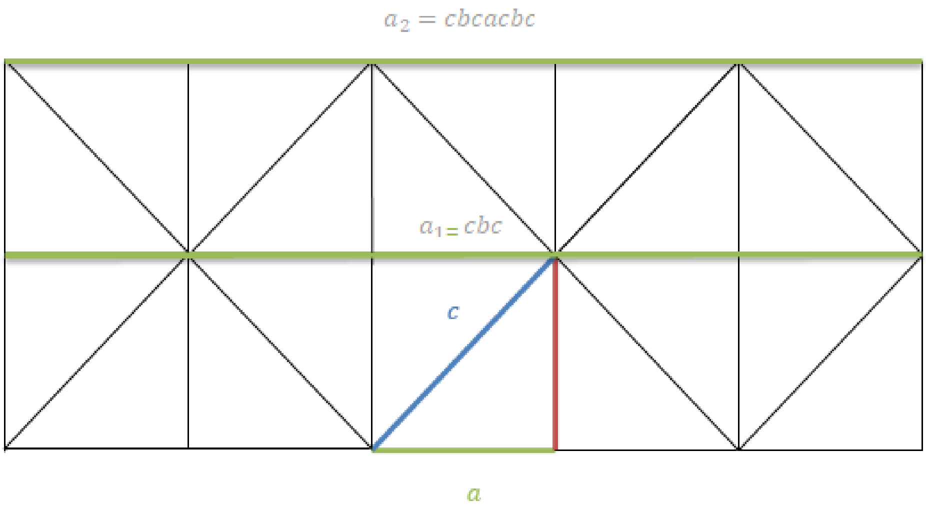
a, b ve c, bu bölümün başında verilen G grubunu üreten yansımalar olmak üzere, bu yansımaların sabit tuttuğu doğrulara paralel olan doğrular üzerindeki yansımalar yardımıyla bu kısımda G grubunun silindirik alt grup aileleri elde edilecektir.

$a_1 = cbc$ elemanı b ile eşlenik olduğundan G grubunda bir yansımadır. Ayrıca a_1 ve a yansımalarının sabit tuttukları doğrular paraleldir, Şekil 3.2.1. Bu nedenle $a_1 a = cbca$ bir ötelemedir ve $A_1 = \langle a_1 a \rangle$ grubunu üretir. $\mathbb{C}/A_1$ bölüm uzayı bir sonsuz silindir olduğundan, A_1 grubu G grubunun bir silindirik alt grubudur.



Şekil 3.2.1 A_1 grubunu üreten a ve a_1 yansımaları

$a_2 = cbca(cbc)^{-1} = cbcacbc$ elemanı a ile eşlenik olduğundan G grubunda bir yansımadır. a_2 ve a yansımalarının sabit tuttukları doğrular paralel olduğundan, $a_2 a = cbcacbca = (cbca)^2$ bir ötelemedir ve $A_2 = \langle a_2 a \rangle$ grubunu üretir, Şekil 3.2.2. Benzer şekilde, $\mathbb{C}/A_2$ bölüm uzayı bir sonsuz silindirdir ve A_2 grubu G grubunun bir silindirik alt grubudur.



Şekil 3.2.2 A_2 grubunu üreten a ve a_2 yansımaları

$$a_3 = (cbcacbc)cbc(cbcacbc) = cbcacbccbccbcacbc = cbcacbcacbc$$

elemanı b elemanı ile eşlenik olduğundan G grubunda bir yansımadır. a_3 ve a yansımalarının sabit tuttukları doğrular paralel olduğundan,

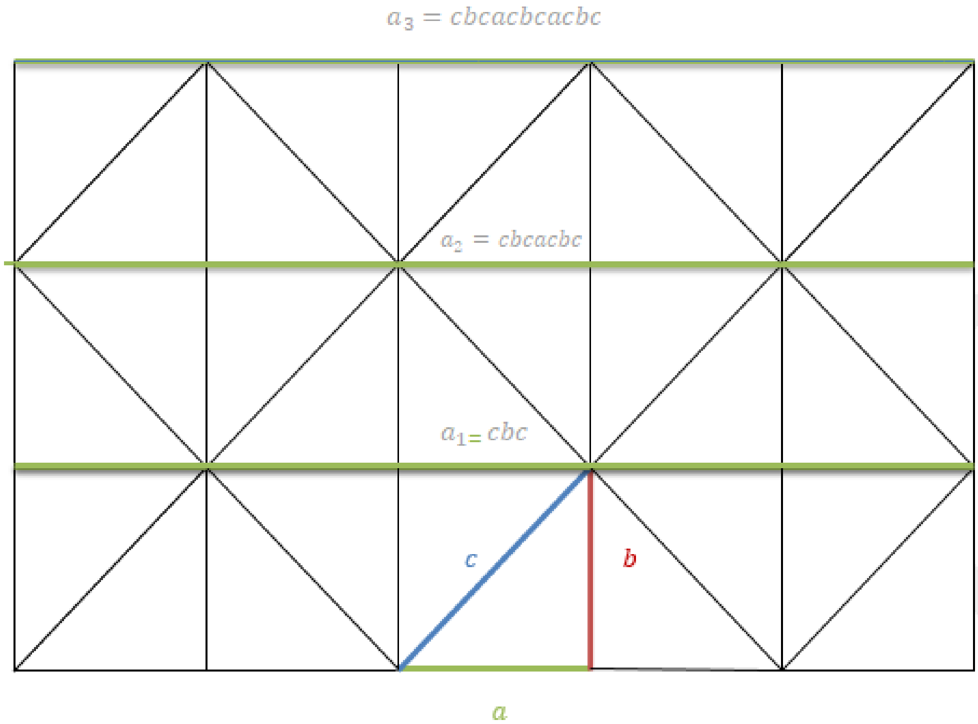
$$a_3 a = cbcacbccbccbcacbca = (cbca)^3$$

bir ötelemedir ve $A_3 = \langle a_3 a \rangle$ grubunu üretir, Şekil 3.2.3. Benzer şekilde, $\mathbb{C}/A_3$ bölüm uzayı bir sonsuz silindirdir ve A_3 grubu G grubunun bir silindirik alt grubudur.

Benzer işlemler yapılarak G grubunun, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n a = (cbca)^n$ ötelemesi tarafından üretilen $A_n = \langle (cbca)^n \rangle$ silindirik alt grubu elde edilir.

Sonuç olarak, terimleri G grubunun silindirik alt gruplarından oluşan bir $\{A_n\}$ dizisi elde edilmiştir.

Burada her $n \in \mathbb{Z}^+$ için A_n alt grubunun elemanları, b yansıması tarafından sabit tutulan doğruya paralel olan ötelemelerdir.



Şekil 3.2.3 A_3 grubunu üreten a ve a_3 yansımaları

Benzer şekilde, her $m \in \mathbb{Z}^+$ için a yansıması tarafından sabit tutulan doğruya paralel olan $(cacb)^m$ biçimindeki ötelemeler tarafından üretilen $B_m = \langle (cacb)^m \rangle$ gruplarından $\{B_m\}$ dizisi elde edilir.

Son olarak, her $k \in \mathbb{Z}^+$ için c yansıması tarafından sabit tutulan doğruya dik olan doğrular boyunca $(abc)^{2k}$ biçimindeki ötelemeler tarafından üretilen $C_k = \langle (abc)^{2k} \rangle$ gruplarından $\{C_k\}$ dizisi elde edilir.

G grubunun yansıma olan elemanlarının sabit tuttuğu paralel doğrulardan oluşan 3 farklı aile bulunmaktadır. Bu nedenle G grubunun herhangi bir silindirik alt grubu yukarıda tanımlanan $\{A_n\}$, $\{B_m\}$ veya $\{C_k\}$ dizilerinden herhangi birinin bir terimi olmak zorundadır.

3.3 Torsal Alt Gruplar

İkinci bölümde görüldüğü gibi, karmaşık düzlemde lineer bağımsız iki öteleme tarafından üretilen bir H grubu için $\mathbb{C}/H$ bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Böyle bir H grubuna torsal grup denir. Bu bölümde ele alınan ve

$$a(z) = \bar{z},\ b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

yansımaları tarafından üretilen G grubunun öteleme olan bazı elemanları bir önceki kısımda verilmiştir. Şimdi bunlar kullanılarak G grubu için sonsuz torsal alt grup belirlenecektir.

Bir önceki kısımda görüldüğü üzere, $f_1 = cbca$ ve $g_1 = bcac$ elemanları G grubunda ötelemelerdir ve bu ötelemeler

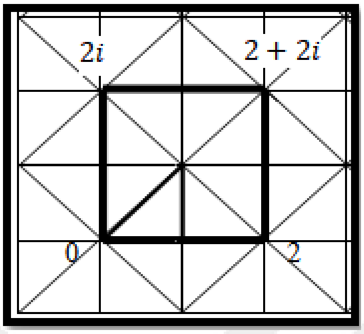
$$f_1(z) = cbca(z) = z + 2i \ \text{ ve } \ g_1(z) = bcac(z) = z + 2$$

olarak daha açık biçimde verilebilir. Bu iki ötelemenin ürettiği grup τ_1 notasyonu ile gösterilsin. Köşeleri $0, 2, 2i$ ve $2 + 2i$ olan kare $\tau_1 = \langle cbca, bcac \rangle$ grubu için bir temel bölgedir, Şekil 3.3.1. Bu karenin alanı G grubunun temel bölgesinin alanının 8 katı olduğundan, τ_1 alt grubunun G grubundaki indeksi 8 dir. Yukarıda açıklanan geometrik sebeplerden dolayı G grubunun indeksi 8 den daha küçük olan bir torsal alt grubu mevcut değildir. Dolayısıyla τ_1 grubu G grubunun indeksi en küçük olan torsal alt grubudur ve son bölümde verilen Çizelge 4.1 in on dördüncü satırında yer alan gruptur.

Şekil 3.3.1'den yararlanılarak, $f_2 = cbcacbca$ ve $g_2 = bcacbcac$ elemanlarının G grubunda öteleme oldukları ve

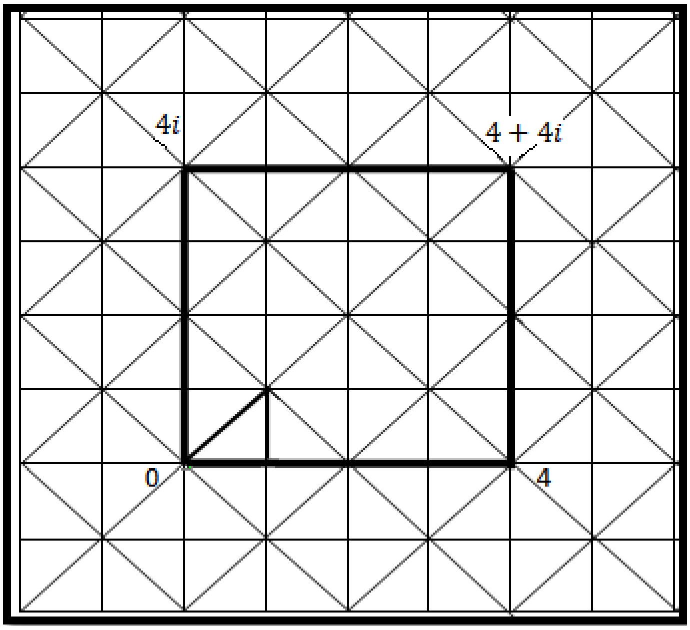
$$f_2(z) = z + 4i \ \text{ ve } \ g_2(z) = z + 4$$

olarak verilebilecekleri kolayca görülebilir. Bu iki ötelemenin ürettiği grup τ_2 notasyonu ile gösterilsin. Köşeleri $0, 4, 4i$ ve $4 + 4i$ olan kare τ_2 grubu için bir temel bölgedir, Şekil 3.3.2. Bu karenin alanı G grubunun temel bölgesinin alanının 32 katı olduğundan, τ_2 alt grubunun G deki indeksi 32 dir.



Şekil 3.3.1 τ_1 grubu için bir temel bölge

τ_1 ve τ_2 alt grupları belirlenirken izlenilen yol tekrar edilerek, her n pozitif tam sayısına karşılık G grubunun, $f_n = (cbca)^n$ ve $g_n = (bcac)^n$ ötelemeleri tarafından üretilen $\tau_n = \langle f_n, g_n \rangle$ torsal alt grubu elde edilir. Temel bölgelerin alanları karşılaştırılarak τ_n grubunun G grubundaki indeksinin $|G : \tau_n| = 8n^2$ olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 3.3.2 τ_2 grubu için bir temel bölge

Böylece, terimleri G grubunun torsal alt gruplarından oluşan ve genel terimi $\tau_n = \langle f_n, g_n \rangle$ olan bir $\{\tau_n\}$ dizisi elde edilmiştir.

3.4 Dikdörtgensel Alt Gruplar

D karmaşık düzlemde bir dikdörtgen ve bu dikdörtgenin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımalar x, y, u, v olsun. Bu yansımalar

$$x^2 = y^2 = u^2 = v^2 = (xy)^2 = (yu)^2 = (uv)^2 = (vx)^2 = 1$$

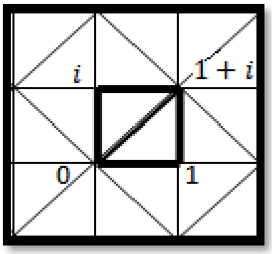
bağıntılarını sağlar ve fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir H grubunu üretir. Bu gruba dikdörtgensel grup denir.

D dikdörtgeninin H grubunun elemanları altındaki görüntülerinin birleşiminin karmaşık düzlemi verdiği ve temel bölge özelliklerini sağladığı açıktır. Dolayısıyla karmaşık düzlemde herhangi bir dikdörtgen, kenarlarını içeren doğrular üzerindeki yansımaların ürettiği dikdörtgensel grup için bir temel bölgedir.

Örneğin karmaşık düzlemde köşeleri $0, 1, i$ ve $1 + i$ olan karenin kenarlarını içeren doğruları sabit tutan ve

$$x(z) = \bar{z},\ y(z) = -\bar{z},\ u(z) = \bar{z} + 2i \text{ ve } v(z) = -\bar{z} + 2$$

olarak verilen x, y, u, v yansımaları bir D_1 grubunu üretir. Bu grup bir dikdörtgensel gruptur ve yukarıda bahsedilen kare bu grup için bir temel bölgedir, Şekil 3.4.1.



Şekil 3.4.1 D_1 grubu için bir temel bölge

D_1 grubunun bu temel bölgesinin alanı,

$$a(z) = \bar{z},\ b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

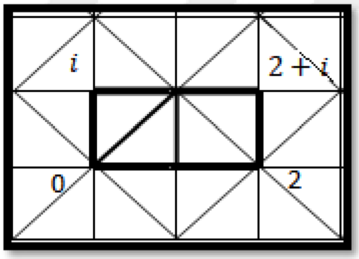
yansımaları tarafından üretilen G üçgensel grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanının iki katı olduğundan, D_1 grubu G grubunun indeksi 2 olan bir alt grubudur ve a, b, cac ve cbc elemanları tarafından üretilmektedir. D_1 grubu ayrıca son bölümde verilen Çizelge 4.1 in dördüncü satırında yer alan gruptur.

Bu kısımda, G üçgensel grubunun dikdörtgensel alt gruplarından oluşan bir $\{D_n\}$ dizisi elde edilecektir.

Yukarıda verilen D_1 grubunda olduğu gibi, köşeleri $0, 2, i$ ve $2+i$ olan dikdörtgenin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki

$$x(z) = \bar{z},\ y(z) = -\bar{z},\ u(z) = \bar{z} + 2i \text{ ve } v(z) = -\bar{z} + 4$$

yansımaları bir D_2 dikdörtgensel grubunu üretir. Köşeleri $0, 2, i$ ve $2+i$ olan dikdörtgen D_2 grubu için bir temel bölgedir ve G grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanının dört katıdır, Şekil 3.4.2. Bu nedenle D_2 grubu G grubunun indeksi 4 olan bir alt grubudur.



Şekil 3.4.2 D_2 grubu için bir temel bölge

Benzer şekilde, her n pozitif tam sayısı için, köşeleri $0, n, i$ ve $n+i$ olan dikdörtgenin kenarlarını sabit tutan

$$x(z) = \bar{z},\ y(z) = -\bar{z},\ u(z) = \bar{z} + 2i \text{ ve } v(z) = -\bar{z} + 2n$$

yansımaları tarafından üretilen bir D_n dikdörtgensel grubu elde edilebilir. Bu grup, G grubunun indeksi $2n$ olan bir alt grubudur.

Sonuç olarak, terimleri G grubunun dikdörtgensel alt gruplarından oluşan bir $\{D_n\}$ dizisi elde edilmiştir.

Kenarları G grubunun yansımaları tarafından sabit tutulan dikdörtgenler yardımıyla, G grubunun başka dikdörtgensel alt grup dizileri benzer biçimde elde edilebilir.

3.5 Küresel Alt Gruplar

$(2,4,4)$ üçgensel grubunun, karmaşık düzlemde bir ikizkenar dik üçgenin kenarlarını üzerinde bulunduran üç doğru üzerindeki yansımalar tarafından üretildiği ve

$$\langle a,b,c | a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^4 = (ca)^4 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilebileceği biliniyor. Burada ab, bc ve ca elemanları, söz konusu ikizkenar dik üçgenin köşeleri etrafında sırasıyla 180, 90 ve 90 derecelik döndürmelerdir. Bu üç döndürme $(2,4,4)$ üçgensel grubunun indeksi 2 olan bir H alt grubunu üretir.

$$X = ab \text{ ve } Y = bc$$

olmak üzere H grubu,

$$\langle X,Y | X^2 = Y^4 = (XY)^4 = 1 \rangle$$

olarak ifade edilebilir. Köşeleri $0, 1$ ve $1+i$ olan üçgenin $(2,4,4)$ üçgensel grubu için bir temel olduğu biliniyor. H grubunun elemanları altında bu üçgenin görüntülerinin birleşimi karmaşık düzlemi kaplamaz ve dolayısıyla aynı üçgen H grubu için bir temel bölge olamaz. O halde H alt grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanı, üçgensel grubun herhangi bir temel bölgesinin alanının en az 2 katı olmak zorundadır. Eğer $(2,4,4)$ üçgensel grubunun üreteçleri olarak

$$a(z) = \bar{z}\,,\ \ b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

yansımaları alınırsa, sırasıyla $1, 1+i$ ve 0 noktalarını sabit tutan aşağıdaki döndürmeler elde edilir:

$$X(z) = ab(z) = -z + 2\,,\ \ Y(z) = bc(z) = iz + 2 \ \text{ ve } \ XY(z) = ca(z) = -iz.$$

Köşeleri $0, 1$ ve $1+i$ olan ikizkenar dik üçgen $(2,4,4)$ üçgensel grubu için bir temel bölge olduğundan, örneğin köşeleri $0, 1, i$ ve $1+i$ olan kare H grubu için bir temel bölgedir. Teorem 2.1.1 gereğince H grubunun G grubundaki indeksi 2 olur. Ayrıca, $\mathbb{C}/H$ bölüm uzayının küreye homeomorf olduğu görülür. Bu nedenle H grubu ve üçgensel grupların benzer biçimde elde edilen alt grupları küresel olarak adlandırılır.

Karmaşık düzlemde bir dikdörtgenin kenarlarını üzerinde bulunduran dört doğru üzerindeki x, y, u, v yansımalarının

$$\langle x, y, u, v | x^2 = y^2 = u^2 = v^2 = (xy)^2 = (yu)^2 = (uv)^2 = (vx)^2 = 1 \rangle$$

biçiminde ifade edilebilen bir G dikdörtgensel grubunu ürettiği biliniyor. Burada xy, yu, uv ve vx elemanlarının her biri, söz konusu dikdörtgenin köşeleri etrafında 180 derecelik döndürmedir. Bu döndürmeler G dikdörtgensel grubunun indeksi 2 olan bir K alt grubunu üretir. Bu grup,

$$A = xy, B = yu \text{ ve } C = uv$$

olmak üzere

$$\langle A, B, C | A^2 = B^2 = C^2 = (ABC)^2 = 1 \rangle$$

olarak ifade edilebilir.

K alt grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanı, G grubunun herhangi bir temel bölgesinin alanının 2 katı olacağı için, yukarıda sözü edilen dikdörtgen ile bunun x, y, u, v yansımalarından herhangi biri altındaki görüntüsü olan dikdörtgen ile birleşimi K alt grubu için bir temel bölge olur. Bu şekilde oluşturulan bir temel bölge dikkate alınarak, $\mathbb{C}/K$ bölüm uzayının da küreye homeomorf olduğu görülür. Dolayısıyla K grubu da küresel olarak adlandırılır.

O halde $(2, 4, 4)$ üçgensel grubunun bir küresel alt grubu iki veya üç döndürme tarafından üretilir. Böylece, dördüncü bölümde verilen Çizelge 4.1 de yer alan bir küresel grubun üreteç sayısı dikkate alınarak, bir üçgensel veya dikdörtgensel grup tarafından indeksi 2 olan bir alt grup olarak içerildiği kolayca saptanabilir.

3.6 Sonlu Alt Gruplar

G grubunun sonlu alt grupları devirli veya dihedraldir (Armstrong, 1988). Devirli bir alt grup bir yansıma veya döndürme tarafından üretilir. Bir döndürme tarafından üretilen alt grubun mertebesi 2 veya 4 olacağı açıktır. Dolayısıyla G grubunun devirli bir alt grubu $\mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_4$ grubuna izomorftur.

n pozitif tamsayısı 1 den büyük olmak üzere, kesişen iki doğru arasındaki açının ölçüsü $\frac{\pi}{n}$ radyan olsun. Bu durumda bu doğrular üzerindeki yansımaların ürettiği grup,

$$\langle A, B | A^2 = B^2 = (AB)^n = 1 \rangle$$

olarak ifade edilebilen D_n dihedral grubuna izomorftur.

G grubunun yansımaları tarafından sabit tutulan herhangi iki doğru arasındaki açının ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{4}$ radyan olduğu için G grubunun herhangi bir dihedral alt grubu D_2 veya D_4 grubuna izomorf olur.

Örneğin G grubunun standart üreteçleri olarak alınan

$$a(z) = \bar{z},\ b(z) = -\bar{z} + 2 \text{ ve } c(z) = i\bar{z}$$

yansımaları tarafından üretilen dihedral gruplar aşağıda verilmiştir:

$$\langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_2,$$

$$\langle a, c \rangle \cong D_4,$$

$$\langle b, c \rangle \cong D_4.$$

Sonuç olarak, G grubunun D_2 ve D_4 gruplarından başka dihedral alt grubu mevcut değildir.

4. (2,4,4) ÜÇGENSEL GRUBUNUN BAZI KOMPAKT ALT GRUPLARI

Karmaşık düzlemin izometrilerinden oluşan ve bölüm uzayı kompakt olan bir grup kompakt olarak adlandırılır.

Dolayısıyla G bir $(2,4,4)$ üçgensel grubu olmak üzere, G grubunun üçgensel, dikdörtgensel, küresel ve torsal alt grupları kompakttır ama silindirik alt grupları kompakt değildir. G grubunun sonlu alt grupları olan devirli ve dihedral gruplara ait temel bölgeler kompakt olmadığı için bunlara karşılık gelen bölüm uzayları da kompakt değildir.

Bu bölümün temel amacı, MAGMA yardımıyla G üçgensel grubunun indeksi 10 dan küçük veya eşit olan ve üçüncü bölümde incelenen türlere ait alt gruplarını belirlemektir.

G grubunun silindirik ve sonlu alt grupları kompakt olmadıkları için bunların G grubundaki indeksleri sonlu değildir. Bu sebeple söz konusu gruplar hariç tutularak, G grubunun sadece üçgensel, dikdörtgensel, küresel ve torsal alt grupları dikkate alınmıştır.

Bu kısımda yapılan hesaplamalar, MAGMA nın aşağıda verilen kodları kullanılarak yapılmıştır (Bosma vd, 1997):

```
> G< a,b,c >:= Group<a,b,c | a^2, b^2, c^2, (a*b)^2, (b*c)^4, (c*a)^4>;

> L:=LowIndexSubgroups(G,10);

> #L;

> L;
```

Belirlenen alt grupların G grubundaki indeksleri, üreteçleri ve türleri Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Daha önce olduğu gibi, bu bölümde de G grubu karmaşık düzlemde köşeleri $0, 1$ ve $1+i$ olan üçgenin kenarlarını içeren doğrular üzerindeki

$$a(z)=\bar{z},\ b(z)=-\bar{z}+2 \text{ ve } c(z)=i\bar{z}$$

yansımaları tarafından üretilen grup olarak alınmıştır. Dolayısıyla belirlenen alt grupların Çizelge 4.1 in üçüncü sütununda yer alan üreteçleri, G grubunun yukarıda verilen ve üçüncü bölümde de standart olarak kullanılan a, b ve c üreteçleri cinsinden ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde G grubunun sonsuz torsal alt grubunun mevcut olduğu görülmüştür. Bu alt gruplardan biri hariç diğerlerinin G grubundaki indeksi 10 dan büyüktür. Bu sebeple Çizelge 4.1 in on dördüncü satırında yer alan ve $cbca$ ile $bcac$ ötelemeleri tarafından üretilen grup, G grubunun indeksi en küçük olan torsal alt grubudur.

Çizelge 4.1 den ayrıca, G grubunun indeksi en küçük olan küresel alt grubunun birinci satırda, dikdörtgensel alt grubunun ise dördüncü satırda yer aldığı görülmektedir. İkinci ve üçüncü satırlarda bulunan gruplar ise G grubunun indeksi en küçük olan üçgensel alt gruplarıdır.

(2,4,4) üçgensel grubunun herhangi bir alt grubunun ötelemeli yansıma olan elemanı mevcutsa bu alt grubun bölüm uzayı Möbius şeridi, Klein şişesi veya projektif düzlemdir.

Örneğin

$$f(z) = cbca(z) = z + 2i \text{ ve } g(z) = abcac(z) = \bar{z} + 2$$

olarak verilen f ve g fonksiyonları karmaşık düzlemde sırasıyla bir öteleme ve ötelemeli yansımadır. Bunların ürettiği alt grubun G grubundaki indeksi 16 olup bölüm uzayı ise bir Klein şişesidir.

Möbius şeridi, Klein şişesi ve projektif düzlem kompakttır ama yönlendirilemez yüzeylerdir. Bu nedenle (2,4,4) üçgensel grubunun ötelemeli yansıma içeren alt gruplarına Çizelge 4.1 de yer verilmemiştir.

(2,4,4) üçgensel grubunun bir döndürme ve bir yansıma tarafından üretilen alt gruplarının bölüm uzayları diske homeomorf oldukları için kompakttır ama Çizelge 4.1 de bu tür alt gruplara da yer verilmemiştir.

Çizelge 4. 1 (2,4,4) üçgensel grubunun bazı kompakt alt grupları

	İndeks	**Üreteçler**	**Tür**
1	2	ba ca	Küresel
2	2	b c aca	Üçgensel
3	2	a c bcb	Üçgensel
4	2	a b cac cbc	Dikdörtgensel
5	4	cb $acba$	Küresel
6	4	ca $bcba$	Küresel
7	4	c aca bcb $abcba$	Dikdörtgensel
8	4	ba $(ca)^2$ $cbca$	Küresel
9	4	b c $acbca$	Üçgensel
10	4	a c $bcacb$	Üçgensel
11	4	a b cbc $cacbcac$	Dikdörtgensel
12	4	a b cac $cbcacbc$	Dikdörtgensel

13	6	a b cac $cbcacbcacbc$	Dikdörtgensel
14	8	$cbca$ $bcac$	Torsal
15	8	$(ca)^2$ $(cb)^2$ $acbcba$	Küresel
16	8	cb $acbcba$	Küresel
17	8	cac $bcacba$	Küresel
18	8	c aca bcb $abcabcbacba$	Dikdörtgensel
19	8	ba $caba$ $acbaca$	Küresel
20	8	ba $cbca$ $cacbcaca$	Küresel
21	8	ba $(ca)^2$ $(cbca)^2$	Küresel
22	8	b cbc $acbca$ $cacbcac$	Dikdörtgensel
23	8	b c $acabcbaca$	Üçgensel
24	8	a c $bcabcbacb$	Üçgensel
25	8	a b $cacbcac$ $cbcacbc$	Dikdörtgensel

26	8	a b cbc $cacbcacbcacbcac$	Dikdörtgensel
27	8	a b cac $cbcacbcacbcacbc$	Dikdörtgensel
28	9	a b $cabcbac$	Üçgensel
29	10	ba $cacbca$	Küresel
30	10	a b cac $cbcacbcacbcacbcacbc$	Dikdörtgensel

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak (2,4,4) üçgensel grubunun alt grupları incelenmiş ve bunlar bölüm uzaylarına göre sınıflandırılmıştır. Ayrıca, (2,4,4) üçgensel grubunun indeksi 10 dan küçük veya eşit olan alt grupları ve bunların her biri için birer üreteç kümesi belirlenmiştir.

Sonraki çalışmalarda, (2,4,4) üçgensel grubunun silindirik alt grupları ve bunların bölüm uzayları olan silindirler incelenebilir. Bu silindirler üzerinde tipi {4,4} olan düzgün figürler mevcuttur (Jones ve Singerman, 1978). Melekoğlu (2008, 2018) tarafından düzgün figürlerin yansımaları konusunda yapılan çalışmaların benzerleri bu düzgün figürler için de yapılabilir.

KAYNAKLAR

Alling, N., Greenleaf, N. 1971. Foundations of the Theory of Klein surfaces. Lecture Notes in Math. 219, Springer- Verlag, ix+117pp.

Armstrong, M.A. 1988. Groups and Symmetry. Springer- Verlag, ix+186pp.

Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C. 1997. The Magma Algebra System I: The User Language. **Journal of Symbolic Computation**, 24: 235–265.

Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. 1980. Geneators and relations for discrete groups. Springer- Verlag, ix+161pp.

Jones, G.A., Singerman, D. 1978. Theory of maps on orientable surfaces. **Proceedings of the London Mathematical Society**, 37(3): 273–307.

Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp.

Melekoğlu, A. 2008. A Geometric Approach to the Reflections of Regular Maps. **Ars Combinatoria**, 89: 355–367.

Melekoğlu, A. 2018. Mirrors of Reflections of Regular Maps. **Ars Mathematica Contemporanea**, 15(2): 347–354.

Melekoğlu, A., Singerman, D. 2016. The structure of mirrors on regular maps on Platonic surfaces. **Geometriae Dedicata**, 181: 239-256.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ceren AYDIN

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Tezsiz)

Yabancı Diller : İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yılları : Kocaeli-Kocaeli Anadolu Lisesi (1999-2000)

Kocaeli-İzmit Hızır Reis İ.Ö.O. (2000-2007)

Aydın- İncirliova Anadolu Lisesi (2007-2010)

İzmir- Bornova Selçuk Yaşar Boyacılık Teknik ve EML (2010-2011)

Aydın- Köşk Anadolu Lisesi (2011-2018)

Aydın- Aydın Ticaret Borsası Bilim ve Sanat Merkezi (2018-

Tarih : 29/01/2021