T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2020-YL-017

YÜKSELEN MODÜLLER ÜZERİNE

Pelin BAĞCI

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Pelin BAĞCI tarafından hazırlanan "Yükselen Modüller Üzerine" başlıklı tez, 03.02.2020 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi A. Tuğba GÜROĞLU	MCBÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Gönül AYDIN
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

03.02.2020

Pelin BAĞCI

ÖZET

YÜKSELEN MODÜLLER ÜZERİNE

Pelin BAĞCI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2020, 69 sayfa

Bu tezde yükselen modüllerin özellikleri ve bu modüllerin hollow-yükselen modüller ve eşçokdüze modüller ile olan ilişkileri incelenmiştir.
Öncelikle giriş bölümünde yükselen modüllerin yıllar içindeki gelişimi incelenmiştir.
İkinci bölümde tez için gerekli olabilecek tanım ve teoremlere yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde yükselen modüller ve yükselen modüllerin karakterizasyonu ele alınmıştır.
Dördüncü bölümde hollow-yükselen modül tanımı, hollow-yükselen modüllerin bazı özellikleri, değişmeli halkalar üzerinde hollow-yükselen modüller ve completely hollow-yükselen modüller başlıkları çalışılmıştır. Ayrıca yükselen modüller ile hollow-yükselen modüllerin ilişkisi detaylı olarak incelenmiştir.
Beşinci ve son bölümde eşçokdüze modüller ile yükselen modüllerin ilişkisi ele alınmıştır.

Anahtar Sözcükler: Yükselen (lifting)modül, hollow-yükselen modül, eşçokdüze (copolyform) modül, essential (large) modül, small (superfluous) modül

ABSTRACT

ON LIFTING MODULES

Pelin BAĞCI

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

2020, 69 pages

In this thesis, properties of lifting modules, their relations with hollow-lifting modules and copolyform modules are presented.
Firstly, in the introduction, the development of the lifting modules over the years has been examined.
In the second chapter, definitions and theorems that may be necessary for the thesis are given.
In the third chapter, lifting modules and characterization of lifting modules are discussed.
In the fourth chapter, the definition of hollow-lifting module, some properties of hollow-lifting modules, hollow-lifting modules on commutative rings and completely hollow-lifting modules are discussed. In addition, the relationship between lifting modules and hollow-lifting modules is examined in detail.
In the fifth and last chapter, the relationship between the copolyform modules and lifting modules is discussed.

Key Words: Lifting module, hollow-lifting module, copolyform module, essential (large) module, small (superfluous) module

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimim süresince bana yol gösteren ve akademik bilgisini en güzel şekilde bana aktaran değerli hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na tüm içtenliğimle teşekkür ederim.
Tüm hayatım boyunca bana inanan, güvenen ve koşulsuz destek olan çok kıymetli anneme, babama ve kardeşime; her zaman beni destekleyen ve bana güç veren sevgili eşime; varlığıyla her daim yaşam enerjimi yükselten canım oğluma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Pelin BAĞCI

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$X \subseteq M$	: X, M nin alt kümesi
$X \subsetneqq M$	: X, M nin öz alt kümesi
M_R	: M sağ R-modül
${}_RM$	: M sol R-modül
${}_SM_R$	: M S-R-bimodül
$A \leq M$	: A, M modülünün altmodülü
$A \lneqq M$	: A, M modülünün öz altmodülü
$A \ll M$	: A, M modülünün small atmodülü
$A \leq_e M$	: A, M modülünün essential altmodülü
$B \leq_d A$	: B, A modülünün direkt toplananı
$A \oplus B$	: A ile B modülünün direkt toplamı
M/A	: M nin A ya bölüm modülü
$\lvert X)$	: M sağ R-modülünün bir X alt kümesi ile üretilen altmodülü
$Hom_R(M,N)$	: M modülünden N modülüne R-modül homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	: M modülünün endomorfizma halkası
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$Ker\alpha$	: α homomorfizmasının çekirdeği
$Im\alpha$	: α homomorfizmasının görüntüsü
$\sum$	: Toplam sembolü
$\bigoplus$	: (İç) direk toplam sembolü
$:\Leftrightarrow$	: Tanım sembolü
$:=$	: Tanım sembolü
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	: Prüfer p-grup
$\square$	: Kanıtın bittiğini gösteren simge
R-MOD	: Sol R-modüllerin kategorisi
$Ann_R(X)$	: R halkasının bir X alt kümesinin, R deki sıfırlayanı

1. GİRİŞ

Geçtiğimiz yıllarda yükselen modüller, bu alanda çalışan araştırmacılar tarafından ağırlıklı olarak çalışılmıştır. Yükselen modüllerin farklı genellemeleri daha önceki çalışmalarda ortaya koyulmuştur. Biz de bu tezde yükselen modülleri, hollow-yükselen modülleri, eşçokdüze (copolyform) modülleri ve bunların birbiriyle ilişkilerini inceledik.

Extending modüller injektif modüllerin genelleştirilmesi ve duali olan yükselen modüller de projektif tümlenmiş modüllerin genelleştirilmesidir. Bir modül yeterli tümlenmiş ve her altmodülü direkt toplanan ise yükselen modüldür [2]. Extending ve lifting (yükselen) terimleri ilk olarak Harada ve Oshiro tarafından tanımlanmıştır [10], [18]. Bir M modülünün herhangi bir N altmodülü için $X \leq N$ ve $N/X \ll M/X$ oluyorsa M yükselen modüldür [2]. Aşağıdaki özelliği verelim:
$(D1)$ Bir M modülünün her A altmodülü için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde bir $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır [16].
$(D1)$ koşulunu sağlayan bir M modülüne yükselen modül denir.

Orhan; [17]'de M/N hollow olacak şekilde M'nin her N altmodülünün M'de bir coessential altmodülü varsa; yani N, M'nin bir direkt toplananı ise M modülüne hollow-yükselen modül demiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümünde çalışmanın içeriği hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın geri kalan kısmında ihtiyacımız olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde [1], [11], [16] çalışmaları temel alınmıştır. Üçüncü bölümde [14] çalışması temel alınarak yükselen modül tanımına ve yükselen modüllerin karakterizasyonuna yer verilmiştir. Dördüncü bölümde hollow-yükselen modül tanımı, hollow-yükselen modüllerin bazı özellikleri, değişmeli halkalar üzerinde hollow-yükselen modüller ve tamamen hollow-yükselen modüller çalışılmıştır [17]. Beşinci bölümde eşçokdüze modüller ile yükselen modüllerin ilişkisi incelenmiştir [9].

2. TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde tez için gerekli olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1. [11] R bir halka olsun.
(I) M bir toplamsal değişmeli grup,
(II) $M \times R \longrightarrow M$, $(m, r) \mapsto mr$ dönüşümü için m, m_1, m_2, M'nin elemanları ve r, r_1, r_2, R'nin elemanları olmak üzere;
(1) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$
(2) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

$$m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$$

özelliklerini sağlayan M'ye *sağ R-modül* denir. M, sağ R-modül ise o zaman M_R ya da $M = M_R$ yazarız.
(3) 1, R halkasının birimi ve M bir sağ R-modül olmak üzere $m.1 = m$ özelliğini sağlıyorsa M modülü *birimsel sağ R-modül* olarak adlandırılır.
Benzer tanım sol R-modül için de yapılır. S ve R iki halka olsun. Eğer M, sol S-modül ve sağ R-modül ise M'ye *S-R-bimodül* denir.

Tanım 2.1.2. [11] M, bir sağ R-modül olsun. A, M'nin bir alt kümesi olmak üzere toplama ve M'nin modül çarpımı A'ya kısıtlandığında A, kendi başına bir modül oluyorsa bu A kümesine M'nin bir *altmodülü* denir ve $A \leq M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3. [11] (1) M, bir sağ R-modül olmak üzere en az bir $m_0 \in M$ için $M = m_0 R$ oluyorsa M modülüne *devirli (cyclic) modül* denir.
(2) M, bir sıfırdan farklı sağ R-modül olmak üzere M'nin her A altmodülü için $A = 0$ veya $A = M$ oluyorsa M'ye *basit (simple) modül* denir.
(3) R, sıfırdan farklı bir halka olmak üzere R'nin her A ideali için $A = 0$ veya

$A = R$ oluyorsa R'ye *basit (simple) halka* denir.

(4) A, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. M'nin $B \subsetneqq A$ altmodülü için $B = 0$ oluyorsa A'ya M'nin *minimal altmodülü* denir.

(5) M bir modül ve $A \subsetneqq M$ altmodülü olsun. $A \subsetneqq B$ koşulunu sağlayan M'nin her B altmodülü için $B = M$ oluyorsa A'ya M'nin *maksimal altmodülü* denir.

Lemma 2.1.4. [11, Modülarite Kuralı] *A, B, C; M'nin altmodülleri ve B, C'nin altmodülü olsun. O zaman $(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$ olur.*

İspat: $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ olmak üzere $a + b = c \in (A + B) \cap C$ olsun. $B \leq C$ olduğundan $a = c - b \in A \cap C$'dir. Buradan $a + b = c \in (A \cap C) + B$'dir. Yani $(A + B) \cap C \subseteq (A \cap C) + B$ olur. Tersine $d \in (A \cap C)$ ve $b \in B$ olmak üzere $d + b \in (A \cap C) + B$ olsun. O zaman $B \leq C$ olduğundan $d + b \in (A + B) \cap C$ olur. Yani $(A \cap C) + B \subseteq (A + B) \cap C$'dir. Buradan eşitlik elde edilir. $\square$

Tanım 2.1.5. [11] M bir modül ve A, M'nin bir altmodülü olsun. M'nın her U altmodülü için $A + U = M$ iken $U = M$ oluyorsa A'ya M'nin *small altmodülü* denir. $A \ll M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6. [11] M bir modül ve A, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin her U altmodülü için $A \cap U = 0$ iken $U = 0$ oluyorsa A'ya M'nin *essential altmodülü* denir. $A \leq_e M$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1.7. [11] *M bir modül A, B, N, M'nin altmodülleri ve $A \leq B \leq N \leq M$ olsun. B, N'de small ise A, M'de small olur.*

İspat: $U \leq M$ olmak üzere $A + U = M$ olsun. O zaman $A \leq B$ olduğundan $B + U = M$'dir. Buradan $(B + U) \cap N = M \cap N = N$'dir. Lemma 2.1.4'ten $(B+U) \cap N = B + (U \cap N) = N$'dir. B, N' de small olduğundan $U \cap N = N$'dir. Dolayısıyla $N \leq U$ olur. $A \leq N$ kabulünden $U = A + U = M$ sonucuna ulaşırız. Yani $U = M$ olduğundan $A \ll M$'dir. $\square$

Tanım 2.1.8. [2] Bir $f : M \longrightarrow N$ epimorfizması için $Kerf$, M'de small ise f'ye *small epimorfizma* denir.

Tanım 2.1.9. [2] M, sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere M'nin her özaltmodülü M'de small ise M'ye *hollow modül* denir.

Tanım 2.1.10. [2] M, sıfırdan farklı bir R-modül olmak üzere M'nin her sonlu üretilmiş özalt modülü M'de small ise M'ye *semihollow modül* denir.

Tanım 2.1.11. [11] Bir M modülünün her altmodülü bir direkt toplanan ise M'ye *yarıbasit (semisimple) modül* denir.

Tanım 2.1.12. [11] Bir P_R modülü; aşağıdaki denk koşullardan birini sağlıyorsa P'ye *projektif R-modül* denir.
(1) Her $\xi : B \longrightarrow P$ epimorfizması splittir. Yani $Ker(\xi)$, B'de bir direkt toplanandır.
(2) Her $\beta : B \longrightarrow C$ epimorfizması ve her $\psi : P \longrightarrow C$ homomorfizması için $\psi = \beta\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda : P \longrightarrow B$ homomorfizması vardır.
(3) Her $\beta : B \longrightarrow C$ epimorfizması için $Hom(1_P, \beta) : Hom_R(P, B) \longrightarrow Hom_R(P, C)$ bir epimorfizmadır.

Tanım 2.1.13. [16] P ve M, sağ R-modüller olsun. Her $f : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve her $g : P \longrightarrow N$ homomorfizması için $fh = g$; yani aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde en az bir $h : P \longrightarrow M$ homomorfizması varsa o zaman P'ye M*-projektiftir* denir.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P bir R-modül olsun. Her R-modül M için P, M-projektif oluyorsa o zaman P modülüne *projektif modül* denir.

Tanım 2.1.14. [16] Bir P modülü P-projektif ise *quasi-projektif (self projektif)* denir.

Tanım 2.1.15. [16] P ve M birer R-modül olmak üzere P, M-projektif ve M de P-projektif ise P ile M'ye *aralarında projektif (relatively projective) modüller* denir.

Tanım 2.1.16. [11] M bir R-modül olsun. P bir projektif modül olmak üzere bir $f : P \longrightarrow M$ small epimorfizmasına M'nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir.

Lemma 2.1.17. [24, 41.14] *M bir modül ve U, V, M'nin altmodülleri olsun. Aşağıdaki özellikleri düşünelim:*

1. $M = U + V$ ve $U \leq_d M$ ise o zaman $M = U \oplus V^{'}$ olacak şekilde V'nin bir $V^{'}$ altmodülü vardır.

2. Eğer $M = U \oplus V$ ise o zaman V, U-projektiftir. (U, V-projektiftir.)

3. $M = U \oplus V$ ve $U \cong V$ ise o zaman M self projektiftir.

4. $M = U + V$ ve $U, V \leq_d M$ ise o zaman $U \cap V \leq_d M$'dir.

O zaman $(1) \Leftrightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$, $(1) \Rightarrow (4)$*'tür.*

Tanım 2.1.18. [11] M, bir sağ R-modül ve X, M'nin bir altmodülü olsun. $i, j = 1, ..., m$ ve $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ olmak üzere her $\{x_1, ..., x_m\} \subset X$ sonlu alt kümesi için $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i r_i = 0$ iken $r_i = 0$ oluyorsa X'e M'nin *serbest (free) altmodülü* denir.

Teorem 2.1.19. [11] *R, bir halka olmak üzere A, R'nin bütün tersinir olmayan elemanlarının kümesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *A, toplamsal kapalıdır. Yani her $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 + a_2 \in A$'dır.*

(2) *A, bir iki-yanlı idealdir.*

$(3) - (a)$ *A, en büyük özalt sağ idealdir.*

$(3) - (b)$ *A, en büyük özalt sol idealdir.*

$(4) - (a)$ *R'de en büyük özalt sağ ideal vardır.*

$(4)-(b)$ *R'de en büyük özalt sol ideal vardır.*

$(5)-(a)$ *Her $r \in R$ için ya r ya da $1-r$ sağ tersinirdir.*

$(5)-(b)$ *Her $r \in R$ için ya r ya da $1-r$ sol tersinirdir.*

(6) *Her $r \in R$ için ya r ya da $1-r$ tersinirdir.*

Tanım 2.1.20. [11] Teorem 2.1.19'un denk koşullarını sağlayan bir R halkasına *yerel (local) halka* denir.

Tanım 2.1.21. [11] (1) Bir $\alpha : A \longrightarrow B$ monomorfizmasına *splittir* denir :⇔ $Im(\alpha)$, B'de direkt toplanandır.
(2) Bir $\beta : B \longrightarrow C$ epimorfizmasına *splittir* denir :⇔ $Ker(\beta)$, B'de direkt toplanandır.

Tanım 2.1.22. [11] R ve S birimli iki halka olsun. Tüm $r_1, r_2 \in R$ için $\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) + \phi(r_2)$ ve $\phi(r_1 r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$ ve $\phi(1_R) = \phi(1_S)$ işlemleri ile tanımlı $\phi : R \longrightarrow S$ dönüşümüne *halka homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.23. [11] R ve S birer halka olmak üzere A ve B her ikisi de sırasıyla sağ R-modüller veya sol S-modüller veya S-R-bimodüller olsun. Bir $\alpha : A \longrightarrow B$ dönüşümü sırasıyla aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A'dan B'ye bir *modül homomorfizmadır*.
(1) $\forall a_1, a_2 \in A, \forall r_1, r_2 \in R$ için $\alpha(a_1 r_1 + a_2 r_2) = \alpha(a_1) r_1 + \alpha(a_2) r_2$ veya
(2) $\forall a_1, a_2 \in A, \forall s_1, s_2 \in S$ için $\alpha(s_1 a_1 + s_2 a_2) = s_1 \alpha(a_1) + s_2 \alpha(a_2)$ veya
(3) $\forall a_1, a_2 \in A, \forall s_1, s_2 \in S, \forall r_1, r_2 \in R$ için $\alpha(s_1 a_1 r_1 + s_2 a_2 r_2) = s_1 \alpha(a_1) r_1 + s_2 \alpha(a_2) r_2$.
$\alpha : A_R \longrightarrow B_R$ homomorfizması, R-modül homomorfizması ya da bir sağ modül homomorfizması olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.24. [11] Bir $\alpha : A_R \longrightarrow B_R$ homomorfizması;
monomorfizmadır :⇔ $\forall C \in \mathcal{M}_R, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in Hom_R(C, A)$ için $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$'dir.

epimorfizmadır $:\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{M}_R, \forall \beta_1, \beta_2 \in Hom_R(B,C)$ için $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$'dir.

izomorfizmadır $:\Leftrightarrow \exists \alpha' \in Hom_R(B,A)$ için $\alpha'\alpha = 1_A$ ve $\alpha\alpha' = 1_B$'dir.

Teorem 2.1.25. [11] *$\alpha : A \longrightarrow B$ bir homomorfizma olsun. O zaman;*

(1) *α birebirdir $\Leftrightarrow$ α monomorfizmadır.*

(2) *α örtendir $\Leftrightarrow$ α epimorfizmadır.*

(3) *α birebir ve örtendir $\Leftrightarrow$ α izomorfizmadır.*

Tanım 2.1.26. [1] M bir sağ R-modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. $x \in M$ ve $Ker(n_K) = K$ olmak üzere $n_K(x) = x + K \in M/K$ ile tanımlı $n_K : M \longrightarrow M/K$ örten dönüşümü bir R-modül epimorfizmadır. n_K'ya *doğal (natural) epimorfizma* denir.

Tanım 2.1.27. [11] A bir R-modül olmak üzere $Hom_R(A,A)$ aşağıda tanımlanan

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$$
$$(\alpha_1\alpha_2)(a) = \alpha_1(\alpha_2(a))$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya *A'nın R-endomorfizma halkası* denir.

Teorem 2.1.28. [1, Factor Teoremi] *M, N, K modüller olmak üzere $f : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $Ker(g) \leq Ker(f)$ olacak şekilde $g : M \longrightarrow K$ bir epimorfizma ise o zaman $f = hg$ olacak şekilde tek bir $h : K \longrightarrow N$ homomorfizması vardır. Bununla birlikte $Im(f) = Im(h)$'dir ve $Ker(h) = g(Ker(f))$'dir. Dolayısıyla h bir epimorfizmadır ancak ve ancak f bir epimorfizma ve h bir monomorfizmadır ancak ve ancak $Ker(g) = Ker(f)$'dir.*

İspat: g bir epimorfizma olduğundan bir $k \in K$ için $g(m) = k$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Bununla birlikte $g(l) = k$ olmak üzere $l \in M$ ise o zaman $m - l \in Ker(g) \leq Ker(f)$'dir ve dolayısıyla $f(m) = f(l)$'dir. Buradan bir modül homomorfizması olan iyi tanımlı bir $h : K \longrightarrow N$ dönüşümü vardır. Şimdi

h'nin tekliğini araştıralım: Eğer $\bar{h} : K \longrightarrow N$, $f = \bar{h}g$ olacak şekilde başka bir homomorfizma ise o zaman $hg = \bar{h}g$'dir. Sonuç olarak g bir epimorfizma olduğundan $h = \bar{h}$'dir. Teoremin geri kalanı açıktır. □

Teorem 2.1.29. [11, I. İzomorfizma Teoremi] *$f : M \longrightarrow M'$ bir modül homomorfizması olsun. O zaman $M/Ker(f) \cong Im(f)$'dir.*

İspat: $\pi : M \longrightarrow M/Ker(f)$ doğal epimorfizmasını düşünelim. O zaman açıkça $Ker(\pi) = Ker(f)$'dir. Buradan Teorem 2.1.28 ile $f = h\pi$ olacak şekilde bir $h : M/Ker(f) \longrightarrow M'$ monomorfizması vardır. $\bar{h} : M/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ homomorfizmasını göz önüne alalım.
$\bar{h}$ bir izomorfizmadır. O zaman $M/Ker(f) \cong Im(f)$'dir. □

Teorem 2.1.30. [11, II. İzomorfizma teoremi] *A ve B, M'nin altmodülleri olsun. O zaman $(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$'dir.*

Sonuç 2.1.31. [11] *$A = B \oplus C$ ise $A/C \cong B$'dir.*

İspat: $A/C = (B + C)/C \cong B/(B \cap C) = B/0 \cong B$'dir. □

Teorem 2.1.32. [11, III. İzomorfizma Teoremi] *Eğer $A \leq B \leq M$ ise o zaman $M/B \cong (M/A)/(B/A)$'dır.*

Tanım 2.1.33. [11] B'nin bir B_0 altmodülüne B'nin *direkt toplananı (direct summand)* denir. :⇔ B'nin $B_0 \oplus B_1 = B$ olacak şekilde bir B_1 altmodülü vardır.

Lemma 2.1.34. [11] *X, M_R'nin bir altmodülü olsun. O zaman;*

$$A := \begin{cases} \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \mid x_i \in X,\ r_i \in R \ \text{ ve } \ n \in \mathbb{N}\Big\}, & X \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0, & X = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

M'nin bir altmodülüdür.

Tanım 2.1.35. [11] Lemma 2.1.34'te tanımlanan A modülüne M'nin X ile *üretilen altmodülü* denir. $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.36. [11] M, bir sağ R-modül olsun. M'nin bütün maksimal altmodüllerinin kesişimine ya da small altmodüllerinin toplamına *M'nin Jacobsan radikali* denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.37. [1] Sağ (sol) ideallerinin herbiri projektif olan bir R halkasına *sağ (sol) hereditary halka* denir.

Tanım 2.1.38. [2] Bir R halkasının her sonlu üretilmiş sağ (sol) ideali projektif ise *sağ (sol) semihereditary halka* denir.

Tanım 2.1.39. [16] (1) M bir modül olsun. N ve L, M'nin altmodülleri olsun. Eğer N, $M = N + L$ olmak üzere minimal ise ya da diğer bir ifadeyle $M = N + L$ ve $N \cap L \ll N$ ise N'ye L'nin *tümleyeni (supplement)* denir.
(2) Eğer M'nin her altmodülünün bir tümleyeni varsa M modülüne *tümlenmiş (supplemented) modül* denir.
(3) M modülü, $M = A + B$ olmak üzere M'nin A ve B altmodülleri için $P \leq B$ olacak şekilde A'nın bir P tümleyeni varsa, M modülüne *yeterli tümlenmiş (amply supplemented) modül* denir.
(4) Bir M modülünün her A altmodülü için $M = A + B$ ve $A \cap B \ll M$ olacak şekilde M'nin bir B altmodülü varsa, M'ye *zayıf tümlenmiş (weakly supplemented) modül* denir.
(5) M bir modül olsun. M'nin her altmodülünün toplanan olan bir tümleyeni varsa M'ye *$\oplus$-tümlenmiş ($\oplus$-supplemented) modül* denir.
(6) M bir modül olsun. M'nin her A altmodülü için $A + X = M$ sağlanacak şekilde bir A' direkt toplananı olması için gerek ve yeter koşul $A' + X = M$ olması ise M modülüne *H- tümlenmiş (H-supplemented) modül* denir.

Tanım 2.1.40. [16] M, bir modül ve $\{B_i | i \in I\}$, M'nin altmodülleri olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanan $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$'ye M'nin bir *direkt ayrışımı (direct* *decomposition)* denir.

$$M = \bigoplus_{i\in I} B_i :\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & M = \sum\limits_{i\in I} B_i \wedge \\ (2) & \forall j \in I\big\{B_i \cap \sum\limits_{i\in I, i\neq j} B_i = 0\big\}. \end{cases}$$

Teorem 2.1.41. [1, Azumaya Teoremi] *Her bir $End(M_\alpha)$ endomorfizma halkası yerel olmak üzere bir M modülünün $M = \bigoplus_A M_\alpha$ şeklinde bir direkt ayrışımı varsa o zaman bu ayrışım parçalanamazdır ve aşağıdaki özellikler vardır:*
(1) *M'nin sıfırdan farklı her direkt toplananının parçalanamaz bir direkt toplananı vardır.*
(2) *$M = \bigoplus_A M_\alpha$ ayrışımı maksimal direkt toplananlara tamamlanır ve böylece bu M'nin her parçalanamaz ayrışımına denktir.*

Lemma 2.1.42. [24, Properties of Supplements 41.1] *M bir modül, U ve V, M'nin altmodüleri olsun. V, U'nun tümleyeni ise o zaman;*
(1) *Herhangi bir $W \leq U$ için $W + V = M$ ise V, W'nin bir tümleyenidir.*
(2) *M sonlu üretilmiş ise V de sonlu üretilmiştir.*
(3) *U, M'nin bir maksimal altmodülü ise V devirlidir ve $U \cap V = Rad(V)$, V'nin bir (tek) maksimal altmodülüdür.*
(4) *K, M'nin small altmodülü ise V, $U + K$'nın bir tümleyenidir.*
(5) *M'nin bir small K altmodülü için $K \cap V$, V'de smalldur ve buradan $Rad(V) = V \cap Rad(M)$'dir.*
(6) *$Rad(M)$, M'de small ise o zaman U, M'nin bir maksimal altmodülünde içerilir.*
(7) *$L \leq U$ için $(V + L)/L$, M/L'de U/L'nin bir tümleyenidir.*

[16] Continuous ve quasi-continuous modüllerin duali olarak tanımlanacak olan discrete ve quasi-discrete modüller için gerekli aşağıdaki özellikleri verelim:
$(D1)$ Bir M modülünün her A altmodülü için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ olacak şekilde bir $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır.
$(D2)$ Eğer M/N, M'nin bir direkt toplananına izomorf olacak şekilde N, M'nin

bir altmodülü ise o zaman N, M'nin bir direkt toplananıdır.

$(D3)$ $M = K + L$ olmak üzere M'nin her K ve L direkt toplananları için $K \cap L$, M 'nin bir direkt toplananıdır.

Eğer bir M modülü $(D1)$ ve $(D2)$ koşullarını sağlıyorsa *ayrık (discrete) modül*, $(D1)$ ve $(D3)$ koşullarını sağlıyorsa *quasi-ayrık (quasi-discrete) modül* adı verilir.

Lemma 2.1.43. [16] *A ve B iki modül olsun. $A \oplus B$ quasi ayrık ve X, B'nin altmodülü iken bir $\phi : A \longrightarrow B/X$ homomorfizması $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfizmasına yükseltilebilir. Özel olarak herhangi bir $B \longrightarrow A$ epimorfizması (ya da $A \longrightarrow B$ epimorfizması) splittir.*

Teorem 2.1.44. [12, Theorem 6] *$M = M_1 \oplus M_2$, M_1 yarıbasit bir modül ve M_2, $(D1)$ koşulunu sağlayan bir modül olmak üzere aralarında projektif M_1, M_2 modüllerinin bir direkt toplamı olsun. O zaman M, $(D1)$ koşulunu sağlar.*

Teorem 2.1.45. [12, Theorem 11] *M, $(D1)$ koşulunu sağlayan bir modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M, $(D3)$ koşulunu sağlar.*

(2) *M_1 ve M_2, M'nin altmodülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ direkt toplamı var ise M_1 ve M_2 aralarında projektiftir.*

Lemma 2.1.46. [24] *M bir self projektif R-modül ve $S = End_R(M)$ olsun. O zaman $End_R(M/RadM)$'nin radikali sıfırdır.*

Önerme 2.1.47. [16, Proposition A.7] *P maksimal ideal, K bir kesir cismi ve $Q = K/R$ olmak üzere R bir yerel Dedekind bölgesi olsun. a, b, c, n doğal sayılar ve $B(n_1, ...n_s)$, $R/P^{n_1}, ..., R/P^{n_s}$nin keyfi çokluktaki kopyalarının direkt toplamını göstersin. O zaman, sıralanmış olan özelliklere sahip bütün M modülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

(1) *M, zayıf tümlenmiş ve $\oplus$-tümlenmiş modül ise $M \cong R^a \oplus K^b \oplus Q^c \oplus B(1, ..., n)$'dir.*

(2) M, *tümlenmiş ve* H*-tümlenmiş modül ise* M, (1)*'deki gibidir.*

R *incomplete ise* $b \leq 1$ *iken;*

(3) M, $(D1)$ *koşulunu sağlar ise* $M \cong R^a \oplus K^b \oplus Q^c$ *veya* $B(n, n+1)$*'dir.*

(4) M, *quasi-ayrık modül ise* $M \cong R^a \oplus K^b$ *veya* $R^a \oplus Q$ *veya* $B(n)$*'dir.*

(5) M, *ayrık modül ise* $M \cong R^a \oplus K^b$ *veya* $B(n)$*'dir.*

Önerme 2.1.48. [16, Proposition 4.8] *Bir* M *modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) M, $D(1)$ *koşulunu sağlar.*

(2) N, M*'de direkt toplanan ve* S, M*'nin altmodülü olmak üzere* M*'nin her* A *altmodülü* $A = N \oplus S$ *olarak yazılabilir.*

(3) M *tümlenmiş modüldür ve* M*'nin her tümleyen altmodülü bir direkt toplanandır.*

Sonuç 2.1.49. [16, Corollary 4.9] *Bir parçalanamaz* M *modülünün* $(D1)$ *özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul* M*'nin bir hollow modül olmasıdır.*

Teorem 2.1.50. [4, Theorem 4.2] I, R*'nin bir maksimal sol ideali* M*'de tek türlü içerilen* R*'nin bir sol ideali olsun.* R*'nin aşağıdaki zincir koşulunu sağladığını varsayalım. Her* $a \in \mathcal{J}(I) = \{x \in R : Ix \subseteq I\}$ *için;*

$$I \subseteq (I : a) \subseteq (I : a^2) \subseteq ...$$

sol ideallerin dizisi sonlu bir adımda durur. O zaman $End_R(R/I)$ *yereldir.*

(I *ve* J*, değişmeli bir* R *halkasının idealleri olmak üzere onların ideal bölümü (ideal quotient)* $(I : J)$*;* $(I : J) = \{r \in R | rJ \subseteq I\}$ *kümesidir.*

Önerme 2.1.51. [1, Proposition 9.18] M*'nin her özalt modülü* M*'nin bir maksimal altmodülünde içeriliyorsa o zaman* $Rad(M)$, M*'nin tek en büyük small altmodülüdür.*

Teorem 2.1.52. [5, Theorem 3.16] M*, bir yeterli tümlenmiş modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M'nin her altmodülünün M'de tek bir eşkapanışı vardır; diğer bir deyişle M, bir UCC (uniquely coclosure) modüldür.*

(2) *M modülünün eşkapalı altmodüllerinin bir ailesinin toplamı eşkapalıdır.*

(3) *M'nin iki eşkapalı altmodülünün toplamı da eşkapalıdır.*

Önerme 2.1.53. [1, Proposition 9.3] *M, basit altmodüllerin bir $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ indis kümesi tarafından üretilen bir modül ise o zaman bir $B \subseteq A$ için $M = \bigoplus_B T_\beta$ olur. Yani M yarıbasittir.*

Tanım 2.1.54. [23] Bir M modülünün altmodüllerinin bir $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kümesine *eşbağımsız (coindependent)* denir. :⇔ $n \geq 2$ için Λ'nın bir sonlu $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ altkümesi için $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_{\lambda_i} + A_{\lambda_n} = M$'dir.

Lemma 2.1.55. [21, 3.2], [20, 11] *M, altmodüllerinin her eşbağımsız (coindependent) ailesi sonlu olacak şekilde sıfırdan farklı bir R-modül olsun. O zaman M'nin bir hollow faktör modülü vardır.*

Önerme 2.1.56. [27, Satz. 1.6] *Sonlu üretilmiş bir R-modül M için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) $K(M) = M$. ($K(M) = \{x \in M : Rx$ *tümlenmiştir* $\}$)

(2)] *M bir tümlenmiş modüldür.*

(3) *$R/Ann_R(M)$ halkası yarımükemmeldir.*

$(Ann_R(M) = \{r \in R | rm = 0, \forall m \in M\})$

Lemma 2.1.57. [25, Lemma 1.3] (1) *$M = X + Y + U$ olsun. O zaman X, M'de $Y + U$ 'nun tümleyeni ve Y, M'de $X + U$'nun tümleyeni iken $X + Y$, M'de U'nun tümleyenidir.*

(2) *M' ve U, M'nin altmodülleri ve M', tümlenmiş bir modül olsun. O zaman $M' + U$, M'de bir tümleyen modüldür ve böylece U da bir tümleyen modüldür.*

(3) *A ve B tümlenmiş modül olmak üzere $M = A + B$ olsun. O zaman M de bir tümlenmiş modül olur.*

Lemma 2.1.58. [2, Properties of Hollow Modules 2.15] (1) *M bir (semi) hollow modül ise her faktör modülü de (semi) hollowdur.*

(2) *$K \ll M$ ve M/K (semi) hollow ise o zaman M, bir (semi) hollow modüldür.*

(3) *M'nin semihollow modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin yerel modül ve $Rad(M) = M$ olmasıdır.*

(4) *Aşağıdaki özellikler denktir:*

(a) *M yerel modüldür.*

(b) *M, (semi) hollow ve devirli (veya sonlu üretilmiş) bir modüldür.*

(c) *M, (semi) hollow modüldür ve $Rad(M) = M$'dir.*

Lemma 2.1.59. [16, Lemma 4.2] *M bir modül ve A, B, C, M'nin altmodülleri olsun. O zaman:*

(1) *A, B'de small ve B, C'nin altmodülü ise A, C'de smalldur.*

(2) *A, M'de small, A, B'nin altmodülü ve B, M'nin direkt toplananı olsun. O zaman A, B'de small olur.*

(3) *A, M'de small, $\phi : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. O zaman $\phi(A)$, $\phi(M)$'de smalldur.*

Teorem 2.1.60. [16, Theorem 2.25] *Her bir M_α bir yerel endomorfizma halkasına sahip olmak üzere $M = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M'nin her yerel direkt toplananı bir direkt toplanandır.*

(2) *$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ ayrışımı, direkt toplananlara tümlenir.*

(3) *M, finite exchange propertye sahiptir.*

(4) *M, exchange propertye sahiptir.*

Lemma 2.1.61. [16, Lemma 3.20] *$M = X \oplus Y$ olsun. M'nin exchange propertye sahip olması için gerek ve yeter koşul X ve Y'nin exchange propertye sahip olmasıdır.*

Lemma 2.1.62. [12, Lemma 1] *A ve B, yerel endomorfizma halkaları olan $M = A \oplus B$, $(D1)$ koşulunu sağlayacak şekilde modüller olsun. C, A'nın bir* *altmodülü ve* $f : B \longrightarrow A/C$ *bir homomorfizma olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) f*, B'den A'ya bir homomorfizmaya yükseltilemez ise, o zaman* f*, bir epimorfizmadır ve A'dan B'ye bir epimorfizma vardır.*

(2) f*, A'dan B'ye epimorfizması bir izomorfizma ise, o zaman B, A-projektiftir.*

(3) *A'dan B'ye bir epimorfizma yok ise, o zaman B, A-projektiftir.*

Teorem 2.1.63. [14, Theorem 2.17] *M modülü,* $1 \leq i \leq n$ *olmak üzere* $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ *şeklinde* M_i *modüllerinin bir sonlu direkt toplamı olsun. O zaman M'nin ayrık modül olması için gerek ve yeter koşul* $M_1, ..., M_n$*'nin aralarında projektif ayrık modüller olmasıdır.*

Önerme 2.1.64. [16, Proposition 4.38] *Quasi projektif bir M modülü* $(D2)$ *özelliğine sahiptir.*

3. YÜKSELEN MODÜLLER

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar, birimli ve modüller, birimsel sağ R-modüller olarak alınacaktır.

3.1. Yükselen Modüllere Giriş

Bu bölümde yükselen modül tanımlanacak olup yükselen modüllerin karakterizasyonu için ihtiyaç duyulan tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.1.1. [16] M bir modül olsun. N ve L, M'nin altmodülleri olsun. Eğer N, $M = N + L$ olmak üzere minimal ise ya da diğer bir ifadeyle $M = N + L$ ve $N \cap L \ll N$ ise N'ye L'nin *tümleyeni (supplement)* denir.

Tanım 3.1.2. [16] Eğer M'nin her altmodülünün bir tümleyeni varsa M modülüne *tümlenmiş (supplemented) modül* denir.

Tanım 3.1.3. [16] M modülü, $M = A + B$ olmak üzere M'nin A ve B altmodülleri için $P \leq B$ olacak şekilde A'nın bir P tümleyeni varsa, M modülüne *yeterli tümlenmiş (amply supplemented) modül* denir.

Tanım 3.1.4. [16] Bir M modülünün her A altmodülü için $M = A + B$ ve $A \cap B \ll M$ olacak şekilde M'nin bir B altmodülü varsa, M'ye *zayıf tümlenmiş (weakly supplemented) modül* denir.

Tanım 3.1.5. [17] R bir halka ve M bir R-modül olsun. U ve V, M'nin iki altmodülü olsun. Eğer V, M'de U'nun tümleyeni ve $V \cap U$, U'nun bir direkt toplananı ise V'ye M'de U'nun *güçlü tümleyeni (strong supplement)* denir.

Tanım 3.1.6. [14] M bir modül ve $B \leq A \leq M$ olmak üzere A ve B, M'nin altmodülleri olsun. Eğer A/B, M/B'de small ise o zaman B'ye A'nın *coessential altmodülü* denir. A, M'de B'nin *coessential genişleyen (coessential extension)* altmodülüdür.

Tanım 3.1.7. [14] M'nin bir A altmodülünün M'de öz essential genişlemesi yoksa A'ya *kapalı (closed) altmodül* denir.

Tanım 3.1.8. [14] Eğer M'nin bir A altmodülünün coessential özalt modülü yoksa A'ya *eşkapalı (coclosed) altmodül* denir.

Tanım 3.1.9. [14] Eğer B, A'nın coessential altmodülü ve B, M'de eşkapalı ise B'ye M'de A'nın *s-kapanışı (s-closure)* denir.

Tanım 3.1.10. [14] M bir modül olmak üzere M'nin bir N altmodülü için K, N'nin altmodülü ve N/K, M/K'da small olacak şekilde M'nin bir K direkt toplananı varsa M'ye *yükselen (lifting) modül* veya *(D1)'i sağlar* denir.

Denk olarak M'nin her N altmodülü için $M = K \oplus K^{'}$, K, N'nin altmodülü ve $N \cap K^{'} \ll K^{'}$ olacak şekilde M'nin K, $K^{'}$ altmodülleri vardır.

Tanım 3.1.11. [16] M modülü yükselen ve $(D2)$ koşulunu sağlıyorsa o zaman M'ye *ayrık (discrete) modül* denir.

Tanım 3.1.12. [16] M modülü yükselen ve $(D3)$ koşulunu sağlıyorsa o zaman M'ye *quasi-ayrık (quasi-discrete) modül* denir.

Tanım 3.1.13. [14] M'nin bir N altmodülü için N, K'da essential olacak şekilde M'nin bir K direkt toplananı varsa M'ye *extending modül* denir.

M'nin bir extending modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin her kapalı altmodülünün M'de bir direkt toplanan olmasıdır.

Önerme 3.1.14. [6] *M bir yeterli tümlenmiş modül ise o zaman M'nin herhangi bir tümleyen altmodülü, direkt toplananı veya faktör modülü de yeterli tümlenmiştir.*

İspat: A, M'de B'nin bir tümleyeni olsun. O zaman $M = A + B$ ve $A \cap B$, A'da smalldur. $A = X + Y$ olmak üzere X ve Y, A'nın altmodülleri olsun. Buradan

$M = B + X + Y$ olur. M yeterli tümlenmiş olduğundan $Y^{'}$, M'de $B + X$'in bir tümleyeni olacak şekilde Y'nin $Y^{'}$ altmodülü vardır. Yani $Y^{'} + B + X = M$ ve $Y^{'} \cap (B + X)$, $Y^{'}$'de smalldur. Y'nin A'da X'in bir tümleyeni olduğunu göstereceğiz. $A = A \cap M = A \cap (Y^{'} + B + X) = (A \cap B) + (X + Y^{'})$'dir. $A \cap B$, A'da small olduğundan $A = X + Y^{'}$'dir. $X \cap Y^{'} \leq (X + B) \cap Y^{'} \ll Y^{'}$ olduğundan $X \cap Y^{'}$, $Y^{'}$'de small olur. Dolayısıyla A yeterli tümlenmiş bir modüldür. Diğer taraftan M'nin bir direkt toplananı bir tümleyen altmodüldür ve dolayısıyla yeterli tümlenmiş olur. Son olarak da faktör modüller için olan iddia Lemma 2.1.42(7)'den elde edilir. □

Sonuç 3.1.15. [6] *Eğer N, M'nin bir tümleyen altmodülü ve $N^{'}$, N'nin bir altmodülü olsun. $N^{'}$'nin, N'nin bir eşkapalı altmodülü olması için gerek ve yeter koşul $N^{'}$'nin, M'nin bir eşkapalı altmodülü olmasıdır.*

Lemma 3.1.16. [24, 41.11] *M, bir modül ve A, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *X, M'nin bir altmodülü olsun. X, A'nın bir coessential altmodülü olacak şekilde M'nin bir X direkt toplananı vardır.*

(2) *$A = X \oplus Y$ olmak üzere M'nin bir Y small altmodülü ve X direkt toplananı vardır.*

(3) *X, A'nın altmodülü ve $A \cap X^{'} \ll X^{'}$ olmak üzere bir $M = X \oplus X^{'}$ parçalanışı vardır.*

(4) *A'nın M'de bir güçlü tümleyeni vardır.*

Önerme 3.1.17. [2] *M bir yükselen modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) *M'nin herhangi bir eşkapalı altmodülü bir direkt toplanandır.*

(2) *M yeterli tümlenmiştir.*

(3) *M'nin hollow olması için gerek ve yeter koşul M'nin parçalanamaz olmasıdır.*

İspat: (1) A, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. M yükselen modül olduğundan K, M'de A'nın coessential altmodülü olacak şekilde M'nin en az bir K direkt toplananı vardır. Fakat A'nın coessential özalt modülü olmadığından $A = K$'dır.
(2) $M = A + B$ olmak üzere A ve B, M'nin altmodülleri olsun. B'nin M'de A'nın bir tümleyenini içerdiğini göstereceğiz. Lemma 3.1.16'dan X, M'nin small altmodülü ve Y, M'nin direkt toplananı olmak üzere $B = X \oplus Y$'dir. Buradan $M = A + Y$'dir. Tekrar aynı Lemmadan S, M'de small ve N, M'nin bir direkt toplananı olmak üzere $A \cap Y = N \oplus S$'dir. Dolayısıyla S, Y'de smalldur ve N, Y'nin direkt toplananıdır. Y'nin herhangi bir $N^{'}$ altmodülü için $Y = N \oplus N^{'}$ olsun. Açıkça $N^{'}$, Y'de N'nin bir tümleyenidir. Fakat S, Y'de small olduğundan Lemma 2.1.42'den $N^{'}$, Y'de $N + S$'nin bir tümleyenidir. Dolayısıyla $Y = N^{'} + N + S$ ve $N^{'} \cap (N + S) \ll N^{'}$dir. Bu da $(A \cap Y) + N^{'} = N + S + N^{'} = Y$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $M = A + N + S + N^{'} = A + N^{'}$dir. Bununla birlikte $A \cap N^{'} = (A \cap Y) \cap N^{'} = (N + S) \cap N^{'} \ll N^{'}$dir. Dolayısıyla $N^{'} \leq B$ olmak üzere $N^{'}$, M'de A'nın bir tümleyeni olur.
(3) Eğer M hollow ve $M = A \oplus B$ ise o zaman ya $A = M$'dir ya da $B = M$'dir. Dolayısıyla M parçalanamazdır. Tersine M'nin bir parçalanamaz yükselen modül olduğunu kabul edelim ve A, M'nin bir özalt modülü olsun. M yükselen modül olduğundan A/K, M/K'da small olmak üzere M'nin bir K direkt toplananı vardır. Fakat M parçalanamaz olduğundan $K = 0$'dır ve bu sebepten $A \ll M$'dir. Buradan da M hollow bir modül olur. $\square$

Sonuç 3.1.18. [6] *Bir M yükselen modülünün herhangi bir eşkapalı altmodülü (dolayısıyla herhangi bir direkt toplananı) de yükselen modüldür.*

İspat: M, bir yükselen modül ve A, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. Önerme 3.1.17'den A, M'de direkt toplanandır. Sonuç olarak Önerme 3.1.14'ten A yeterli tümlenmiştir. Şimdi $A^{'}$, A'nın eşkapalı altmodülü olsun. A, M'de bir tümleyen olduğundan Sonuç 3.1.15'ten $A^{'}$, M'nin eşkapalı altmodülüdür. $A^{'}$, A'nın direkt toplananıdır. Dolayısıyla M'nin direkt toplananıdır. Buradan da A bir yükselen modüldür. □

Lemma 3.1.19. [16, Lemma 4.7] $(D1)$, $(D2)$, $(D3)$ *özelliklerinden birini sağlayan bir M modülünün herhangi bir toplananı da aynı özelliği sağlar.*

İspat: İspatı Sonuç 3.1.18'den açıktır. □

Lemma 3.1.20. [15] *M bir modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdaki durumları düşünelim:*

(1) N, M'nin tümleyen altmodülüdür.

(2) N, M'de eşkapalıdır.

(3) N'nin bütün X altmodülleri için X, M'de small ise X, N'de smalldur.

O zaman $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ sağlanır. Eğer M zayıf tümlenmiş bir modül ise o zaman $(3) \Rightarrow (1)$ sağlanır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. N, M'de L'nin bir tümleyeni olsun. O zaman $M = N + L$ ve N minimaldir yani $N \cap L \ll N$'dir. K, N'nin altmodülü ve N/K, M/K'da small olsun. O zaman $M = K + L$'dir. N'nin minimalliğinden $N = K$'dır. Dolayısıyla N'nin bir coessential K özalt modülü olmadığından N, M'de eşkapalıdır.
$(2) \Rightarrow (3)$. N, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. $X \leq N$ olmak üzere X, M'nin small altmodülü olsun. $N = X + Y$ ve $Y \leq N$ olduğunu kabul edelim. Şimdi N/Y'nin M/Y'de small olduğunu göstermek istiyoruz. $Y \leq H \leq N$ olmak üzere $M/Y = N/Y + H/Y$ olsun. O zaman $M = N + H = X + Y + H = X + H$'dir. X, M'de small olduğundan $M = H$'dir. Dolayısıyla N/Y, M/Y'de smalldur. N eşkapalı olduğundan $N = Y$'dir. Sonuç olarak X, N'de smalldur.
$(3) \Rightarrow (1)$. M, bir zayıf tümlenmiş modül olsun. N'nin tüm X altmodülleri için $X \ll M$ iken $X \ll N$ olduğunu kabul edelim. M zayıf tümlenmiş modül olduğundan $M = N + L$ ve $N \cap L \ll M$ olacak şekilde M'nin bir L altmodülü

vardır. Kabulden $N \cap L \ll N$'dir. Dolayısıyla N, M'de L'nin bir tümleyenidir. □

Lemma 3.1.21. [14] *M bir modül ve $M = A + B$ ve $M = (A \cap B) + C$ olsun. O zaman $M = (B \cap C) + A = (A \cap C) + B$'dir.*

İspat: $(A \cap C) + B = [(A \cap C) + (A \cap B)] + B = [A \cap (C + (A \cap B))] + B = A + B = M$'dir.

$(B \cap C) + A = [(B \cap C) + (A \cap B)] + A = [B \cap (C + (A \cap B))] + A = B + A = M$ elde edilir. □

Lemma 3.1.22. [14] *M bir modül ve $M = A + B$, B, C'nin altmodülü ve C/B, M/B'de small olsun. O zaman $(A \cap C)/(A \cap B)$, $M/(A \cap B)$'de smalldur.*

İspat: $A \cap B \leq X \leq M$ olmak üzere $M/(A \cap B) = (A \cap C)/(A \cap B) + X/(A \cap B)$ olsun. O zaman $M = (A \cap C) + X$'tir. Lemma 3.1.21'den $M = C + (A \cap X)$'tir. C/B, M/B'de small olduğundan $M = B + (A \cap X)$ olur. Tekrar Lemma 3.1.21'den $M = X + (A \cap B)$ elde edilir. Dolayısıyla $M = X$ olur. Böylece $(A \cap C)/(A \cap B)$, $M/(A \cap B)$'de smalldur. □

Lemma 3.1.23. [14] (1). *M bir modül olmak üzere $B \leq C$ olacak şekilde B ve C, M'nin altmodülleri olsun. C/B, M/B'nin bir tümleyen altmodülü ve B, M'nin bir tümleyen altmodülü olsun. O zaman C, M'nin bir tümleyen altmodülüdür.*

(2). *M bir zayıf tümlenmiş modül, $B \leq C$ olacak şekilde B ve C, M'nin altmodülleri olsun. C/B, M/B'de eşkapalı, B de M'de eşkapalı olsun. O zaman C, M'de eşkapalıdır.*

İspat: (1). C/B, M/B'de C'/B'nin bir tümleyeni olsun. B, M'de B''nin bir tümleyeni olsun. O zaman, $M/B = C/B + C'/B$ ve $(C/B) \cap (C'/B) \ll C/B$, $M = B + B'$ ve $B \cap B' \ll B$'dir. B, C'nin altmodülü olduğundan açıkça $B \cap B'$, C'de smalldur. $M = (C \cap C') + B'$ ve $M = C + C'$ olduğundan Lemma

3.1.21'den $M = C + (B' \cap C')$'dir. Şimdi $C = C \cap (B + B') = B + (C \cap B')$'dir ve $(C \cap C')/B$, C/B'de smalldur. Lemma 3.1.22'den $(C \cap C' \cap B')/(B \cap B')$, $C/(B \cap B')$'de smalldur. Ayrıca $B \cap B'$, C'de smalldur. Buradan $(C \cap C' \cap B')$, C'de small olur. Dolayısıyla C, M'de $B' \cap C'$ 'nin bir tümleyenidir.
(2). Lemma 3.1.20 ve (1)'den açıktır. □

Önerme 3.1.24. [14] *M bir yeterli tümlenmiş modül olsun. O zaman M'nin her altmodülünün bir s-kapanışı vardır.*

İspat: A, M'nin altmodülü olsun. M, yeterli tümlenmiş olduğundan $M = A + B$ özelliğiyle B minimal olacak şekilde M'nin bir B altmodülü vardır. Tekrar M yeterli tümlenmiş olduğundan $C \leq A$, $M = C + B$ ve $C \cap B \ll C$ olacak şekilde M'nin bir C altmodülü vardır. Şimdi A/C'nin M/C'de small olduğunu gösterelim. $C \leq X \leq M$ olsun. Eğer $M = X + A$ ise o zaman; $M = C + (X \cap B) + A = A + (X \cap B)$'dir. B'nin minimal altmodül olmasından $X \cap B = B$ olur. Dolayısıyla $M = X$'tir. O halde $M \neq A + X$'tir. Buradan A/C, M/C'de smalldur. C bir tümleyen altmodül olduğundan Lemma 3.1.20'den C eşkapalıdır. Yani C, M'de A'nın bir s-kapanışıdır. □

Lemma 3.1.25. [14] *M bir modül ve A ve B, M'nin altmodülleri olsun. B'nin, M'de A'nın bir s-kapanışı olması için gerek ve yeter koşul B'nin, A'nın bir minimal coessential altmodülü olmasıdır.*

İspat: B, M'de A'nın bir s-kapanışı olsun. O zaman $A/B \ll M/B$ olmak üzere B, M'de eşkapalıdır. Şimdi B'nin A'nın minimal coessential altmodülü olduğunu göstereceğiz. X, B'nin altmodülü ve A/X, M/X'te small olsun. O zaman B/X, M/X'te smalldur. B, M'de eşkapalı olduğundan $B = X$ olur. Dolayısıyla B, A'nın minimal coessential altmodülüdür.
Tersine B, A'nın minimal coessential altmodülü olsun. O zaman A/B, M/B'de

smalldur. Şimdi B'nin M'de eşkapalı olduğunu göstereceğiz. X, B'nin altmodülü ve B/X, M/X'te small olsun. $X \leq C \leq M$ olmak üzere $M/X = A/X + C/X$ olsun. O zaman $M = A + C$'dir ve bu sebepten $M = A + (C + B)$ olur. A/B, M/B'de small olduğundan $M = B + C$'dir. B/X, M/X'te small olduğundan $M = C + X = C$'dir. Dolayısıyla A/X, M/X'te smalldur. B'nin minimalliğinden $B = X$'tir. Buradan da B'nin, M'de eşkapalı olduğu elde edilir.
$\square$

Lemma 3.1.26. [14] *M bir R-modül olsun. O zaman M'nin yeterli tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M'nin zayıf tümlenmiş olması ve M'nin her altmodülünün M'de bir s-kapanışının var olmasıdır.*

İspat: Gereklilik tanımlardan ve Önerme 3.1.24'ten açıktır. Yeterlilik için M'nin zayıf tümlenmiş ve M'nin her altmodülünün M'de bir s-kapanışı olduğunu varsayalım. $M = A + B$ olmak üzere A ve B, M'nin altmodülleri olsun. M zayıf tümlenmiş bir modül olduğundan $M = (A \cap B) + C$ ve $A \cap B \cap C \ll M$ olacak şekilde M'nin bir C altmodülü vardır. Lemma 3.1.21'den $M = A + (B \cap C)$'dir. Şimdi D, M'de $B \cap C$'nin bir s-kapanışı olsun. O zaman $M = A + D$ ve $A \cap D$, M'de smalldur. D, M'de eşkapalı olduğundan $A \cap D$, D'de smalldur. Dolayısıyla D, M'de A'nın tümleyenidir ve D, B'nin altmodülüdür. Buradan da M yeterli tümlenmiş bir modül olur. $\square$

Önerme 3.1.27. [14] *$M = M_1 \oplus M_2$ bir zayıf tümlenmiş modül olsun. $M = N + M_1$ veya $M = N + M_2$ olacak şekilde M'nin her eşkapalı N altmodülü için N'nin, M'nin bir direkt toplananı olduğunu varsayalım. K, M/K'nın her altmodülünün M/K'da bir s-kapanışı olacak şekilde M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. O zaman K, M'nin bir direkt toplananıdır.*

İspat: M/K'nın $(K + M_1)/K$ altmodülünü düşünelim. O zaman kabulden $N/K \leq (K + M_1)/K$ ve $(K + M_1)/N \ll M/N$ olacak şekilde M/K'nın bir eşkapalı N/K altmodülü vardır. Lemma 3.1.23(2)'den N, M'de eşkapalıdır. Ayrıca $M = (K + M_1) + M_2$'den $M = N + M_2$'dir. Kabulden M'nin bir $N^{'}$ altmodülü için $M = N \oplus N^{'}$ olur. Böylece $K = N \cap (K + N^{'})$ ve $M = N + (K + N^{'})$'dir. Buradan $M/K = N/K \oplus (K + N^{'})/K$'dır. Bu nedenle $(K + N^{'})/K$, M/K'da eşkapalı olur. Tekrar 3.1.23(2) ile $K + N^{'}$, M'de eşkapalıdır. Ayrıca $M = (K + M_1) + N^{'} = (K + N^{'}) + M_1$'dir. Dolayısıyla kabulden $K + N^{'}$, M'nin bir direkt toplananıdır. $M = (K + N^{'}) \oplus K^{'}$ olacak şekilde M'nin bir $K^{'}$ altmodülü vardır. O halde $N^{'} = (K + N^{'}) \cap (N^{'} + K^{'})$ ve $N \cap (K + N^{'}) \cap (N^{'} + K^{'}) = K \cap (N^{'} + K^{'}) = 0$'dır. Bu sebeple $M = K \oplus (N^{'} + K^{'})$ olur. □

Sonuç 3.1.28. [14] *$M = M_1 \oplus M_2$ bir yeterli tümlenmiş modül olsun. M'nin her eşkapalı N altmodülü için ya $M = N + M_1$ ya da $M = N + M_2$ olmak üzere N, M'nin bir direkt toplananı olsun. O zaman M'nin her eşkapalı altmodülü bir direkt toplanandır.*

İspat: K, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. Önerme 3.1.14'ten M/K'nın yeterli tümlenmiş olduğunu görmek kolaydır. Önerme 3.1.24 ile M/K'nın her altmodülünün M/K'da bir s-kapanışı vardır. Buradan Önerme 3.1.27 ile K, M'nin bir direkt toplananı olur. □

3.2. Yükselen Modüllerin Karakterizasyonu

Teorem 3.2.1. [14] *$M = M_1 \oplus M_2$ bir yeterli tümlenmiş modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M bir yükselen modüldür.*

(2) *$M = K + M_1$ veya $M = K + M_2$ olacak şekilde M'nin her eşkapalı K altmodülü, M'nin bir direkt toplananıdır.*

(3) *$(K + M_1)/K \ll M/K$ veya $(K + M_2)/K \ll M/K$ ya da $M = K +$*

$M_1 = K + M_2$ olacak şekilde M'nin her eşkapalı K altmodülü , M'nin bir direkt toplananıdır.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Lemma 3.1.20 ve Sonuç 3.1.28'den elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (2) $M = K + M_2$, benzer olarak $M = K + M_1$ olacak şekilde K M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. M/K yeterli tümlenmiş olduğundan $(K + M_1)/K$'nın M/K'da bir s-kapanışı vardır. Yani $K \leq N \leq K + M_1$, $(K + M_1)/N \ll M/N$ ve N/K, M/K'da eşkapalı olacak şekilde M'nin bir N altmodülü vardır. Lemma 3.1.23(2)'den N/K, M/K'da eşkapalı ve K, M'de eşkapalı olduğundan N, M'de eşkapalıdır. Kabulden $M = N + N'$ olacak şekilde M'nin bir N' altmodülü vardır. Ayrıca $M = K + M_2 = (K + N') + M_2 = (K + N') + M_1$ olduğunu biliyoruz. $M = K + N' + N$ ve $K = (K + N') \cap N$ ve buradan $M/K = N/K \oplus (K + N')/K$ olduğunu not edelim. O halde $(K + N')/K$, M/K'da eşkapalıdır. Tekrar Lemma 3.1.23(2)'den $K + N'$, M'de eşkapalı olur. Kabulden $K + N'$, M'nin bir direkt toplananıdır. $K + N' = K \oplus N'$ olduğundan K, M'nin bir direkt toplananıdır. $\square$

Önerme 3.2.2. [14] *$M = M_1 \oplus M_2$ bir modül olsun. N, $(N + M_1)/M_1 \ll M/M_1$ ve $M = N + M_2$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. O zaman $(N + M_1)/N$, M/N'de smalldur.*

İspat: N, $(N + M_1)/M_1 \ll M/M_1$ ve $M = N + M_2$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. $f : M_2 \longrightarrow M_2/(M_2 \cap N)$ dönüşümünü göz önüne alalım. $M/M_1 \cong M_2$ ve $M_2/(M_2 \cap N) \cong (M_2 + N)/N = M/N$ olduğunu biliyoruz. Bu dönüşümde $(N + M_1)/M_1$, $(N + M_1)/N$'nin üzerinedir. Dolayısıyla önerme ispatlanmış olur. $\square$

Tanım 3.2.3. [14] M_1 ve M_2 modüller olsun. Eğer A, M_2'nin bir altmodülü ve $Imf \ll M_2/A$ olmak üzere her $f : M_1 \longrightarrow M_2/A$ homomorfizması bir

$\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ homomorfizmasına yükseltilebiliyorsa M_1 modülüne *small M_2-projektiftir* denir.

Tanım 3.2.4. [14] Her $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ için M_i, small M_j-projektif ise M_1 ve *M_2 aralarında small projektiftir* denir.

Eğer M_1 modülü M_2-projektif ise o zaman M_1'in, small M_2-projektif olduğu açıktır.

Lemma 3.2.5. [14] *R bir sağ hereditary halka olsun. O zaman bütün M sağ R-modülleri için bir injektif X sağ R-modülü small M-projektiftir.*
Ayrıca prüfer p-grup $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, her $\mathbb{Z}$-modül M için small M-projektiftir.

İspat: M bir sağ R-modül ve N, M'nin altmodülü olsun. $Im\phi$, M/N'de small olmak üzere $\phi : X \longrightarrow M/N$ bir homomorfizma olsun. $Im\phi$ injektif olduğundan $Im\phi = 0$'dır. Buradan $\phi = 0$'dır. $\square$

Lemma 3.2.6. [14] *M_1 ve M_2 modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*
(1) *M_1, small M_2-projektiftir.*
(2) *$(N + M_1)/N$, M/N'de small olacak şekilde M'nin her N altmodülü için $M = N' \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir N' altmodülü vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) N, $(N + M_1)/N \ll M/N$ olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. O zaman Teorem 3.2.1'den $M = N + M_2$'dir. $m_1 \longmapsto m_1 + N$ olmak üzere $g : M_1 \longrightarrow M/N$ homomorfizmasını ve $m_2 \longmapsto m_2 + N$ olmak üzere $f : M_2 \longrightarrow M/N$ epimorfizmasını düşünelim. $Img = (N + M_1)/N$ olduğundan Img, M/N'de smalldur. Buradan $f\phi = g$ olacak şekilde bir $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ homomorfizması vardır. $N' = \{a - \phi(a) | a \in M_1\}$ tanımlayalım. Açıkça N', N'nin bir altmodülüdür ve $M = N' + M_2$'dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) A, M_2'nin bir altmodülü olsun. $Imf \ll M_2/A$ ve $\pi : M_2 \longrightarrow M_2/A$ doğal epimorfizma olmak üzere $f : M_1 \longrightarrow M_2/A$ bir homomorfizma olsun. $N = \{a + b \in M_1 \oplus M_2 | f(a) = -\pi(b), a \in M_1, b \in M_2\}$ tanımlayalım.
Açıkça A, N'nin bir altmodülüdür ve $M = N + M_2$'dir. X, M_2'nin altmodülü olmak üzere $Imf = X/A$ olsun. $m_2 + A \longmapsto m_2 + N$ olmak üzere $h : M_2/A \longrightarrow M/N$ homomorfizmasını düşünelim. O zaman $h(X/A) = (X + N)/N$ ve bu yüzden $(X + N)/N$, M/N'de smalldur. $(N + M_1)/N$, $(X + N)/N$'nin altmodülü olduğundan $(N + M_1)/N$, M/N'de smalldur. Kabulden $M = N^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır. $\alpha : N^{'} \oplus M_2 \longrightarrow M_2$ kanonik projeksiyonunu düşünelim. O zaman f homomorfizması $\alpha|_{M_1} : M_1 \longrightarrow M_2$ homomorfizmasına yükseltilebilir. Dolayısıyla M_1, small M_2 projektif modül olur. □

Lemma 3.2.7. [12] *M_1 ve M_2 modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*
(1) M_1, M_2-projektiftir.
(2) $M = N + M_2$ olmak üzere M'nin her N altmodülü için $M = N^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır.
İspat: İspatı Lemma 2.1.17'den elde edilir. □

Önerme 3.2.8. [14] *M_1 ve M_2 modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ yeterli tümlenmiş bir modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*
(1) $(N + M_1)/M_1$, M/M_1'de small ve $M = N + M_2$ olacak şekilde M'nin her (eşkapalı) altmodülü için $M = N^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır.
(2) $(N+M_1)/N$, M/N'de small olacak şekilde M'nin her (eşkapalı) N altmodülü için $M = N^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır.
(3) $(N + M_1)/M_1$, M/M_1'de small ve $M = N + M_2$ olacak şekilde M'nin her

eşkapalı altmodülü için $M = N \oplus M_2$'dir.

(4) M_1*, small* M_2*-projektiftir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $(N + M_1)/N$, M/N'de small olmak üzere N, M'nin bir altmodülü olsun. M/M_1 yeterli tümlenmiş olduğundan $M_1 \leq X$, $M/M_1 = X/M_1 + (N + M_1)/M_1$ ve $(X \cap (N + M_1))/M_1 \ll X/M_1$ olacak şekilde M'nin bir X altmodülü vardır. $M = N + X = N + (X \cap (M_1 + M_2)) = (N + M_1) + (X \cap M_2)$'dir. $(N + M_1)/N$, M/N'de small olduğundan $M = (X \cap M_2) + N$'dir. Lemma 3.1.21'den $M = M_2 + (X \cap N)$'dir. Ayrıca $(N \cap X) + M_1 = X \cap (N + M_1)$ olması $((N \cap X) + M_1)/M_1$, X/M_1'de small olduğunu gösterir. Dolayısıyla$((N \cap X) + M_1)/M_1$, M/M_1'de smalldur. Kabulden $N' \leq N \cap X$ ve $M = N' + M_2$ olacak şekilde M'nin bir N' altmodülü vardır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önerme 3.2.2'den açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $(N + M_1)/M_1$, M/M_1'de small ve $M = N + M_2$ olacak şekilde N, M'nin bir altmodülü olsun. M yeterli tümlenmiş olduğundan N', N'nin bir altmodülü olmak üzere M_2'nin bir N' tümleyeni vardır. Açıkça $(N' + M_1)/M_1$, $(N + M_1)/M_1$'de smalldur ve buradan $(N' + M_1)/M_1$, M/M_1'de smalldur. Kabulden $M = N' \oplus M_2$'dir.

(1) $\Rightarrow$ (3) $(N + M_1)/M_1$, M/M_1'de small ve $M = N + M_2$ olacak şekilde N, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. Kabulden $M = N' \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir N' altmodülü vardır. $N = N' \oplus (N \cap M_2)$ olduğundan $((N \cap M_2) + M_1)/M_1$, M/M_1'de small olur. Şimdi $M/M_1 \longrightarrow M_2$ doğal epimorfizmayı düşünürsek $N \cap M_2 \ll M_2$ ve dolayısıyla $N \cap M_2$, M'de small olur. $M \longrightarrow M/N'$ doğal dönüşümünü düşünürsek $((N \cap M_2) + N')/N' = N/N' \ll M/N'$ olur. N eşkapalı olduğundan $N' = N$ elde edilir.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) Lemma 3.2.6'dır. $\square$

Lemma 3.2.9. [14] *M_1 bir modül, M_2 bir yükselen modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1, small M_2-projektif ise o zaman $(N + M_1)/N$, M/N'de small olacak şekilde M'nin her eşkapalı N altmodülü bir direkt toplanandır.*

İspat: $(N + M_1)/N$, M/N'de small olacak şekilde N, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. O zaman Lemma 3.2.6'dan $M = N^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır. Açıkça $M/N^{'}$ yükselen bir modüldür ve N, M'de eşkapalı bir altmodül olduğundan $N/N^{'}$, $M/N^{'}$'de eşkapalı olur. Buradan $N/N^{'}$, $M/N^{'}$'nin bir direkt toplananıdır. Dolayısıyla N'nin, M'nin bir direkt toplananı olduğu elde edilir. □

Teorem 3.2.10. [14] *M_1 ve M_2 yükselen modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ bir yeterli tümlenmiş modül olsun. Eğer aşağıdaki özelliklerden biri sağlanırsa M bir yükselen modüldür.*

(1) *M_1, small M_2-projektif ve $M = N + M_1$ olmak üzere M'nin her eşkapalı N altmodülü bir direkt toplanandır.*

(2) *M_1 ve M_2 aralarında small projektiftir ve $M = N + M_1 = N + M_2$ olmak üzere M'nin her eşkapalı N altmodülü bir direkt toplanandır.*

(3) *M_2, M_1-projektif ve M_1 small M_2-projektiftir.*

(4) *M_1 yarıbasit ve small M_2-projektiftir.*

İspat: (1) ve (2) Teorem 3.2.1 ve Lemma 3.2.9'dan açıktır.

(3) $M = N + M_1$ olmak üzere N, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. O zaman Lemma 3.2.7'den $M = N^{'} + M_1$ olacak şekilde N'nin bir $N^{'}$ altmodülü vardır. $M/N^{'}$ yükselen bir modül ve $N/N^{'}$, $M/N^{'}$'de eşkapalı bir modül olduğundan $N/N^{'}$, $M/N^{'}$'de direkt toplanandır. O halde (3), (1)'den elde edilir.

(4) (3) özelliğinden açıktır. □

Sonuç 3.2.11. [14] *$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, aralarında projektif M_i modüllerinin sonlu direkt toplamı olsun. O zaman M'nin yükselen olması için* *gerek ve yeter koşul M'nin yeterli tümlenmiş olması ve tüm $1 \leq i \leq n$ için M_i'lerin yükselen modül olmasıdır.*

İspat: Gereklilik açıktır. Yeterlilik için M'nin yeterli tümlenmiş bir modül ve tüm M_i'lerin yükselen modül olduğunu kabul edelim. n üzerinde tümevarımla $n = 2$ iken M'nin yükselen modül olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu da Teorem 3.2.10'dan açıktır. □

Sonuç 3.2.12. [14] *R bir sağ hereditary halka olsun. M_1 injektif ve $M = M_1 \oplus M_2$ yeterli tümlenmiş bir modül olmak üzere M_1 ve M_2, R-modüller olsun. O zaman M'nin yükselen modül olması için gerek ve yeter koşul M_1 ve M_2'nin yükselen olması ve M'nin $M = N + M_1$ olacak şekilde ki her eşkapalı N altmodülünün bir direkt toplanan olmasıdır.*

İspat: Lemma 3.2.5 ve Teorem 3.2.10 (1)'den elde edilir. □

Lemma 3.2.13. [14] *M_1 ve M_2 aralarında projektif quasi-ayrık modüller olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2$ bir yükselen modüldür.*

İspat: L, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun.

1. Durum: $M_1 \cap (L + M_2) \neq 0$ olsun. M_1, $(D1)$'i sağladığından M_1'in en az bir A_2 altmodülü için $A_2 \cap (L + M_2)$, A_2'de small ve $M_1 = A_1 \oplus A_2$ olacak şekilde $M_1 \cap (L + M_2)$'nin bir A_1 altmodülü vardır. O zaman $M = L + (A_2 \oplus M_2)$ olur. Eğer $M_2 \cap (L + A_2) = 0$ ise, o zaman Lemma 3.1.19'dan $A_2 = C_1 \oplus C_2$ ve $C_1 \leq (L \cap A_2)$ olmak üzere A_2'nin herhangi C_1, C_2 altmodülleri için $L \cap C_2$, C_2'de smalldur. Buradan $M = L + (C_2 \oplus M_2) = (A_1 \oplus C_1) \oplus (C_2 \oplus M_2)$ olur. M_1 ve A_2 quasi-discrete ve M_1, M_2-projektif olduğundan Lemma 2.1.43, Önerme 5.2.15, Önerme 5.2.16, Önerme 5.2.17'den $A_1 \oplus C_1$, $C_2 \oplus M_2$-projektiftir. Dolayısıyla Lemma 3.2.7'den $M = L' \oplus C_2 \oplus M_2$ olacak şekilde L'nin bir L' altmodülü vardır. Burada $L \cap (C_2 \oplus M_2) \leq C_2 \cap (L + M_2) = L \cap C_2$ olduğunu

not edelim. Böylece $L \cap C_2$, C_2'de small olduğundan $L \cap (C_2 \oplus M_2)$, $C_2 \oplus M_2$'de small olur. $M_2 \cap (L + A_2) \neq 0$ olduğunu varsayalım. M_2, $(D1)$'i sağladığından $M_2 = B_1 \oplus B_2$ ve M_2'nin herhangi bir B_2 altmodülü için $B_2 \cap (L + A_2)$, B_2'de small olacak şekilde $M_2 \cap (L + A_2)$'nin bir B_1 altmodülü vardır. O zaman $M = L + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 \oplus B_1) \oplus (A_2 \oplus B_2)$ olur ve $L \cap (A_2 \oplus B_2)$, $A_2 \oplus B_2$'de smalldur. Çünkü $A_2 \cap (L + B_2)$, A_2'de smalldur ve $B_2 \cap (L + A_2)$, B_2'de smalldur. $A_1 \oplus B_1$, $A_2 \oplus B_2$-projektif olduğundan Lemma 3.2.7'den $M = L^{'} \oplus A_2 \oplus B_2$ olacak şekilde L'nin bir $L^{'}$ altmodülü vardır. Bu durumda ispat tamamlanır.

2. Durum: $M_1 \cap (L + M_2) = 0$. Bu durumun ispatı Teorem 2.1.44 durumunun aynısıdır. $M_1 \cap (L + M_2) = 0$ olsun. Bu ise $L \leq M_2$ olduğunu gösterir. M_2, $(D1)$'i sağladığından $M_2 = B_1 \oplus B_2$ olacak şekilde L'nin bir B_1 altmodülü vardır ve M'nin herhangi bir B_2 altmodülü için $L \cap B_2$, B_2'de smalldur. Dolayısıyla $M = B_1 \oplus (M_1 \oplus B_2)$ ve $L \cap (M_1 \oplus B_2) = L \cap B_2$, $M_1 \oplus B_2$'de small olur. Buradan da M, $(D1)$'i sağlar. $\square$

Önerme 3.2.14. [12] *M_2 quasi-discrete modül ve M_1, M_2 aralarında projektif modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $M = K + L$ olmak üzere K ve L, M'nin direkt toplananları olsun. $M = K + M_2$ olduğunu kabul edelim. O zaman $K \cap L$, M'nin bir direkt toplananıdır.*

İspat: $M = K + M_2$ olduğunu kabul edelim. Lemma 3.2.7'den $M = K^{'} \oplus M_2$ olacak şekilde K'nın bir $K^{'}$ altmodülü vardır. Genelliği bozmaksızın K'nın bir M_1 altmodülü için $K = M_1$ kabul edebiliriz. O zaman $K \cap M_2$, M_2'nin bir direkt toplananıdır. M_2'nin herhangi bir T altmodülü için $M_2 = T \oplus (K \cap M_2)$ yazabiliriz.

Teorem 2.1.45'ten $K \cap M_2$ ve T aralarında projektiftir. $K = M_1 \oplus (K \cap M_2)$ olduğunu not edelim. Önerme 5.2.16 ve 5.2.17 ile T, K-projektiftir. O zaman Lemma 3.2.7 ile L'nin herhangi bir $L^{'}$ altmodülü için $M = K \oplus L^{'}$'dir.

O halde $L = L' \oplus (K \cap L)$'dir. Dolayısıyla $K \cap L$, M'nin bir direkt toplananıdır. $\square$

Teorem 3.2.15. [14] $1 \leq i \leq n$ *için* $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$, M_i *modüllerinin bir sonlu direkt toplamı olmak üzere* M *bir modül olsun. O zaman* M*'nin quasi discrete olması için gerek ve yeter koşul* $M_1, ..., M_n$*'nin aralarında projektif quasi-discrete modüller olmasıdır.*

İspat: Gereklilik Lemma 3.1.19 ve 2.1.43'ten elde edilir. Yeterlilik için $M_1, ..., M_n$'nin aralarında projektif quasi discrete modüller olduğunu varsayalım. n üzerinde tümevarımla ispatı verelim. $n = 2$ durumunu ispatlamak yeterlidir. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ olduğunu kabul edersek Lemma 3.2.13'ten M bir yükselen modüldür. Şimdi de M'nin $(D3)$ özelliğine sahip olduğunu ispatlayalım. K ve L, $M = K + L$ olmak üzere M'nin direkt toplananları olsun. O zaman M/K yükselen modüldür. Önerme 3.1.24 ile $K_1/K \leq (K + M_1)/K$, K_1/K, M/K'da eşkapalı ve $(K + M_1)/K_1 \ll M/K_1$ olacak şekilde K'yı içeren M'nin bir K_1 altmodülü vardır. M/K yükselen modül olduğundan $M/K = (K_1/K) \oplus (K_2/K)$ olacak şekilde K'yı içeren M'nin bir K_2 altmodülü vardır. Buradan açıkça $M = K_2 \oplus M_1$'dir ve K_1, K_2, M'nin direkt toplananlarıdır. Önerme 3.2.14'ten $K_2 \cap L$, M 'nin bir direkt toplananı olur. Diğer yandan $(K_1 + M_2) + (K + M_1) = M$, $M = K_1 + M_2$ elde edilir. Tekrar Önerme 3.2.14'ten $K \cap L = K_1 \cap (K_2 \cap L)$, M'nin bir direkt toplananıdır. Dolayısıyla M quasi-discrete bir modül olur. $\square$

Sonuç 3.2.16. [16, Corollary 4.50] $j \neq i$ *iken* M_i *hollow modül ve* M_j*-projektif olmak üzere* $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *olsun. O zaman* M*, quasi discrete bir modüldür.*

4. HOLLOW-YÜKSELEN MODÜLLER

4.1. Tanımlar

Öncelikle bu bölümde gerekli olan tanımları verelim. Burada R birimli bir halka ve her R-modül birimli sağ R-modül olarak düşünülecektir.

Tanım 4.1.1. [17] Bir M modülünün her sıfırdan farklı altmodülü M'de essential ise M'ye *uniform modül* denir.

Tanım 4.1.2. [17] Eğer, her bir H_i hollow ve $Kerf$, M'de small olmak üzere bir $f : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} H_i$ epimorfizması varsa M modülüne *sonlu hollow boyuta (finite hollow dimension)* sahiptir denir.
M'nin hollow boyutu k'dır ve $h(M) = k$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.3. [17] M/N hollow olacak şekilde M'nin her N altmodülünün M'de bir coessential altmodülü varsa M'ye *hollow-yükselen modül* denir.

Tanım 4.1.4. [17] M herhangi bir modül olsun. Eğer (sonlu) bir I indis kümesi için N ve A_i modülleri için $M \oplus N = \bigoplus_{i \in I} A_i$ iken $B_i \leq A_i$ için $M \oplus N = M \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i)$ oluyorsa M'ye *finite exchange property*e sahiptir denir.

Tanım 4.1.5. [3] M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in End(M)$ için $f(N) \leq N$ ise N'ye M'nin *fully invariant altmodülü* denir.

4.2. Hollow-Yükselen Modüllerin Bazı Özellikleri

Hollow modüllerin ve yarıbasit modüllerin hollow-yükselen modül olduğu açıktır.

Önerme 4.2.1. [17] *H_1 ve H_2 birer hollow modül olmak üzere $M = H_1 \oplus H_2$ ise aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M bir hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M bir yükselen modüldür.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) H_1 ve H_2 birer hollow modül olmak üzere $M = H_1 \oplus H_2$ ve M bir hollow-yükselen modül olsun. N, M'nin bir altmodülü olsun. $\pi_1 : M \longrightarrow H_1$ ve $\pi_2 : M \longrightarrow H_2$ projeksiyon dönüşümleri olsun. Eğer $\pi_1(N) \neq H_1$ ve $\pi_2(N) \neq H_2$ ise H_1 ve H_2 hollow modül olduğundan $\pi_1(N) \ll H_1$ ve $\pi_2(N) \ll H_2$ olur. M'nin bir X altmodülü için $M = X + N$ olsun. O zaman $\pi_1(M) = \pi_1(N+X)$ olur. Buradan $H_1 = \pi_1(N)+\pi_1(X)$ bulunur. $\pi_1(N)$, H_1'de small olduğundan $H_1 = \pi_1(X)$ elde edilir. π_1 bir izdüşüm dönüşümü olduğundan $X = M$ bulunur. O halde N, M'de small olur. Şimdi $\pi_1(N) = H_1$ olduğunu kabul edelim. O zaman $M = H_1 + H_2 = \pi_1(N) + H_2$'dir. Böylece $M/\pi_1(N) \cong H_2$ olur. Diğer taraftan H_2 bir hollow modül olduğundan izomorfizmadan $M/\pi_1(N)$ de bir hollow modüldür. O halde $N/\pi_1(N) \ll M/\pi_1(N)$ olacak şekilde M'de bir direkt toplanan olan M'nin bir $\pi_1(N)$ altmodülü vardır. Öyleyse M bir yükselen modüldür.

(2) $\Rightarrow$ (1) M bir yükselen modül olsun. O zaman Önerme 3.1.17'den M bir yeterli tümlenmiş modüldür. Aynı zamanda M'nin herhangi bir eşkapalı altmodülü M'de bir direkt toplanandır. O halde M bir hollow-yükselen modüldür. $\square$

Örnek 4.2.2. [17] p bir asal tamsayı olsun. Önerme 2.1.47'den $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ yükselen modüldür . O zaman Önerme 4.2.1'den $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ bir hollow-yükselen modüldür. Fakat $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ yükselen modül olmadığından Önerme 2.1.47'den hollow-yükselen modül de değildir .

Önerme 4.2.3. [17] *U, bir M modülünün bir altmodülü olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *U'nun M'de bir güçlü tümleyeni vardır.*

(2) *U'nun M'nin bir direkt toplananı olan bir coessential altmodülü vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) U, M'nin bir altmodülü olmak üzere V, M'de U'nun bir güçlü tümleyeni olsun. O zaman Tanım 3.1.5'ten V, M'de U'nun bir tümleyenidir ve $U \cap V$, U'nun bir direkt toplananıdır. Yani $U + V = M$,

$U \cap V \ll V$ ve U'nun bir W altmodülü için $(U \cap V) \oplus W = U$ yazabiliriz. $M = U + V = [(U \cap V) \oplus W] + V = W \oplus V$ elde edilir. Şimdi de W'nin U'nun bir coessential altmodülü olduğunu gösterelim. Yani $U/W \ll M/W$ olduğunu göstereceğiz. $W \leq X \leq M$ için $U/W + X/W = M/W$ olsun. O zaman $U + X = M$ olur. Kabulden $(U \cap V) + W + X = M$ olur. $U \cap V \ll V$ ve $V \leq M$ olduğundan zincir kuralından $(U \cap V)$, M'de smalldur. Öyleyse $W + X = M$ elde edilir. Dolayısıyla $X = M$'dir. O halde U/W, M/W'de smalldur.

(2) $\Rightarrow$ (1) A, M'nin bir direkt toplananı ve U'nun bir coessential altmodülü olsun. Yani $U/A \ll M/A$'dır. M'nin bir B altmodülü için $M = A \oplus B$ olsun. Modülarite kuralından $U = A \oplus (B \cap U)$ elde edilir. $U + B = A \oplus (B \cap U) + B = A \oplus B = M$; yani $U + B = M$ elde edilir. $(U \cap B) + X = B$ olsun. O zaman $A + (U \cap B) + X = A + B = M$'dir. Buradan $(U \cap A) + (U \cap B) + X = U \cap (A + B) + X = U + X = M$ bulunur. Buradan $U/A + (X + A)/A = M/A$ olur. Kabulden U/A, M/A'da small olduğundan $X + A = M$'dir. Fakat $X \leq B$ olduğundan $X = B$ olur. Dolayısıyla $U \cap B$, B'de smalldur. Sonuç olarak B, U'nun M'deki bir güçlü tümleyenidir. $\square$

Sonuç 4.2.4. [17] *M herhangi bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M'nin M/N hollow olacak şekilde her N altmodülünün M'de bir güçlü tümleyeni vardır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir hollow-yükselen modül olsun. Yani M/N hollow olacak şekilde M'nin her N altmodülü M'de bir coessential altmodüle sahiptir. O zaman M'nin her eşkapalı altmodülü bir direkt toplanandır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Tanım 3.1.5, 4.1.3 ve Önerme 4.2.3'ten açıktır. $\square$

Önerme 4.2.5. [17] *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M'nin M/N hollow olacak şekilde her N altmodülü; K, M'nin bir direkt toplananı ve L, M'nin bir small altmodülü olmak üzere $N = K \oplus L$ olarak yazılabilir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir hollow-yükselen modül olsun. M/N hollow olmak üzere N, M'nin bir altmodülü olsun. M hollow-yükselen bir modül olduğundan $K \leq N$ ve $N/K \ll M/K$ olacak şekilde M'nin bir K direkt toplananı vardır. F, $M = K \oplus F$ olmak üzere M'nin bir altmodülü olsun. $N \cap M = (K \oplus F) \cap N$ ifadesi modülarite kuralından $N = K \oplus (F \cap N)$'dir. Şimdi $F \cap N$'nin M'de small olduğunu göstermeliyiz. X, F'nin bir altmodülü olmak üzere $(F \cap N) + X = F$ olsun. $M = K + F = K + X + (F \cap N) = (K \cap N) + (F \cap N) + X = N \cap (K + F) + X = N + X$ olur. O zaman $M = N + X$ elde ederiz. N/K, M/K'da small olduğundan $X + K = M$'dir. Dolayısıyla $X = F$ olur. O halde $F \cap N$, F'de smalldur. F, M'nin altmodülü olduğundan $F \cap N$, M'de de smalldur.

(2) $\Rightarrow$ (1) N, M/N hollow olacak şekilde M'nin bir altmodülü olsun. O zaman kabulden K, M'nin bir direkt toplananı ve L, M'de small olmak üzere $N = K \oplus L$ olarak yazılabilir. K, X'in altmodülü ve $N/K + X/K = M/K$ olmak üzere X, M'nin bir altmodülü olsun. Dolayısıyla $M = N + X = K + L + X$ ve L, M'de small olduğundan $K + X = M$ olur. Fakat K, X'in altmodülü olduğundan $X = M$'dir. Buradan N/K, M/K'da smalldur. O halde M hollow-yükselen modül olur. $\square$

Uyarı 4.2.6. [17] Hollow faktör modülü olmayan her modül bir hollow-yükselen modüldür.

Önerme 4.2.7. [17] *M bir parçalanamaz modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M hollow modüldür veya M'nin hollow faktör modülü yoktur.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M modülünün bir hollow faktör modülünün olduğunu kabul edelim. O zaman M/N hollow olacak şekilde M'nin bir N özalt modülü vardır. M hollow-yükselen modül olduğundan N/K, M/K'da small olacak şekilde M'nin bir K direkt toplananı vardır. Fakat M parçalanamaz olduğundan $K = 0$ ve N, M'de smalldur. Buradan M'nin kendisi bir hollow modül olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır. $\square$

Sonuç 4.2.8. [17] *M, bir değişmeli Noether R halkası üzerinde sıfırdan farklı parçalanamaz bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M hollow-yükselen bir modüldür.*

(2) *M yükselen bir modüldür.*

(3) *M hollow bir modüldür.*

İspat: (2) $\Leftrightarrow$ (3) Sonuç 2.1.49'dan parçalanamaz bir M modülünün (D_1) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul M modülünün hollow olmasıdır. O halde ispat buradan açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Önerme 4.2.7'den açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (3) [22, Proposition 2.24 ve Theorem 4.30]'dan M'nin bir Artin faktör modülü vardır. Yani azalan zinciri durağandır. Her Artin modülün sonlu hollow boyutu olduğundan M'nin bir hollow faktör modülü vardır. O zaman Önerme 4.2.7'den M hollow olur. $\square$

Önerme 4.2.9. [17] *$M_1, ..., M_n$ hollow faktör modülü olmayan modüller olsun. O zaman $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ hollow-yükselen bir modüldür.*

İspat: M hollow-yükselen bir modül olmasın. $M_1, ..., M_n$ hollow faktör modülü olmayan modüller olsun. M/N hollow olacak şekilde M'nin bir N altmodülü olduğunu varsayalım. O zaman $(M_1+N)/N+(M_2+N)/N+...+(M_n+N)/N = M/N$'dir. M/N hollow modül olduğundan herbir $(M_i + N)/N$, M/N'de smalldur. $(M_1 + N)/N + ... + (M_{i-1} + N)/N + (M_{i+1} + N)/N + ... + (M_n + N)/N \ll M/N$ olduğundan $(M_i+N)/N = M/N$'dir. M/N hollow olduğundan $(M_i + N)/N$ de hollowdur. Yani M_i'nin hollow faktör modülü vardır. Oysa biz olmadığını kabul etmiştik. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla M hollow-yükselen modüldür. □

Uyarı 4.2.10. [17] Önerme 4.2.7 yükselen olmayan bir hollow-yükselen modül örneği bulmakla ilgili fikir verir. Hollow faktör modülü olmayan her parçalanamaz M modülü hollow-yükselendir; fakat yükselen modül değildir. Diğer taraftan N, hollow faktör modülü olmayan parçalanamaz bir modül ve K bir yarıbasit modül olsun. Eğer L, M/L hollow olacak şekilde $M = N \oplus K$'nın bir altmodülü ise o zaman $N + L = M$ veya $K + L = M$'dir. N'nin hollow faktör modülü olmadığından ve $(N+L)/L \cong N/(N\cap L)$ olduğundan $K+L = M$'dir. Fakat K yarıbasittir. Bu sebeple $K = E \oplus (K \cap L)$ olacak şekilde K'nın bir E altmodülü vardır. Buradan $E \oplus L = M$ olur. Dolayısıyla L, M'nin bir direkt toplananıdır. Sonuç olarak M hollow-yükselendir. M'nin yükselen olmadığı açıktır.

Lemma 4.2.11. [27] *$M_0 \leq U \leq M$ ve M_0, M'nin direkt toplananı olsun. O zaman U'nun M'de güçlü tümleyeni varsa ve M_0 finite exchange propertye sahipse U/M_0'ın M/M_0'da güçlü tümleyeni vardır.*

İspat: Bir A modülünün finite exchange propertyi sağlamasından dolayı $X \cong A$ olacak şekilde her $X \oplus Y = B = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ için $B = X \oplus (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B_{\lambda'})$ olacak şekilde $B_{\lambda'} \leq B_\lambda$ altmodülü vardır. V, M'de U'nun H-tümleyeni olduğundan U ve W, M'de aynı toplananlara sahip olacak şekilde $V \oplus W = M$ olduğundan kabulden $V' \oplus W' \oplus M_0 = M$, $V' + U = M$'dir ve böylece $V' = V$ olur. $W_1 = W' + M_0$ ile birlikte tekrar $V \oplus W_1 = M$'dir. U, W_1 gibi M'de aynı toplananlara sahiptir. Fakat buradan $M_0 \leq W_1$ olur. Böylece $(V + M_0)/M_0$,

M/M_0'da U/M_0'ın bir H-tümleyenidir. Fakat $W \leq U$ idi. O zaman $W_1 \leq U$ olur. Yani $W_1/M_0 \leq U/M_0$ olur. □

Önerme 4.2.12. [17] *M_0, finite exchange propertye sahip olan bir M modülünün bir direkt toplananı olsun. Eğer M hollow-yükselen ise o zaman M/M_0 da hollow-yükselendir.*

İspat: M, bir hollow-yükselen modül olsun. $M_0 \leq N \leq M$ ve $(M/M_0)/(N/M_0)$ hollow olsun. Dolayısıyla III. İzomorfizma Teoreminden M/N hollowdur. Sonuç 4.2.4'ten N, M'de bir güçlü tümleyene sahiptir. Lemma 4.2.11'den N/M_0, M/M_0'da bir güçlü tümleyene sahiptir. Sonuç olarak Sonuç 4.2.4'ten M/M_0 da hollow-yükselen modüldür. □

Önerme 4.2.13. [17] *M, bir small olmayan hollow altmodüle sahip bir hollow-yükselen modül olsun. O zaman M'nin bir hollow direkt toplananı vardır.*

İspat: M bir hollow-yükselen modül olsun. H, M'nin bir small olmayan hollow altmodülü olsun. O zaman $M = H + N$ olacak şekilde M'nin bir N özalt modülü vardır. Çünkü H small olmadığından $N \neq M$'dir. M hollow-yükselen olduğundan $N/L \ll M/L$ olacak şekilde M'nin bir L direkt toplananı vardır. Açıkça M/L hollowdur. M'nin bir K altmodülü için $M = K \oplus L$'dir. Dolayısıyla K, M'nin bir hollow direkt toplananıdır. □

Lemma 4.2.14. [17] *M, bir maksimal N altmodülüne sahip bir hollow-yükselen modül olsun. O zaman M'nin bir yerel direkt toplananı vardır.*

İspat: M hollow-yükselen modül ve N, M'nin maksimal altmodülü olsun. O zaman M/N basittir. M hollow-yükselen olduğundan Sonuç 4.2.4'ten M'de N'nin güçlü tümleyeni olacak şekilde M'nin bir K altmodülü vardır. Dolayısıyla K, M'nin direkt toplananıdır. $M = N + K$'dır ve

$M/N = (N + K)/N \cong K/(K \cap N)$'dir. M/N basit modül olduğundan $K/(K \cap N)$ de basit modüldür. $K \cap N$, tümleyen özelliğinden K'da smalldur. O halde K yereldir. □

Önerme 4.2.15. [17] *R bir sağ Noether halka ve M, bir sonlu üretilmiş hollow-yükselen sağ R-modül olsun. O zaman M, yerel modüllerin sonlu direkt toplamıdır.*

İspat: Lemma 4.2.14'ten M, bir H_1 yerel direkt toplananına sahiptir. Teorem 2.1.50'den $End(H_1)$ yereldir. Bu sebeple H_1 exchange propertye sahiptir. O zaman Önerme 4.2.12'den M/H_1 hollow-yükselendir. Dolayısıyla tümevarımla M'nin yerel modüllerin direkt toplamı olduğu sonucuna ulaşabiliriz. □

Tanım 4.2.16. [7] Eğer M'nin her özalt modülü M'nin bir maksimal altmodülünde içeriliyorsa M'ye *coatomic modül* denir.

Lemma 4.2.17. [7] *M bir coatomic modül olsun. O zaman $Rad(M)$, M'de smalldur.*

İspat: $Rad(M)$'nin M'de small olmadığını kabul edelim. O zaman $M = Rad(M) + K$ olacak şekilde M'nin en az bir K altmodülü vardır. Fakat M coatomic olduğundan K, M'nin bir maksimal N altmodülünde içerilir. $Rad(M)$, M'nin bütün maksimal altmodüllerinin kesişimi olduğundan $M = Rad(M) + K \leq N$'dir. Buradan $M = N$ olur. Böylece çelişki elde edilir. O halde $Rad(M)$, M'de smalldur. □

Tanım 4.2.18. [24] M bir R-modül ve $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. O zaman eğer her $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\sum_{\lambda \neq \lambda_0} M_\lambda \neq M$ sağlanırsa bu toplama *irredundant* denir.

Önerme 4.2.19. [17] *M bir coatomic hollow-yükselen modül olsun. O zaman M, M'nin yerel direkt toplananlarının bir irredundant toplamı olarak yazılabilir.*

İspat: M bir coatomic hollow-yükselen modül olsun. Lemma 4.2.17'den M coatomic olduğundan $Rad(M)$, M'de smalldur ve dolayısıyla bir özalt modüldür. Buradan da M, $Rad(M)$'yi içeren bir maksimal altmodüle sahiptir. Lemma 4.2.14'ten M hollow-yükselen bir modül olduğundan bir yerel direkt toplananı vardır. N, M'nin bütün yerel direkt toplananlarının toplamı olsun. M coatomic modül olduğundan M'nin bir maksimal altmodülü vardır. Dolayısıyla Önerme 4.2.14 ile N boştan farklıdır. $N \neq M$ olduğunu kabul edelim. O zaman M'nin N'yi içeren bir maksimal L altmodülü vardır ve M/L hollowdur. M hollow-yükselen olduğundan Sonuç 4.2.4'ten L'nin M'de bir P güçlü tümleyeni vardır. L maksimal olduğundan P, M'nin yerel direkt toplananıdır. Dolayısıyla P, N'nin altmodülüdür. Fakat $M = L + P \leq L + N = L$'dir. Çünkü L, N'yi içeren maksimal altmodüldür. Buradan $M = L$ olur ki bu da L'nin maksimalliği ile çelişir. O halde $M = N$'dir. Bu sebeple her bir A_i, M'nin bir yerel direkt toplananı olmak üzere $M = \sum_{i\in I} A_i$ olsun. O zaman $\dfrac{M}{Rad(M)} = \dfrac{\sum_{i\in I} A_i}{Rad(M)} = \sum_{i\in I} \dfrac{A_i + Rad(M)}{Rad(M)}$'dir. II. İzomorfizma Teoreminden $\dfrac{A_i + Rad(M)}{Rad(M)} \cong \dfrac{A_i}{Rad(M) \cap A_i}$'dir. Lemma 2.1.42'den bu ifadelerin her biri basittir. Önerme 2.1.53 ile $\dfrac{M}{Rad(M)} = \bigoplus_{k\in K} [\dfrac{A_k + Rad(M)}{Rad(M)}]$ olacak şekilde $\exists K \subseteq I$ vardır. Öyleyse $M = \sum_{k\in K} A_k + Rad(M)$'dir. $Rad(M)$, M'de small olduğundan $M = \sum_{k\in K} A_k$'dir. Açıkça $\sum_{k\in K} A_k$, M'nin yerel direkt toplananlarının bir irredundant toplamıdır. $\square$

Sonuç 4.2.20. [17] *M, $Rad(M) = 0$ olmak üzere bir coatomic modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M hollow-yükselendir.*

(2) *M tümlenmiştir.*

(3) *M yarıbasittir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$ M, $Rad(M) = 0$ olacak şekilde bir coatomic hollow-yükselen modül olsun. Önerme 4.2.19'dan M, M'nin yerel direkt toplananlarının bir toplamı olarak yazılabilir. H, M'nin herhangi bir yerel direkt toplananı olsun. O zaman $Rad(H) \leq Rad(M) = 0$'dır ve bu yüzden $Rad(H) = 0$'dır. Dolayısıyla 0 altmodülü H'nin tek small altmodülüdür. Fakat H yereldir ve buradan hollowdur. O halde H'nin 0'dan başka özalt modülü yoktur dolayısıyla H basittir. Yani M basit modüllerin bir toplamıdır. Öyleyse M basittir.
$(3) \Rightarrow (2)$ M'nin yarıbasit modül olduğunu kabul edelim ve L, M'nin altmodülü olsun. O zaman L, M'nin direkt toplananıdır. O halde M'nin en az bir K altmodülü için $M = L \oplus K$'dır. Yani K, M'de L'nin bir tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiştir.
$(2) \Rightarrow (1)$ M/L hollow olmak üzere L, M'nin herhangi bir altmodülü olsun. M tümlenmiş olduğundan H, L'nin tümleyeni olacak şekilde M'nin bir H altmodülü vardır. Yani $H + L = M$ ve $H \cap L \ll H$'dir. Dolayısıyla $L \cap H \ll M$'dir. Fakat $Rad(M) = 0$'dır buradan $L \cap H = 0$'dır. O halde $M = L \oplus H$'dir. Yani H, M'de L'nin bir güçlü tümleyenidir. Dolayısıyla M hollow-yükselendir. □

Lemma 4.2.25'e geçmeden önce ispatı için gerekli olan bazı önermeleri vereceğiz:

Önerme 4.2.21. [6] *Eğer M hollow-yükselen modül ise o zaman M/N hollow olacak şekilde M'nin her eşkapalı N altmodülü M'nin bir direkt toplananıdır. Tersi M yeterli tümlenmiş ise doğrudur.*

İspat: M bir hollow-yükselen modül ve M/N hollow olacak şekilde N, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. O zaman N/L, M/L'de small olacak şekilde M'nin en az bir L direkt toplananı vardır. Fakat N, L'de eşkapalı olduğundan $N = L$'dir. Dolayısıyla N, M'nin bir direkt toplananıdır. Tersi Önerme 3.1.24'ten elde edilir.
□

Lemma 4.2.22. [24] *M bir modül, A ve B, M'nin altmodülleri olsun. A, M'de B'nin tümleyeni iken eğer $C \leq B$ ise o zaman $(A+C)/C$, M/C'de B/C'nin tümleyenidir.*

İspat: Açıkça $(A+C)/C + B/C = M/C$'dir. Şimdi $((A+C)/C) \cap B/C = ((A+C) \cap B)/C = ((A \cap B) + C)/C$'dir. $\pi : A \longrightarrow (A+C)/C$ doğal epimorfizmasını düşünelim. $A \cap B \ll A$ olduğundan $\pi(A \cap B) = ((A \cap B) + C)/C \ll (A+C)/C$'dir. Dolayısıyla $(A+C)/C$, M/C'de B/C'nin tümleyenidir. □

Önerme 4.2.23. [6] *M bir yeterli tümlenmiş modül ise M'nin herhangi bir tümleyen altmodülü, direkt toplananı veya faktör modülü de yeterli tümlenmiştir.*

İspat: İlk olarak A, M'de B'nin bir tümleyeni olsun. O zaman $M = A + B$ ve $A \cap B \ll A$'dır. $A = X + Y$ olacak şekilde X ve Y, A'nın altmodülleri olsun. Buradan $M = X + Y + B$ olur. M yeterli tümlenmiş olduğundan Y', M'de $B + X$'in bir tümleyeni olacak şekilde Y'nin bir Y' altmodülü vardır. Bu $Y' + B + X = M$ ve $Y' \cap (B + X) \ll Y'$ anlamına gelir. Şimdi Y''nin A'da X'in bir tümleyeni olduğunu göstereceğiz. $A = A \cap M = A \cap (Y' + B + X) = (A \cap B) + (X + Y')$'dır. Buradan $A \cap B \ll A$ olduğundan $A = X + Y'$'dir. Bununla birlikte $X \cap Y' \leq (X + B) \cap Y' \ll Y'$'den $X \cap Y' \ll Y'$'dir. Dolayısıyla A yeterli tümlenmiştir. Diğer taraftan M'nin herhangi bir direkt toplananı bir tümleyen altmodüldür ve dolayısıyla yeterli tümlenmiştir. Son olarak faktör modüller için olan iddia da Lemma 4.2.22'den elde edilir. □

Lemma 4.2.24. [6] *M sonlu hollow boyutlu yeterli tümlenmiş bir modül ise M'nin M/K hollow olacak şekilde bir eşkapalı K altmodülü vardır.*

İspat: M'nin bir sonlu hollow boyutu olduğundan Lemma 2.1.55'ten M/N hollow olacak şekilde en az bir $N \leq M$ vardır. Fakat M yeterli tümlenmiş olduğundan Önerme 3.1.24'ten N'nin M'de bir K s-kapanışı vardır. Bunun anlamı K'nın M'de eşkapalı olması ve N/K'nın M/K'da small olmasıdır. Şimdi $M/N \cong (M/K)/(N/K)$, böylece $(M/K)/(N/K)$ hollowdur ve N/K, M/K'da small olduğundan M/K hollowdur. □

Lemma 4.2.25. [17] *M bir yeterli tümlenmiş hollow-yükselen modül ve M/K sonlu hollow boyutlu olmak üzere K, M'nin bir eşkapalı altmodülü olsun. O zaman K, M'nin bir direkt toplananıdır.*

İspat: İspatı M/K'nın hollow boyutu üzerinden tümevarımla yapacağız. Eğer M/K'nın hollow boyutu 1 ise o zaman M/K hollowdur. Çünkü $h(M/K) = 1$ ise, o zaman bir H hollow modül ve $f : M/K \longrightarrow H$ small epimorfizma vardır. Fakat $(M/K)/Kerf \cong H$'dir. Dolayısıyla $(M/K)/Kerf$ de hollowdur. $Kerf$, M/K'de small olduğundan M/K de hollowdur. M hollow-yükselen ve K, M'nin eşkapalı altmodülü olduğundan Önerme 4.2.21'den K, M'nin bir direkt toplananıdır. Şimdi M/K'nın hollow boyutunun n olduğunu kabul edelim. M/T'nin hollow boyutu n'den az olacak şekilde bir eşkapalı T altmodülü için T, M'nin bir direkt toplananı olsun. M yeterli tümlenmiş olduğundan Önerme 4.2.23'ten M/K de yeterli tümlenmiştir. Fakat M/K sonlu hollow boyutlu olduğundan $(M/K)/(H/K)$ hollow olacak şekilde M/K'nın en az bir eşkapalı H/K altmodülü vardır. Dolayısıyla Lemma 3.1.23'ten H, M'de eşkapalıdır. Fakat M hollow-yükselen ve $M/H \cong (M/K)/(H/K)$ hollow olduğundan H, M'nin direkt toplananıdır. Yani M'nin herhangi bir $H^{'}$ altmodülü için $M = H \oplus H^{'}$'dür. Sonuç olarak $H \cap (K \oplus H^{'}) = (H \cap K) \oplus (H \cap H^{'}) = K \oplus 0 = K$'dır ve $H/K \oplus (K \oplus H^{'})/K = (H \oplus K \oplus H^{'})/K = (M \oplus K)/K = M/K$'dır. Buradan $(K \oplus H^{'})/K$, M/K'de eşkapalıdır. Tekrar Lemma 3.1.23'ten $K \oplus H^{'}$, M'de eşkapalıdır. Tümevarımla $K \oplus H^{'}$, M'nin bir direkt toplananıdır. O halde K, M'nin bir direkt toplananıdır. □

Önerme 4.2.26. [17] *Sonlu hollow boyutlu bir yeterli tümlenmiş modülün yükselen olması için gerek ve yeter koşul hollow-yükselen bir modül olmasıdır.*

İspat: M sonlu hollow boyutlu yeterli tümlenmiş bir modül olsun. M yükselen ise hollow-yükselen olduğu açıktır. Tersine M'nin hollow yükselen modül olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir altmodülü olsun. M yeterli tümlenmiş olduğundan Önerme 3.1.24'ten N'nin M'de bir s-kapanışı vardır. Yani K, M'de eşkapalı ve K, M'de N'nin coessential altmodülü olacak şekilde M'nin en az bir K altmodülü vardır. O halde Lemma 4.2.25'ten K, M'nin direkt toplananıdır. Dolayısıyla M yükselen bir modüldür. □

4.3. Değişmeli Halkalar Üzerinde Hollow-Yükselen Modüller

Önerme 4.3.1. [17] *M, değişmeli bir R halkası üzerinde bir R-modül olsun. O zaman $K(M)$'nin hollow-yükselen olması için gerek ve yeter koşul $K_m(M)$'nin tüm $m \in \Omega$'lar için hollow-yükselen olmasıdır.*

İspat: Bu $K(M)$'nin her bir N altmodülü için sahip olduğumuz $N = \bigoplus_{m\in\Omega} N \cap K_m(M)$ gerçeğinin bir sonucudur. □

Sıradaki Lemmaya geçmeden önce bir yardımcı Lemma vereceğiz:

Lemma 4.3.2. [24] *M bir modül ve A, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *X, M'de A'nın coessential altmodülü olmak üzere M'nin bir X direkt toplananı vardır.*

(2) *$A = X \oplus Y$ olmak üzere M'nin X direkt toplananı ve small Y altmodülü vardır.*

(3) *X, A'nın altmodülü ve $A \cap X' \ll X'$ olmak üzere bir $M = X \oplus X'$ parçalanışı vardır.*

(4) *A'nın M'de bir güçlü tümleyeni vardır.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ $M = X \oplus X^{'}$ ve A, M'de X'in bir coessential altmodülü olsun. O zaman $A = A \cap M = A \cap (X \oplus X^{'}) = X \oplus (A \cap X^{'})$'dir. Şimdi $A \cap X^{'}$'yi Y gibi düşünelim. Geriye $A \cap X^{'} \ll X^{'}$ olduğunu göstermek kalır. $f : M/X \longrightarrow X^{'}$ homomorfizmasını düşünelim. $M/X = (X \oplus X^{'})/X \cong X^{'}$ olduğundan f'yi bir izomorfizma olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla X, A'da coessential olduğundan A/X, M/X'te small olur ki buradan $f(A/X) = A \cap X^{'} \ll X^{'}$'dir. O halde $A \cap X^{'}$, M'de smalldur.

$(2) \Rightarrow (3)$ Y, M'de small olmak üzere $M = X \oplus X^{'}$ ve $A = X \oplus Y$ olsun. O zaman açıkça $X^{'}$, M'de X'in bir tümleyenidir. Fakat Y, M'de smalldur. Buradan $X^{'}$, Lemma 2.1.42'den M'de $X + Y = A$'nın tümleyenidir. Sonuç olarak $A \cap X^{'}$, $X^{'}$'de smalldur.

$(3) \Rightarrow (4)$ X, A'nın altmodülü ve $A \cap X^{'} \ll X^{'}$ olmak üzere $M = X \oplus X^{'}$ olsun. $X^{'}$'nin M'de A'nın güçlü tümleyeni olduğunu iddia ediyoruz. X, A'nın altmodülü olduğundan $M = A + X^{'}$ ve buradan $X^{'}$, M'de A'nın bir tümleyenidir. Bununla birlikte $A = A \cap (X \oplus X^{'}) = X \oplus (A \cap X^{'})$'dir. Bu $A \cap X^{'}$, A'nın direkt toplamı olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla iddiamız doğrudur.

$(4) \Rightarrow (1)$ B, M'de A'nın güçlü tümleyeni olsun. O zaman $M = A + B$, $A \cap B \ll B$ ve A'nın herhangi bir C altmodülü için $(A \cap B) \oplus C = A$'dır. Buradan $M = (A \cap B) + C + B$ ve $0 = (B \cap A) \cap C = B \cap C$'dir. Bu $M = B \oplus C$ anlamına gelir. O halde C, M'nin direkt toplananıdır. Şimdi de C'nin M'de A'nın coessential altmodülü olduğunu göstereceğiz. $A/C + X/C = M/C$ olmak üzere $C \leq X \leq M$ olsun. O zaman $M = A + C = (A \cap B) + C + X = (A \cap B) + X$'tir. Fakat $A \cap B$, B'de small olduğundan M'de de smalldur. Bu nedenle $X = M$'dir. Dolayısıyla C, M'de A'nın coessential altmodülüdür. $\square$

Lemma 4.3.3. [17] *M, bir değişmeli yerel R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M bir yükselen modüldür.*

(2) *M'nin M/U devirli olacak şekilde her U altmodülünün M'de bir güçlü tümleyeni vardır.*

Önerme 4.3.4. [26, 3.3] *M, yerel bir değişmeli R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M bir hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M bir yükselen modüldür.*

İspat: (2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (2) M/U devirli olacak şekilde U, M'nin bir altmodülü olsun. R yerel olduğundan M/U da bir yerel modüldür. Dolayısıyla M/U hollowdur. M bir hollow-yükselen modül olduğundan Sonuç 4.2.4'ten U'nun M'de bir güçlü tümleyeni vardır. O halde Lemma 4.3.3'ten M bir yükselen modüldür. □

Sonuç 4.3.5. [17] *M, bir değişmeli R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M bir hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M bir yükselen modüldür.*

İspat: M'nin bir hollow-yükselen bir modül olduğunu kabul edelim. Önerme 4.2.19'dan M yerel altmodüllerin bir sonlu toplamıdır. Bu sebeple Lemma 2.1.57'den M tümlenmiş bir modül olur. Dolayısıyla Önerme 2.1.56'dan $\bigoplus_{m\in\Omega} K_m(M) = K(M)$'dir. Önerme 4.3.1 ve 4.3.4'ten sonuç açıktır. □

4.4. Tamamen Hollow-Yükselen Modüller

Bir M modülünün her direkt toplananı hollow-yükselen ise M'ye *tamamen (completely) hollow-yükselen modül* denir. Şimdi L. Ganesan ve N. Vanaja'nın [5]'te tanımladığı UCC modül tanımını verelim.

Tanım 4.4.1. [5] M'nin her altmodülünün M'de tek bir eşkapanışı varsa M'ye *UCC (uniquely coclosure) modül* denir.

Önerme 4.4.4'te kullanacağımız aşağıdaki iki lemmayı verelim:

Lemma 4.4.2. [15, Proposition 1.2.1] *M bir modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdaki özellikleri düşünelim:*
(1) *N, M'nin bir tümleyen altmodülüdür.*
(2) *N, M'nin eşkapalı altmodülüdür.*
(3) *N'nin her X altmodülü için X, M'de small ise N'de de smalldur.*
O zaman (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) *sağlanır. Eğer M zayıf tümlenmiş modül ise* (3) $\Rightarrow$ (1) *de sağlanır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) N, M'nin bir L altmodülünün tümleyen altmodülü olsun. O zaman $M = N + L$ ve N minimaldir. N/K, M/K'da small olmak üzere K, N'nin altmodülü olsun. Öyleyse $N + L + K = M + K = M$'dir. Dolayısıyla $N/K + (L + K)/K = M/K$'dır. Fakat N/K, M/K'da small olduğundan $L + K = M$'dir. N'nin minimalliğinden $N = K$'dır. Bu da N'nin M'de eşkapalı olduğu anlamına gelir.
(2) $\Rightarrow$ (3) X, M'de small olmak üzere X, N'nin altmodülü olsun. $N = X + Y$ olmak üzere $Y \leq N$ olduğunu kabul edelim. N, M'de eşkapalı olduğundan N/Y'nin M/Y'de small olduğunu göstermek yeterlidir. Bu yüzden Y, H'nin altmodülü olmak üzere $M/Y = N/Y + H/Y$ olsun. O zaman $M = N + H = X + Y + H = X + H$'dir. Fakat X, M'de small olduğundan $H = M$'dir. Buradan N/Y, M/Y'de smalldur. Sonuç olarak N, M'de eşkapalı olduğundan $N = Y$'dir. Dolayısıyla X, N'de smalldur.
(3) $\Rightarrow$ (1) M zayıf tümlenmiş modül olsun. N, M'nin (3)'deki kabulü sağlayan bir altmodülü olsun. M zayıf tümlenmiş olduğundan $M = N + L$ ve $N \cap L \ll M$ olacak şekilde M'nin bir L altmodülü vardır. Kabulden $N \cap L$, N'de smalldur.

Dolayısıyla N, M'de L'nin bir tümleyenidir. $\square$

Lemma 4.4.3. [2] *M bir modül olsun. O zaman;*

(1) $A \leq B \leq M$ için B, M'de eşkapalı ise B/A, M/A'da eşkapalıdır.

(2) $A \leq B \leq M$ olsun. Eğer B, M'de eşkapalı ise o zaman $A \ll M$ olması $A \ll B$ olmasını gerektirir.

(3) $A \leq B \leq M$ için eğer A, M'de eşkapalı ise o zaman A, B'de de eşkapalıdır. Eğer B, M'de eşkapalı ise tersi de doğrudur.

İspat: (1) $X/A \leq B/A$, M/A'da coessential bir modül olsun. O zaman $X \leq B$, M'de coessentialdır. B, M'de eşkapalı olduğundan $X = B$ olur. Dolayısıyla B/A, M/A'da eşkapalıdır.

(2) A, M'de small olmak üzere $A \leq B$'yi düşünelim. B'nin bir $A^{'}$ altmodülü için $A + A^{'} = B$ olduğunu kabul edelim. $M/A^{'} = B/A^{'} + B^{'}/A^{'}$ olacak şekilde $A^{'} \leq B^{'} \leq M$ olsun. O zaman $M = B + B^{'} = A + A^{'} + B^{'} = B^{'}$'dir. O halde $B/A^{'}$, $M/A^{'}$'de smalldur. B, M'de eşkapalı olduğundan $B = A^{'}$ olur. Dolayısıyla A, B'de smalldur.

(3) A/X, B/X'te small olacak şekilde X, A'nın bir altmodülü olsun. O zaman A/X, M/X'te de smalldur. Fakat A, M'de eşkapalı olduğundan $X = A$'dır. Dolayısıyla A, B'de eşkapalıdır. Tersi için varsayalım A, B'de B de M'de eşkapalı olsun. A/X, M/X'te small olmak üzere $X \leq A \leq M$ olsun. (1)'den B/X, M/X'te eşkapalıdır. M/X'e (2)'yi uygularsak A/X, B/X'te smalldur. A, B'de eşkapalı olduğundan $X = A$'dır. Dolayısıyla A, M'de eşkapalıdır. $\square$

Önerme 4.4.4. [17] *M bir zayıf tümlenmiş UCC modül olsun. Eğer M hollow-yükselen ise o zaman M tamemen hollow-yükselendir.*

İspat: $M = N \oplus N^{'}$ ve N/A hollow olmak üzere A, N'nin bir altmodülü olsun. Lemma 3.1.26'dan M yeterli tümlenmiş bir modüldür. Dolayısıyla Önerme 4.2.23'ten N de yeterli tümlenmiş bir modüldür. O zaman $A^{'}$, A'nın altmodülü ve A/A', N/A''de small olmak üzere N'nin bir eşkapalı A' altmodülü vardır. N, M'de eşkapalı olduğundan Önerme 4.2.23, Lemma 4.4.3'ten A', M'de eşkapalıdır. N', M'de eşkapalı olduğundan Teorem 2.1.52'den $A' \oplus N'$, M'de eşkapalı olur. O halde $(N/A')/(A/A') \cong N/A$ hollowdur. Fakat $A/A' \ll N/A'$ olduğundan Lemma 2.1.58'den N/A' hollowdur. Buradan da $M/(N' \oplus A')$ hollow olur. M hollow-yükselen olduğundan $N' \oplus A'$, M'nin direkt toplananıdır ve A', N'nin direkt toplananıdır. Dolayısıyla N hollow-yükselen bir modül olur. □

Önerme 4.4.5. [17] *M, $(D3)$ şartını sağlayan bir hollow-yükselen modül olsun. O zaman M, tamamen hollow-yükselen modüldür.*

İspat: $(D3)$ şartına göre eğer M_1 ve M_2, $M_1 + M_2 = M$ olmak üzere M'nin toplananları ise o zaman $M_1 \cap M_2$, M'nin bir toplananıdır. Şimdi N, M'nin bir direkt toplananı olsun. O zaman M'nin bir N' altmodülü için $M = N \oplus N'$'dir. N/K hollow olacak şekilde K, N'nin bir altmodülü olsun. N'nin hollow-yükselen olduğunu göstereceğiz. $M/K = N/K \oplus (N' \oplus K)/K$ olduğundan $M/(N' \oplus K) \cong (M/K)/((N' \oplus K)/K)$ hollowdur. Kabulden M hollow-yükselen olduğu için $A \leq N' \oplus K$ ve $(N' \oplus K)/A \ll M/A$ olacak şekilde M'nin bir A direkt toplananı vardır. O zaman $M = A + N$'dir. Lemma 3.1.22'den $[N \cap (N' \oplus K)]/(A \cap N) \ll M/(A \cap N)$'dir. Bu yüzden $K/(A \cap N)$, $M/(A \cap N)$'de smalldur. M, $(D3)$ şartını sağladığından $A \cap N$, M'nin bir direkt toplananıdır ve buradan da $A \cap N$, N'nin bir direkt toplananıdır. $K/(A \cap N) \leq N/(A \cap N)$ ve $N/(A \cap N)$, $M/(A \cap N)$'nin bir direkt toplananı olduğundan $K/(A \cap N) \ll N/(A \cap N)$ olur. Dolayısıyla N bir hollow-yükselen bir modüldür. □

Önerme 4.4.6. [17] *H_i'ler hollow modül olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} H_i$ olsun. Eğer M, bir hollow-yükselen modül ve $(D3)$ koşulunu sağlıyor ise, o zaman her $i \in I$ için $\bigoplus_{i \neq j} H_j$, H_i-projektiftir.*

İspat: $M = N + H_i$ olacak şekilde N, M'nin bir özaltmodülü olsun. $\dfrac{M}{N} \cong \dfrac{H_i}{N \cap H_i}$ ve $\dfrac{H_i}{N \cap H_i}$ hollow modül olduğundan $\dfrac{M}{N}$ hollow modül olur. M, hollow-yükselen bir modül iken $N' \leq N$ ve $N/N' \ll M/N'$ olacak şekilde M'nin bir N' direkt toplananı vardır. Böylece $M = H_i + N'$ olur. M, $(D3)$ koşulunu sağladığından $M = H_i \oplus N'$ olur. Buradan Lemma 2.1.17 ile $\bigoplus_{i \neq j} H_j$, H_i-projektiftir. □

Teorem 4.4.7. [17] *H_i'ler hollow olmak üzere $M = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$ olsun. Eğer M, $(D3)$ koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *M, bir hollow-yükselen modüldür.*

(2) *M, bir yükselen modüldür.*

(3) *M quasi-ayrıktır.*

(4) *$i \neq j$'ler için H_i, H_j-projektiftir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (4)$ Önerme 4.4.6'dan açıktır.

$(3) \Leftrightarrow (4)$ Sonuç 3.2.16 ile görülür.

$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ tanımlardan açıktır. □

Teorem 4.4.8. [17] *M, $(D3)$ şartını sağlayan bir hollow-yükselen modül olsun. Eğer M, sonlu hollow-boyutlu ise o zaman M bir yükselen modüldür ve hollow modüllerin sonlu direkt toplamıdır.*

İspat: M, $(D3)$ şartını sağlayan bir hollow-yükselen modül olsun. İlk önce M'nin hollow modüllerin sonlu direkt toplamı olduğunu gösterelim. $h(M)$ üzerinde tümevarım kullanalım. Eğer $h(M) = 1$ ise M hollow yükselendir. $n > 1$ ve $h(N) < n$ olacak şekilde $(D3)$ şartını sağlayan her N modülü için N, hollow modüllerin sonlu direkt toplamı olsun. M, $h(M) = n$ olmak üzere bir hollow-yükselen modül olsun. M'nin parçalanamaz olduğunu kabul edelim. M, sonlu hollow boyutlu olduğundan M/A hollow olacak şekilde M'nin bir A özalt modülü vardır. M hollow-yükselen olduğundan $B \leq A$ ve $A/B \ll M/B$ olacak şekilde M'nin bir B direkt toplananı vardır. O zaman M açıkça hollowdur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece M'nin parçalanamaz olmadığını varsayabiliriz. Bu sebepten N ve L, M'nin sıfırdan farklı altmodülleri olmak üzere $M = N \oplus L$ parçalanışı vardır. $h(M) = h(N) + h(L)$ olduğundan, $h(M) = n$ kabulünden $h(N)$ ve $h(L)$, n'den küçük olur. Önerme 4.4.5'ten N ve L hollow-yükselen modüllerdir. Kabulden N ve L, hollow modüllerin sonlu toplamıdır ve dolayısıyla M de hollow modüllerin sonlu direkt toplamıdır. Teorem 4.4.7'den M yükselen bir modüldür. □

Lemma 4.4.9. [17] *M bir modül olsun. Eğer $M = M_1 \oplus M_2$ ise o zaman M'nin her fully invariant A altmodülü için $M/A = ((A + M_1)/A) \oplus ((A + M_2)/A)$'dır.*

İspat: π_1 ve π_2, M_1 ve M_2 üzerine projeksiyon dönüşümü olsunlar. $a \in A$ olsun. O zaman $\pi_1(a) + \pi_2(a) = a$'dır. $\pi_1(A) \leq A$ ve $\pi_2(A) \leq A$ olduğundan $\pi_1(a) \in A \cap M_1$ ve $\pi_2(a) \in A \cap M_2$ ve dolayısıyla A, $(A \cap M_1) \oplus (A \cap M_2)$'nin altmodülüdür. Sonuç olarak $A = (A \cap M_1) \oplus (A \cap M_2)$'dir. Bu da $(A + M_1) \cap (A + M_2) \leq [(M_1 + M_2 + A) \cap A] + [(M_1 + A + A) \cap M_2] = A + [M_1 + (A \cap M_1) \oplus (A \cap M_2)] \cap M_2 = A$ olduğunu gösterir. Buradan da $M/A = (A + M_1)/A \oplus (A + M_2)/A$ olur. □

Lemma 4.4.10. [17] *M bir modül olsun. M hollow-yükselen ise, o zaman M'nin her fully invariant U altmodülü için M/U hollow-yükselendir.*

İspat: $(M/U)/(A/U) \cong M/A$ hollow olmak üzere A/U, M/U'nun bir altmodülü olsun. M, hollow-yükselen bir modül olduğundan $B \leq A$ ve $A/B \ll M/B$ olacak şekilde M'nin bir B direkt toplananı vardır. $B^{'}$, M'nin altmodülü olmak üzere $M = B \oplus B^{'}$ olsun. Lemma 2.1.59'dan $(A + U)/(B + U) = A/(B + U) \ll M/(B + U)$'dur. Şimdi de $(B + U)/U$'nun M/U'nun bir direkt toplananı olduğunu göstermek kalır. $M = B \oplus B^{'}$ olduğundan Lemma 4.4.9'dan $M/U = (B + U)/U \oplus (B^{'} + U)/U$'dur. O halde

M/U hollow-yükselendir. □

Tanım 4.4.11. [19] Bir M modülünün her altmodülü fully invariant ise M'ye *duo modül* denir.

Sonuç 4.4.12. [17] *M bir duo hollow-yükselen modül olsun. O zaman M completely hollow-yükselendir.*

Önerme 4.4.13. [17] *"$End(M_i)$ yerel ve $\bigoplus_{i \in I} M_i$ parçalanışı direkt toplananlara tümlenir." olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i modüllerinin bir direkt toplamı olsun. Eğer M hollow-yükselen ise o zaman M completely hollow-yükselendir.*

İspat: Teorem 2.1.60 ve Lemma 2.1.61'den M'nin her direkt toplananı exchange propertye sahiptir. M'nin hollow-yükselen olduğunu biliyoruz. Önerme 4.2.12'den her bir $i \in I$ için M/M_i de hollow-yükselendir. Dolayısıyla M, her alt modülü de hollow-yükselen olduğundan completely hollow-yükselen modüldür. □

Sonuç 4.4.14. [1, Corollary 12.7] *Her bir $End(M_i)$ endomorfizma halkası yerel olmak üzere M, $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ sonlu direkt parçalanışına sahip ise o zaman bu parçalanış direkt toplananlarına tümlenir.*

Sonuç 4.4.15. [17] *$End(M_i)$ yerel olmak üzere $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, M_i modüllerinin direkt toplamı olsun. Eğer M hollow-yükselen ise o zaman M completely hollow-yükselendir.*

İspat: Önerme 4.4.13 ve Sonuç 4.4.14'ten elde edilir. □

5. EŞÇOKDÜZE VE YÜKSELEN MODÜLLER

Bu bölümde eşçokdüze ve yükselen modüller arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

5.1. Tanımlar

M bir R halkası üzerinde bir modül olsun. M'nin Jacobsan radikali $Rad(M)$ ile gösterilir.
Eğer M'nin her N altmodülü için $M = K \oplus K^{'}$, $K \leq N$ ve $K^{'} \cap N \ll K^{'}$ olacak şekilde M'nin K ve $K^{'}$ direkt toplananları varsa o zaman M bir yükselen modüldür. Eğer M'nin kopyalarının her sonlu (sayılabilir) direkt toplamı yükselen ise M modülü *sonlu (sayılabilir) (finitely (countably))* Σ*-yükselen*dir. [9]

Tanım 5.1.1. [9] Birbirinden farklı $i_n \in I$ olmak üzere izomorf olmayan sayılabilir bir $\{f_n : M_{i_n} \to M_{i_{n+1}}\}_{\mathbb{N}}$ ailesi için $f_1, ..., f_k = 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ varsa bir $\{M_i\}_{i \in I}$ modül ailesine *(semi) T-nilpotent* denir.

Tanım 5.1.2. [11] M'nin her epimorf görüntüsünün bir projektif örtüsü varsa M'ye *yarımükemmel (semiperfect) modül* denir.

Tanım 5.1.3. [2] M bir modül olmak üzere $M/Rad(M)$ yarıbasit ise M'ye *yarıyerel (semilocal) modül* denir.

Tanım 5.1.4. [2] Eğer bir R halkasının her devirli sağ(sol) ideali projektif ise *sağ (sol) principally projektif halka* denir.

Tanım 5.1.5. [8] $N \ll M$ olsun. $K \leq N$ olmak üzere M'nin her K altmodülü için herhangi bir $f : M \longrightarrow N/K$ homomorfizması sıfır ise o zaman M'ye *eşçokdüze (copolyform) modül* denir.

5.2. Eşçokdüze Modüllerin Epimorf Görüntüleri

Bu bölümde eşçokdüze modüllerin epimorf görüntüleri araştırılmıştır.

Lemma 5.2.1. [2] *A, B, M sağ R modüller olmak üzere eğer $A \leq B \leq M$ ise B, M'de smalldur ancak ve ancak A, M'de smalldur ve B/A, M/A'da smalldur.*

İspat: $A \leq B \ll M$ olduğunu kabul edelim. Lemma 2.1.7'den A, M'de smalldur. $A \leq X \leq M$ olmak üzere $B/A + X/A = M/A$ ise $B + X = M$'dir. B, M'de small olduğundan $X = M$'dir. Dolayısıyla B/A da M/A'da small olur.

Tersine X, M'nin bir altmodülü ve $X + B = M$ olsun. O zaman $M/A = (X + B)/A = (X + B + A)/A = B/A + (X + A)/A$'dır. B/A, M/A'da small olduğundan $(X + A)/A = M/A$'dır. Buradan $M = X + A$ olur. A, M'de small olduğundan $X = M$'dir. Dolayısıyla B, M'de small olur. □

Lemma 5.2.2. [9] *M bir eşçokdüze modül ve N, M'de small olsun. O zaman M/N bir eşçokdüze modüldür.*

İspat: $K/N \ll M/N$ ve $L/N \leq K/N$ olsun.

Bir $f : M/N \longrightarrow (K/N)/(L/N) \cong K/L$ homomorfizmasını alalım. Açıkça $K \ll M$'dir. $\pi : M \longrightarrow M/N$ doğal epimorfizma olmak üzere $f\pi : M \longrightarrow K/L$ homomorfizmasını düşünelim. M bir eşçokdüze modül olduğundan $f\pi = 0$'dır ve buradan $f = 0$'dır. Dolayısıyla M/N bir eşçokdüze modüldür. □

Herhangi bir M modülü için $Rad(M) = 0$ ise M'nin bir eşçokdüze modül olduğu açıktır. Fakat tersi için aşağıdaki Lemmayı verebiliriz:

Lemma 5.2.3. [9] *R bir değişmeli halka ve M bir devirli eşçokdüze modül olsun. O zaman $Rad(M) = 0$'dır.*

İspat: $M = \alpha R$ ve $x \in Rad(M)$ olsun. Dolayısıyla xR, M'de smalldur. R'deki en az bir r elemanı için $xR = (\alpha r)R$'dir. $s \in R$, $\alpha s \longmapsto (\alpha r)s$ olarak tanımlanan $f : \alpha R \longrightarrow (\alpha r)R$ homomorfizmasını düşünelim.Açıkça bu homomorfizma bir epimorfizmadır. Kabulden M bir eşçokdüze modül olduğundan $f = 0$ olur.

Dolayısıyla $(\alpha r)R = xR = 0$ yani $x = 0$'dır. O halde $Rad(M) = 0$ elde edilir. □

Lemma 5.2.4. [2] *Her zayıf tümlenmiş M modülü yarıyereldir.*

İspat: M'nin zayıf tümlenmiş bir modül ve $T/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ olduğunu kabul edelim. L, M'de T'nin bir zayıf tümleyeni olsun. Yani $T + L = M$ ve $T \cap L \ll M$ olsun. $M/Rad(M) = (T + L)/Rad(M)$
$= (T + L + Rad(M))/Rad(M) = T/Rad(M) + (L + Rad(M))/Rad(M)$'dir. Dolayısıyla $M/Rad(M)$ yarıbasittir; yani M yarıyereldir. □

Sonuç 5.2.5. [9] *R, bir değişmeli halka olsun. O zaman her devirli eşçokdüze zayıf tümlenmiş R-modül yarıbasittir.*

İspat: M zayıf tümlenmiş bir modül olduğundan Lemma 5.2.4'ten $M/Rad(M)$ yarıbasittir. Lemma 5.2.3'ten R değişmeli halka ve M devirli eşçokdüze modül olduğundan $Rad(M) = 0$'dır. Dolayısıyla $M/Rad(M) = M$ olur. O halde M modülü de yarıbasittir. □

Şimdi bu bölümün esas sonucuna ulaşmak için gerekli olan Lemmayı vereceğiz. Bunun için bir eşçokdüze yükselen modülün endomorfizma halkasını düşünelim.

Burada aşağıdaki Lemmanın ispatı için gerekli olan Lemmalar verilecektir:

Tanım 5.2.6. [24] Bir R-modül L için;
$Tr(\mathcal{U}, L) = \sum\{Im(h) : h \in Hom(U, L), U \in \mathcal{U}\} \subset L$ altkümesine L'de U'nun *trace si* denir.

Lemma 5.2.7. [24, 39.10] *M bir R-modül, $S = End_R(M)$ ve $f \in S$ olsun.*

(1) *$Kerf$, M'de bir direkt toplanan ise, o zaman $Sf \subset S$ sol ideali S-MOD'da projektiftir.*

(2) *Sf projektif ise, o zaman $Tr(M, Kerf)$, M'de bir direkt toplanandır.*

(3) *M'nin her M-devirli altmodülü M-projektif ise, o zaman S, bir sol principally*

projektif halkadır.

(4) *Eğer S, sol principally projektif halka ise, o zaman her $f \in S$ için $Kerf$, M'de bir direkt toplanandır.*

Lemma 5.2.8. [24, 39.11] *M bir R-modül, $S = End_R(M)$ ve $f \in S$ olsun.*

(1) *Imf, M'de bir direkt toplanan ise sağ ideal $fS \subset S$, $MOD-S$'te projektiftir.*

(2) *M'nin her M-devirli altmodülü M-injektif ise veya M sonlu üretilmiş ve M'nin her M-devirli altmodülü zayıf M-injektif ise S sağ principally projektif halkadır.*

İspat: (1) Imf direkt toplanan ise $Imf = Mf = Me$ olacak şekilde bir idempotent $e \in S$ vardır. S homomorfizma $\psi : S \longrightarrow fS$, $s \longmapsto fs$ için $Ker\psi = (1-e)S$'dir. $Mf(1-e) = Me(1-e) = 0$'dan $(1-e)S \leq Ker\psi$'dir. Diğer taraftan $u \in Ker\psi$ için $Meu = Mfu = 0$'dır. Buradan $eu = 0$ ve dolayısıyla $u \in (1-e)S$'dir.

(2) İspatı (1)'den elde edilir. □

Lemma 5.2.9. [24, 39.13] *Bir R halkası için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *R, sol semihereditary halkadır.*

(2) *Her $n \in \mathcal{Z}^+$ için $R^{(n,n)}$ matris halkası sol principal projektif halkadır.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R bir sol semihereditary halka olduğundan her R^n toplamı da semihereditarydir. Lemma 5.2.10 ile $End(R^n) \cong R^{(n,n)}$ sol principally projektif halkadır.

(2) $\Rightarrow$ (1) K, R'de k elemanla üretilmiş bir sol ideal olsun. O zaman $Imf = K$ olmak üzere bir $f : R^k \longrightarrow R$ homomorfizması vardır. $R \subseteq R^k$ olduğundan f dönüşümü $End(R^k)$'nın bir elemanı olarak kabul edilebilir. (2)'de verilenlerden Lemma 5.2.7'den $Kerf$'nin R^k'da bir direkt toplanan olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $K = Imf$ projektiftir ve R halkası semihereditarydir. □

Lemma 5.2.10. [9] *M bir eşçokdüze modül ve $S = End(M)$, M'nin endomorfizma halkası olsun.*

(1) *M bir yükselen modül ise S sol ve sağ principally projektif halkadır.*

(2) *M bir sonlu Σ-yükselen modül ise S sol ve sağ semihereditary halkadır.*

İspat: (1) $f \in S$ olsun. M bir yükselen modül olduğundan M'nin en az bir M_2 altmodülü için $M_1 \leq f(M)$, $M = M_1 \oplus M_2$ ve $f(M) \cap M_2 \ll M_2$ olacak şekilde M'nin bir M_1 direkt toplananı vardır. $f(M) \cap M_2 \ll M_2$ olduğundan $f(M) \cap M_2 \ll M$ olduğu açıktır. $M = M_1 \oplus M_2$'den $f(M) \cap M = f(M) \cap (M_1 \oplus M_2)$'dir. M, $f(M)$'nin altmodülü olduğundan Lemma 2.1.4'ten eşitliğin sağ tarafını $f(M) \cap (M_1 \oplus M_2) = M_1 \oplus (f(M) \cap M_2)$ olarak yazabiliriz. $f(M) \leq M$ olduğundan $f(M) \cap M = f(M)$'dir. O halde $f(M) = M_1 \oplus (f(M) \cap M_2)$ elde ederiz. Şimdi α, $f(M)$'den $f(M) \cap M_2$ üzerine kanonik projeksiyon olmak üzere α ile f'nin bileşkesi olarak $\alpha f : M \longrightarrow f(M) \cap M_2$ dönüşümünü düşünelim. $(\alpha f)(M) = f(M) \cap M_2$ ve $f(M) \cap M_2$, M'de smalldur. Kabulden M bir eşçokdüze modül olduğundan $\alpha f = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f(M) \cap M_2 = 0$ olur. Şimdi $f(M) = M_1 \oplus (f(M) \cap M_2)$'den $f(M) = M_1$ olur. Sonuç olarak $f(M)$, her $f \in S$ için M'nin bir direkt toplananıdır. Lemma 5.2.8'den S sağ principal projektif halkadır. S'nin sol principal projektif halka olduğunu göstermek için ilk paragraftaki ispatın aynısı ile $f(M)$'nin M'nin bir direkt toplananı olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden S'deki en az bir idempotent e için $f(M) = e(M)$'dir. $s \in S$ olmak üzere β, $\beta(s) = sf$ ile $\beta : S \longrightarrow Sf$ dönüşümünü göstersin. O zaman $(1 - e)f(M) = 0$ veya $S(1 - e) \leq Ker\beta$'dır. $g \in Ker\beta$ olsun. O zaman $\beta(g) = 0$ yani $gf = 0$'dır. Buradan $gf(M) = ge(M) = 0$'dır. Bu da $ge = 0$ olduğunu gösterir. O zaman $g(1 - e) = g \in S(1 - e)$'dir. Dolayısıyla $S(1-e) = Ker\beta$'dır. $S/Ker\beta = S/S(1-e) \cong Se$ ve $\beta(S) = Sf \cong S/Ker\beta \cong Se$, Sf'nin S'nin projektif sol ideali olduğunu ispatlar. Dolayısıyla S, principally projektif halkadır.

(2) $S^{n\times n}$, n pozitif tamsayısı için S üzerinde $n \times n$ matrislerin halkası olsun. (1)'den $End(M^n) \cong S^{n\times n}$ principally projektif halkadır. Lemma 5.2.9'dan S, sol ve sağ semihereditarydir. $\square$

Lemma 5.2.11. [16, Lemma 4.30] *N, A-projektif bir modül ise o zaman bir $f : A \longrightarrow N$ epimorfizması splittir. Eğer ek olarak A parçalanamaz ise o zaman f bir izomorfizmadır.*

Önerme 5.2.12. [9] *M bir modül ve her bir M_i parçalanamaz ve quasi-projektif olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olsun. Eğer M bir yükselen modül ise o zaman $i, j, k \in I$ ve $f : M_k \longrightarrow M_i$ ve $g : M_k \longrightarrow M_j$ epimorfizmaları için $Kerf \leq Kerg$ veya $Kerg \leq Kerf$'dir veya $M_i \oplus M_j$ ayrıktır.*

İspat: Kabulden yerel endomorfizma halkaları ile M_i ve M_j ayrık modüllerdir. M_k quasi-projektif olduğundan eğer bir $h : M_i \longrightarrow M_j$ endomorfizması varsa o zaman $hf : M_k \longrightarrow M_j$, M_k'nın bir $h^{'}$ endomorfizmasına yükseltilebilir. Sonuç 2.1.49'dan M_k hollowdur ve quasi-projektif olduğundan Lemma 5.2.11'den $h^{'}$ izomorfizmadır. $M_k/Kerf$ ve $M_k/Kerg$ quasi-projektif ve $Kerf \ll M_k$ ve $Kerg \ll M_k$ olduğundan $Kerf$ ve $Kerg$, M_k'da fully invarianttır. Dolayısıyla $Kerf \leq Kerg$'dir. Aynı yol ile eğer bir $h : M_j \longrightarrow M_i$ epimorfizması olduğunu kabul edersek $Kerg \leq Kerf$'dir. Eğer böyle epimorfizmalar yoksa o zaman M_i ve M_j Lemma 2.1.62'den aralarında projektiftir. Dolayısıyla $M_i \oplus M_j$ Teorem 2.1.63'ten ayrıktır. $\square$

Teorem 5.2.13. [9] *M bir yükselen modül olsun. Tüm M_i'ler bir projektif örtüye sahip olmak üzere $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olsun. Ayrıca her M_i sonlu üretilmiş ve yerel endomorfizma halkasına sahip olsun. O zaman $i_n \in I$'ler farklı olmak üzere $\{f_n : M_{i_{n+1}} \longrightarrow M_{i_n}\}_{\mathbb{N}}$ özalt epimorfizmalarının sonsuz dizisi yoktur.*

İspat: $I = \mathbb{N}$ kabul edelim. Böylece özalt epimorfizmaların

$\ldots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-2} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1$ bir sonsuz dizisini düşünelim. $g_1 : P_1 \longrightarrow M_1$, M_1'in bir projektif örtüsü olsun. P_1 projektif olduğundan $f_1 g_2 = g_1$ olacak şekilde bir $g_2 : P_1 \longrightarrow M_2$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "g_2"'] \arrow[d, "g_1"] & \\ M_2 \arrow[r, "f_1"'] & M_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

f_1 epimorfizma ve M_2 hollow olduğundan g_2 de epimorfizmadır. O zaman her $n > 1$ için tümevarımla her g_n epimorfizma ve $f_{n-1} g_n = g_{n-1}$ olacak şekilde $g_n : P_1 \longrightarrow M_n$ vardır. Açıkça P_1 devirlidir. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\pi_i : \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i \longrightarrow M_i$ projeksiyon olsun. O zaman her $i \in \mathbb{N}$ için $\pi_i h_i = g_i$ olacak şekilde bir $h_i : P_1 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, "g_i"] & \\ \bigoplus M_i \arrow[r, "\pi_i"'] & M_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

O zaman her $i \in \mathbb{N}$ için $Imh_i \leq \bigoplus_{i=1}^{k(i)} M_i$'dir ve Imh_i, $\bigoplus_{i=1}^{k(i)} M_i$'de small değildir. Buradan her $i \in \mathbb{N}$ için Imh_i, $\bigoplus_{i=1}^{k(i)} M_i$'nin bir direkt toplananıdır. Teorem 2.1.41 ile her $i \in \mathbb{N}$ için $\bigoplus_{i=1}^{k(i)} M_i = Imh_i \oplus (\bigoplus_{i \neq j}^{k(i)} M_i)$'dir. Burada $Imh_i \cong M_j$, $j \in \mathbb{N}$'dir. $Imh_i \cong M_j$ olduğundan $h_i : P_1 \longrightarrow M_j$ ve $\pi_j : M_j \longrightarrow M_j$'yi düşünebiliriz. Dolayısıyla g_j bir izomorfizma olmalıdır. $f_j g_{j+1} = g_j$ olduğundan f_j bir izomorfizmadır. Bu da bizim iddiamızla çelişir. O halde sonlu bir adımda durur. $\square$

Sonuç 5.2.14. [9] *R bir sağ mükemmel halka olsun. M bir eşçokdüze yükselen modül olsun. O zaman tüm M_i'lerin yerel endomorfizma halkaları olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ayrışımı için $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi semi T-nilpotenttir.*

İspat: Bütün M_i'ler hollow olmak üzere eğer $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ eşçokdüze ise sıfırdan farklı bir $f_n : M_{i_n} \longrightarrow M_{i_{n+1}}$ homomorfizması bir epimorfizmadır. Teorem 5.2.13'ten özalt epimorfizmaların sonsuz dizisi yoktur. Yani $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi semi T-nilpotenttir. □

Şimdi Önerme 5.2.25 için gerekli olan önermeleri vereceğiz:

Önerme 5.2.15. [16, Proposition 4.31] *N, A-projektif bir modül olsun. Eğer B, A'nın altmodülü ise o zaman N, B-projektiftir ve A/B-projektiftir.*

Önerme 5.2.16. [16, Proposition 4.32] *M_α'lar birer modül olmak üzere $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ direkt toplamının A-projektif olması için gerek ve yeter koşul M_α'nın her $\alpha \in \Lambda$ için A-projektif olmasıdır.*

Önerme 5.2.17. [16, Proposition 4.33] *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir N modülünün $(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i)$-projektif olması için gerek ve yeter koşul $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere N'nin A_i-projektif olmasıdır.*

Önerme 5.2.18. [16] *I keyfi bir küme olsun. Eğer N sonlu üretilmiş ve her $i \in I$ için A_i-projektif bir modül ise o zaman N, $(\bigoplus_{i \in I} A_i)$-projektiftir.*

İspat: X, $\bigoplus_{i \in I} A_i$'nin bir altmodülü olsun. O zaman; $(\bigoplus_{i \in I} A_i)/X = \sum_{i \in I} \bar{A}_i$'dir. Burada $\bar{A}_i = (A_i + X)/X$'tir. Herhangi bir $\phi : N \longrightarrow \sum_{i \in I} A_i$ homomorfizması için, sonlu bir $F \subseteq I$ için $Im\phi \leq \sum_{i \in F} \bar{A}_i$'dir. O zaman Önerme 5.2.17'den $\sum_{i \in F} A_i$ sonlu direkt toplamına ulaşırız. Böylece N, $(\bigoplus_{i \in I} A_i)$-projektif olur. □

Sonuç 5.2.19. [16, Corollary 4.36] *Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.*

Önerme 5.2.20. [16] *Bir quasi- projektif M modülünün ayrık olması için gerek ve yeter koşul M'nin her altmodülünün bir tümleyeninin olmasıdır.*

İspat: Eğer M bir ayrık modül ise o zaman $(D1)$'i sağlar ve dolayısıyla Önerme 2.1.48'den M tümlenmiştir. Tersine M'nin her altmodülünün bir tümleyeni olduğunu kabul edelim. İlk olarak M'nin tümlenmiş olduğunu göstereceğiz. $M = A+B$ olsun. B'nin, A'nın bir tümleyenini içerdiğini göstereceğiz. Kabulden A'nın bir P tümleyeni vardır. O zaman $M = A + P$'dir ve $A \cap P \ll P$'dir. $\nu : M \longrightarrow M/A$ ve $\pi : B \longrightarrow M/A$ doğal homomorfizmalar olsun. Önerme 5.2.15'ten M, B-projektif olduğundan $\pi f = \nu$ olacak şekilde $f : M \longrightarrow B$ dönüşümü vardır. $\mu = \nu \mid_P$ ve $g = f \mid_P$ olsun. O zaman $\pi g P = \mu P = M/A$ ve dolayısıyla $M = A + g(P)$'dir.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "1"] \arrow[ddl, dashed, "g"'] & \\
 & M \arrow[d, "\nu"] \arrow[dl, dashed, "f"'] & \\
B \arrow[r, "\pi"'] & M/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$A \cap g(P) = g(Ker\mu)$ olduğunu görmek kolaydır. $Ker\mu = A \cap P \ll P$ olduğundan Lemma 2.1.59'dan $g(Ker\mu) \ll g(P)$'dir. Dolayısıyla $A \cap g(P) \ll g(P)$'dir ve sonuç olarak $g(P)$, A'nın B'de içerilen bir tümleyenidir. Şimdi M'nin her tümleyen altmodülünün bir toplanan olduğunu ispatlayacağız. Böylece Önerme 2.1.48 ile M'nin $(D1)$ özelliğine sahip olduğu sonucuna ulaşacağız. A'nın M'nin bir tümleyen altmodülü olduğunu kabul edelim. B, A'nın bir tümleyeni olsun. Aynı diyagramı kullanalım. $\pi f(A) = \nu(A) = 0$ olduğundan $f(A)$, A'nın altmodülüdür. O zaman $M = f(M) + A = f(A + B) + A = f(A) + f(B) + A = f(B) + A$'dır. B'nin minimalliğinden $f(B) = B$'dir dolayısıyla $M = B + Kerf$'dir. $Kerf$,

A'nın altmodülü olduğundan A'nın minimalliğinden $Kerf = A$'dır. Buradan $Kerf = A = Ker\nu = Ker\pi f$'dir. $f(M) = B$ üzerinde π bir monomorfizmadır. Ohalde $Ker\pi = 0 = A$'dır. Sonuç olarak $A \cap B = 0$'dır. Yani $M = A \oplus B$'dir. Önerme 2.1.64 ile M, $(D2)$ özelliğine sahip olduğundan M, ayrıktır. □

Lemma 5.2.21. [16, Proposition 4.40] *$M = A + B$ olsun. Eğer M/A'nın bir projektif örtüsü varsa o zaman B, A'nın bir tümleyenini içerir.*

İspat: $\mu : P \longrightarrow M/A$ bir projektif örtü olsun. π, B'den M/A'ya doğal epimorfizmayı göstersin. P projektif olduğundan $\pi g = \mu$ olacak şekilde bir $g : P \longrightarrow B$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\mu"] & \\ B \arrow[r] & M/A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Önerme 5.2.20'nin ispatındaki gibi $g(P)$, A'nın B'de içerilen bir tümleyenidir.

□

Teorem 5.2.22. [16, Theorem 4.41] *Bir R halkası için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *R bir sağ (yarı) mükemmel halkadır.*

(2) *Her (sonlu üretilmiş) quasi-projektif R-modül ayrıktır.*

(3) *Her (sonlu üretilmiş) R-modül tümlenmiştir.*

(4) *Her devirli serbest R-modül "Her alt modülün bir tümleyeni vardır." özelliğine sahiptir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$ Lemma 5.2.21'den, $(3) \Rightarrow (2)$ Önerme 5.2.20'den, $(2) \Rightarrow (4)$ açıktır.

(4)'ü kabul edelim ve M bir devirli R-modül olsun. O zaman F bir (devirli) serbest modül olmak üzere bir $\eta : F \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. Önerme 5.2.20'den F, $(D1)$ özelliğine sahip olduğundan $F_1 \leq Ker\eta$ ve $F_2 \cap Ker\eta \ll F_2$ olmak üzere $F = F_1 \oplus F_2$'dir. O zaman $\eta\mid_{F_2}: F_2 \longrightarrow M$, M'nin bir projektif örtüsü olduğu açıktır.

$$\begin{tikzcd}
 & F_2 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\eta\mid_{F_2}"] \\
F \arrow[r, "\eta"'] & M
\end{tikzcd}$$

Dolayısıyla R sağ (yarı) mükemmel halkadır. □

Sonuç 5.2.23. [16, Corollary 4.43] *Bir P projektif modülünün yarımükemmel olması için gerek ve yeter koşul P'nin ayrık olmasıdır. P'nin ayrık olması için gerek ve yeter koşul P'nin her altmodülünün bir tümleyeninin olmasıdır.*

Teorem 5.2.24. [13, Theorem 2.10] *Bir R halkasının sağ mükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul R^N'nin $\oplus$-tümlenmiş R-modül olmasıdır.*

Önerme 5.2.25. [9] *R bir halka olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) *R, sağ mükemmel halkadır.*

(2) *R, Σ-yükselendir.*

(3) *R, sayılabilir Σ-yükselendir.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ R, bir sağ mükemmel halka olsun. Bir I indis kümesi için tüm $i \in I$'lar için $R = R_i$ olmak üzere $M = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$ olsun. M'nin bir yükselen modül olduğunu göstermek istiyoruz. $i \in I$ alalım. O zaman Sonuç 5.2.19'dan $\bigoplus\limits_{i\neq j} R_j$ projektiftir. R sağ mükemmel halka olduğundan Teorem 5.2.22 $(1) \Rightarrow (2)$'den $\bigoplus\limits_{i\neq j} R_j$ quasi-discretedir. Açıkça Önerme 5.2.18'den R_i ve $\bigoplus\limits_{i\neq j} R_j$ aralarında projektiftir. Teorem 3.2.15'ten M quasi-discrete ve buradan yükselendir.

$(2) \Rightarrow (3)$ Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) R sayılabilir Σ-yükselen bir modül olsun. O zaman serbest R-modül $R^{\mathbb{N}}$ yükselendir. Buradan da Teorem 5.2.24'ten R sağ mükemmel halkadır. $\square$

Sonuç 5.2.26. [9] *R bir halka olsun. R halkasının eşçokdüze (sayılabilir) Σ-yükselen olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarıbasit olmasıdır.*

Önerme 5.2.27. [9] *M bir projektif modül olsun. M'nin yarımükemmel olması için gerek ve yeter koşul M'nin sonlu Σ-yükselen olmasıdır.*

İspat: M bir yarımükemmel modül olsun. O zaman Sonuc 5.2.23'ten M quasi-ayrıktır. Buradan Teorem 3.2.15'ten tüm i'ler için $M_i = M$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{n} M$, bütün n pozitif tamsayıları için yükselendir. Dolayısıyla M, sonlu Σ-yükselendir. Tersine M'nin sonlu Σ-yükselen olduğunu kabul edelim. M bir yükselen modül olduğundan Sonuç 5.2.23'ten yarımükemmeldir. $\square$

Teorem 5.2.28. [9] *M bir eşçokdüze yarımükemmel modül olsun. O zaman $S = End(M)$ bir sağ ve sol principally projektif halka ve sağ ve sol semihereditary halkadır.*

İspat: Lemma 5.2.10 ve Sonuç 5.2.27'den açıktır. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., and Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer-Verlag, 376 s., New York.

[2] Clark J., Lomp C., Vanaja N., and Wisbauer R., 2006. Lifting Modules, 394 s., Basel.

[3] Dauns, J., 1994. Modules and Rings. Cambridge Univ. Press.

[4] Fleury, P. 1974. Hollow Modules and Local Endomorphism Rings. **Pasific J. Math.**, 53, 379-385.

[5] Ganesan, L., Vanaja, N., 2002. Modules for which Every Submodule has a unique coclosure, **Comm. Algebra**, 30(5), 2355-2377.

[6] Ghannam, M. 2013. A Study on Hollow-Lifting Modules. M. Sc. Thesis, Birzeit University, Palestine.

[7] Güngöroğlu, G., 1998. Coatomic Modules. **Far East J. Math. Sci.** Special Vol., Part II, 153-162.

[8] Güngöroğlu, G., 2000. Copolyform Modules. **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.** Series A1, V.49. pp. 101-110.

[9] Güngöroğlu, G., Keskin Tütüncü, D., 2003. Copolyform and Lifting Modules, **Far East J. Math. Sci.**, 9(2), 159-165.

[10] Harada, M., 1982. On Modules with Lifting Properties, **Osaka J. Math.**, 19, 189-201.

[11] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no:17, 372 s., London.

[12] Keskin, D. 1998. Finite Direct Sums of (D1)-modules. **Turkish Journal of Mathematics**, 22(1), 85-92.

[13] Keskin, D., Smith, P. F., Xue, W., 1999. Rings whose modules are $\oplus$-supplemented, **J. Algebra**,218,470-487.

[14] Keskin, D. 2000. On Lifting Modules. **Communications in Algebra**, 28(7), 3427-3440.

[15] Lomp, C. 1996. On Dual Goldie Dimension. M. Sc. Thesis, Glasgow University.

[16] Mohamed, S. H., ve Müller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. Cambridge University Press, 126s., Cambridge.

[17] Orhan, N., ve Keskin, D., ve Tribak, R. 2007. On Hollow-Lifting Modules. **Taiwanese Journel of Mathematics**, Vol. 11, No. 2, 545-568.

[18] Oshiro, K., 1984. Lifting Modules, Extending Modules and Their Applications to Generalized Uniserial Rings, **Hokkaido Math. J.** 13, 339-346.

[19] Özcan A. Ç., Harmancı A., P. F. Smith, 2006. Duo modules, **Glasgow Math. J.**, 48, 533-545.

[20] Park, Y. S. ve Rim, S. H., 1994. Hollow Modules and Corank Relative to a Torsion Theory. **J. Korean Math. Soc.** 31(3), 439-456.

[21] Reiter, E., 1981. A Dual to the Goldie Ascending Chain Condition on Direct Sums of Submodules. **Bull. Cal. Math. Soc.**, 73, 55-63.

[22] Sharpe, D. W. ve Vamos, P., 1972. Injective Modules, Lecture on pure mathematics, University of Sheffield.

[23] Takeuchi, T., 1976. On Cofinite-dimensional Modules. **Hokkaido Math. Journal** 5(1), 1-43.

[24] Wisbauer, R. 1991. Foundations of Module and Ring Theory. University of Düsseldorf, 606s., Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia.

[25] Zöschinger, H., 1974. Komplementierte Moduln uber Dedekindringen, **J. Algebra**, 42-56.

[26] Zöschinger, H., 1982. Komplemente Als Directe Summanden II. **Arch. Math.**, 38, 324-334.

[27] Zöschinger, H., 1982. Gelfandringe und koabgeschlossene Untermoduln, **Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.** Sitzungsber, 43-70.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Pelin Bağcı
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Aydın, 13.10.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	pelin.bagci@hotmail.com.tr
Tarih	:	03.02.2020