T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAT-YL-2005-0001

FUCHS GRUPLARININ GEOMETRİSİ

HAZIRLAYAN: Jülide ESKİCİ

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU

AYDIN-2005

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, Fuchs gruplarının geometrik özelliklerini incelemektir.

Birinci bölümde, Fuchs grupları ve bazı uygulamaları hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm; grup etkisi, topolojik gruplar ve Möbius dönüşümlerine ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde kısaca hiperbolik düzlem ve hiperbolik geometri tanıtılmıştır. Ayrıca, hiperbolik düzlemin izometrileri ve bunların geometrisi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Fuchs grupları tanıtılmış ve çoğunlukla bunların geometrik özellikleri üzerinde durulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Fuchs grupları, Möbius dönüşümleri, hiperbolik geometri, temel bölge, bölüm uzayı.

ABSTRACT

The aim of this work is to investigate the geometrical properties of Fuchsian groups.

In the first chapter, a short knowledge has been given on Fuchsian groups and some of their applications.

The second chapter is devoted to group actions, topological groups and Möbius transformations.

In chapter three, hyperbolic plane and hyperbolic geometry have been shortly introduced. Also, the isometries of hyperbolic plane and the geometry of them have been investigated.

In chapter four, Fuchsian groups have been introduced and mostly their geometric properties have been emphasized.

KEY WORDS: Fuchsian groups, Möbius transformations, hyperbolic geometry, fundamental region, quotient space.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER LİSTESİ

C	Karmaşık sayılar kümesi
H	Hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli
Q	Rasyonel sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
Z	Tamsayılar kümesi
ρ	Hiperbolik metrik
M(2,**C**)	$\left\{ z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbf{C},\ \ ad-bc \neq 0 \right\}$
M_1(2,**R**)	$\left\{ z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbf{R},\ \ ad-bc = 1 \right\}$

1. GİRİŞ

Karmaşık düzlemin üst yarısını

$$\mathbf{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R},\ y > 0\}$$

ile gösterelim. **H** kümesinden **H** kümesine konform izometriler

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1),$$

biçimindeki dönüşümlerden oluşur (Jones and Singerman, 1987). Üçüncü bölümde görüleceği, gibi, **H** hiperbolik düzlem için bir modeldir. Hiperbolik düzlemin konform izometrileri bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grubun herhangi bir ayrık alt grubu bir Fuchs grubudur. Bu gruplar dördüncü bölümde daha geniş olarak açıklanacaktır. Modüler grup ve üçgensel gruplar gibi bazı Fuchs gruplarının önceden bilinmesine rağmen, Fuchs grupları konusunda ilk sistematik çalışmayı Poincaré (1882) yapmıştır. Poincaré, L. Fuchs'un diferansiyel denklemler konusundaki bir makalesini okuduktan sonra Fuchs gruplarını bu isimle anmıştır.

Γ, birim eleman dışındaki bütün elemanları ötelemeler olan bir Fuchs grubu ve $\mathbf{H}/\Gamma$ kompakt olsun. Bu durumda, Y= $\mathbf{H}/\Gamma$ bölüm uzayı bir kompakt Riemann yüzeyidir (Springer, 1957). Eğer Λ, Γ grubunu normal alt grup olarak içeren bir başka Fuchs grubu ve $|\Lambda : \Gamma| = n$ (Γ grubunun Λ grubundaki indeksi) ise Λ/Γ bölüm grubunun Y yüzeyinin bir konform otomorfizma grubu olduğu Macbeath (1961) tarafından gösterilmiştir. Böylece, her Riemann yüzeyinin konform otomorfizma grubu iki Fuchs grubunun bölüm grubu olarak ifade edilebilmektedir. Bu sonuç elde edildikten sonra Fuchs grupları, Riemann yüzeylerinin konform dönüşümlerden oluşan otomorfizma gruplarını belirlemede etkin bir araç haline gelmiş ve bu konudaki araştırmalarda sıkça kullanılmıştır. Riemann yüzeylerinin terskonform (anti-conformal) dönüşümleri de içeren tüm otomorfizma gruplarını belirlemek için ise NEC (Non-Euclidean Crystallographic) gruplarından benzer şekilde yararlanılmaktadır. Bunlar, Fuchs gruplarından daha geniştirler ve yansıma ve ötelemeli yansıma da içerebilirler. Bu çalışmada NEC grupları yer almayacaktır.

Bir Fuchs grubunu oluşturan dönüşümler; hiperbolik düzlemdeki ötelemeler, rotasyonlar ve limit rotasyonlardır. Bu dönüşümlerin her biri iki yansımanın bileşkesi olarak ifade edilebilir. Buradaki ötelemeler ve rotasyonlar Öklid düzlemindekilere çok benzemektedirler. Fakat Öklid düzleminde limit rotasyonlara benzeyen izometriler bulunmamaktadır. Bir limit rotasyon, hiperbolik düzlemde sonsuzdaki bir noktayı sabit tutan bir rotasyon olarak göz önüne alınabilir. Üçüncü bölümde, yukarıda bahsedilen dönüşümlerin yansımaların bileşkesi olarak elde edilişleri ve geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu dönüşümler Möbius dönüşümlerinin bir alt ailesini oluştururlar ve ikinci bölümde bunlar sabit nokta kümelerine göre sınıflandırılmışlardır.

Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı bir yüzeydir. Bu yüzeyin topolojik özellikleri, Fuchs grubunu oluşturan dönüşümlerin cinsine bağlıdır. Örneğin, limit rotasyon içeren bir Fuchs grubunun bölüm uzayı kompakt olamaz. Sadece ötelemeler veya rotasyonlar tarafından üretilen Fuchs gruplarının bölüm uzayları ise duruma göre kompakt olabilir veya olmayabilir. Özel olarak, devirli grupların bölüm uzayları kompakt değildir ve dördüncü bölümde bunlara dair örnekler verilmiştir. Kompakt ve pürüzsüz bir yüzey elde edebilmek için ise ilgili Fuchs grubunun sadece ötelemeler tarafından üretilmiş olması gerekir.

Fuchs gruplarının önemli özelliklerinden biri de bunların temel bölgeleridir. Bir temel bölge, hiperbolik düzlemin öyle bir kapalı altkümesidir ki, Fuchs grubunun elemanları altında bu kümenin görüntülerinin birleşimi hiperbolik düzlemi verir. Burada, herhangi iki görüntü ya ayrıktır veya ortak noktaları sınırlarındadır. Bir Fuchs grubunun bölüm uzayını belirlemek için bu grubun temel bölgelerinden yararlanılır. Bu işlemin nasıl yapıldığı dördüncü bölümde açıklanmaktadır. Ayrıca, bir Fuchs grubu ve buna ait bir temel bölge verildiğinde, bu temel bölgenin kenarlarını birbirine resmeden elemanlar bu Fuchs grubunu üretirler. Böylece, temel bölgeler, Fuchs gruplarının cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerini belirlemede önemli rol oynarlar. Dördüncü bölümde bu konu ile ilgili teoremler ve örnekler verilmiştir.

Bu çalışmada, Fuchs grupları ve elemanlarının daha çok geometrik özellikleri üzerinde durulmuş ve bu konuda toplanan bilgiler, örnekler ve şekillerle somutlaştırılarak verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde sıkça karşılaşılacak olan bazı temel bilgiler verilecektir.

2.1. Grup Etkisi

Tanım 2.1.1: $X \neq \phi$ bir küme ve G bir grup olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\Phi : G \times X \to X$ dönüşümüne G grubunun X kümesine bir ***etkisi*** denir:

i. $\Phi(e,x) = x, \quad (\forall x \in X)$

ii. $\Phi(g_1 g_2, x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, x)), \quad (\forall x \in X \;\; ve \;\; \forall g_1, g_2 \in G).$

Burada e, G grubunun birim elemanıdır.

Örnek 2.1.2: X bir topolojik uzay ve $G := \{\, g : X \to X \mid g \text{ homeomorfizm} \,\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda, $\forall x \in X$ ve $\forall g \in G$ için $\Phi(g,x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan $\Phi : G \times X \to X$ dönüşümü G grubunun X kümesine bir etkisidir.

Gerçekten; **i.** $e : X \to X$ birim fonksiyon ve $x \in X$ herhangi bir eleman olmak üzere $\Phi(e,x) = e(x) = x$ dir.

ii. $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in X$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\Phi(g_1 g_2, x) &= \Phi(g_1 \circ g_2, x) \\
&= (g_1 \circ g_2)(x) \qquad \text{(tanım)} \\
&= g_1(g_2(x)) \\
&= g_1(\Phi(g_2, x)) \qquad \text{(tanım)}
\end{aligned}
$$

$$= \Phi\left(g_1, \Phi\left(g_2, x\right)\right) \text{ (tanım)}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.3: X bir küme, $a \in X$ ve $\Phi : G \times X \rightarrow X$, G grubunun X kümesine bir etkisi olsun. Bu durumda, $G(a) = \{\Phi(g,a) \mid g \in G\}$ kümesine a noktasının ***yörüngesi*** ve $S(a) = \{g \in G \mid \Phi(g,a) = a\}$ kümesine de a noktasının ***sabitleyeni*** denir.

Örnek 2.1.4: $g(x) = x + 1$ şeklinde tanımlanan $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonunun bileşke işlemine göre ürettiği grup G olsun. Bu taktirde, $\forall x \in \mathbf{R}$ ve $\forall g \in G$ için $\Phi(g,x) = g(x)$ olarak tanımlanan $\Phi : G \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonunun G grubunun $\mathbf{R}$ kümesine bir etkisi olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, 0 ve $\frac{1}{2}$ nin yörüngeleri sırasıyla $G(0) = \mathbf{Z}$ ve $G\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ kümeleridir. $e : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ birim fonksiyon ve $x \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $S(x) = \{e\}$ olduğu görülebilir.

Tanım 2.1.5: X bir küme, G bir grup ve $\Phi : G \times X \rightarrow X$, G grubunun X kümesine bir etkisi olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $\Phi(g,x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesine etkisi ***geçişli***dir denir.

Örnek 2.1.6: Örnek 2.1.4 teki G grubunun $\mathbf{R}$ kümesine etkisi geçişli değildir. Çünkü $\Phi\left(g, \frac{1}{2}\right) = 1$ olacak şekilde bir g elemanı yoktur.

Tanım 2.1.7: X bir küme, G bir grup ve $\Phi : G \times X \rightarrow X$, G grubunun X kümesine bir etkisi olsun. Eğer $\forall x, y, u, v \in X$, $x \neq y, u \neq v$ için $\Phi(g,x) = u$ ve $\Phi(g,y) = v$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubunun X kümesine etkisi ***çift geçişli***dir denir.

2.2. Topolojik Gruplar

Tanım 2.2.1: *G* bir grup ve τ, *G* üzerinde bir topoloji olsun. Eğer,

$$\alpha : G \times G \to G, \quad \alpha(g,h) = gh$$
$$\beta : G \to G, \quad \beta(g) = g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan α ve β dönüşümleri sürekli ise *G* grubuna bir ***topolojik grup*** denir.

Örnek 2.2.2: Reel sayılar kümesinin toplama işlemine göre bir grup olduğu biliniyor. Öklid topolojisi ile birlikte ele alındığında, **R** bir topolojik gruptur. Tanım 2.2.1 deki α ve β dönüşümleri bu örnek için,

$$\alpha : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \alpha(x,y) = x + y$$

$$\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \beta(y) = -y$$

şeklindedir.

Şimdi α ve β dönüşümlerinin sürekli olduklarını gösterelim. $a,b \in \mathbf{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, (*a,b*) açık aralığı reel sayılar kümesinin bir açık alt kümedir. $\beta^{-1}[(a,b)] = (-b,-a)$ ve $\alpha^{-1}[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid a < x + y < b\}$ alt kümeleri de sırasıyla **R** ve **R**×**R** çarpım uzayında açıktır. Açık aralıklardan başka reel sayılar kümesindeki diğer açık alt kümelerin α ve β dönüşümleri altındaki ters görüntülerinin de açık kümeler oldukları benzer şekilde görülebilir. O halde, α ve β dönüşümleri süreklidir ve reel sayılar kümesi, Öklid topolojisi ve toplama işlemi ile birlikte ele alındığında bir topolojik gruptur.

Bir *G* topolojik grubundaki bütün tek noktalı kümeler açık ise *G* topolojik grubuna bir ***ayrık grup*** denir. Bu durumda, ayrık topoloji ile birlikte düşünüldüğünde her grup bir ayrık grup olur.

G bir topolojik grup ve H, G topolojik grubunun bir alt grubu olsun. Eğer H, G topolojik grubunun bir ayrık alt uzayı ise H grubuna G topolojik grubunun bir ***ayrık alt grubu*** denir.

Örnek 2.2.3: Tamsayılar kümesi, reel sayılar kümesinin bir ayrık alt grubudur.

Örnek 2.2.4: **C** karmaşık sayılar kümesi olmak üzere, ***Gauss tamsayıları*** olarak bilinen $\mathbf{Z}[i]=\{m+ni \mid m,n\in\mathbf{Z}\}$ kümesi **C** topolojik grubunun bir ayrık alt grubudur.

Son iki örnekte **R** ve **C** üzerindeki topolojiler Öklid topolojisi, ikili işlem ise toplama işlemidir.

Tanım 2.2.5: X bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Eğer $\forall a\in A$ için $U\cap A=\{a\}$ olacak şekilde a noktasının bir U komşuluğu varsa, A kümesine X topolojik uzayının bir ***ayrık alt kümesi***dir denir.

Örnek 2.2.6: i. Tamsayılar kümesi, reel sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesidir.

ii. $\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbf{Z},\, n\neq 0\right\}$ kümesi reel sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesidir.

iii. $\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbf{Z},\, n\neq 0\right\}\cup\{0\}$ kümesi reel sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesi değildir.

2.3. Möbius Dönüşümleri

Tanım 2.3.1: $a,b,c,d\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere,

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

şeklindeki dönüşümlere ***Möbius dönüşümleri*** denir.

Bu dönüşümlerin kümesini M(2,**C**) notasyonuyla göstereceğiz. Burada $ad - bc$ sayısına T dönüşümünün ***determinantı*** denir. Biz bu çalışma boyunca daha çok

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1) \tag{2}$$

şeklindeki dönüşümlerle ilgileneceğiz. Bu dönüşümlerin kümesini de $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ notasyonuyla göstereceğiz.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbf{R} \text{ ve } \Delta = ad-bc > 0) \tag{3}$$

olsun.

$T(z)$ dönüşümünde pay ve paydayı $\sqrt{\Delta}$ ya bölersek $T(z) = \dfrac{\left(a/\sqrt{\Delta}\right)z + \left(b/\sqrt{\Delta}\right)}{\left(c/\sqrt{\Delta}\right)z + \left(d/\sqrt{\Delta}\right)}$ dönüşümünü elde ederiz. Buradan, $\left(a/\sqrt{\Delta}\right)\left(d/\sqrt{\Delta}\right) - \left(b/\sqrt{\Delta}\right)\left(c/\sqrt{\Delta}\right) = 1$ olduğu ve (3) numaralı dönüşümün de $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ kümesinin elemanı olduğu görülür.

$\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ kümesi,

$$z \to az+b \quad (a,b \in \mathbf{R} \text{ ve } a>0) \tag{4}$$

şeklindeki dönüşümleri de içerir. Çünkü, $az+b = \dfrac{\sqrt{a}z + b/\sqrt{a}}{0z + 1/\sqrt{a}}$ ve $\Delta = \left(\sqrt{a}\right)\left(1/\sqrt{a}\right) - 0 = 1$ dir.

(3) numaralı dönüşüm,

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd)+(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}$$

biçiminde yazılabilir. $z = x + iy$ olmak üzere, $T(z)$ karmaşık sayısının sanal kısmının $v = \dfrac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2}$ olduğu işlem yapılarak görülebilir. $\mathbf{H} = \{ x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0 \}$ üst yarı düzlem olmak üzere, $ad - bc > 0$ olduğundan, T dönüşümünün **H** kümesini kendisine resmettiği açıktır.

Teorem 2.3.2: $M_1(2,\mathbf{R})$ bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: (Churchill,1960).

Teorem 2.3.3: $M_1(2,\mathbf{R})$, **H** üzerinde geçişlidir, $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çift geçişlidir.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

2.4. M_1(2,R) Grubunun Sınıflandırılması

Bu kısımda, $M_1(2,\mathbf{R})$ grubunun elemanlarını sabit noktalarına göre sınıflandıracağız.

Tanım 2.4.1: $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $(a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad - bc = 1)$ dönüşümünün;

i. $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ da iki sabit noktası varsa T dönüşümüne bir ***öteleme***,

ii. $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ da bir sabit noktası varsa T dönüşümüne bir ***limit rotasyon***,

iii. Eşlenik iki sabit noktası varsa T dönüşümüne bir ***rotasyon*** denir.

$T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ $(a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad - bc = 1)$ dönüşümünün sabit noktaları,

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5}$$

denklemi çözülerek bulunur. (5) numaralı denklemden,

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0 \tag{6}$$

elde edilir.

Şimdi; a,b,c ve d sayılarının aldıkları değerlere göre T dönüşümünün sabit noktalarını inceleyelim.

1. Durum: $c = 0$.

Bu durumda, $\alpha = \dfrac{a}{d}$ ve $\beta = \dfrac{b}{d}$ olmak üzere, $T(z) = \alpha z + \beta$ olur ve T dönüşümünün sonsuzu sabit tuttuğu görülür. T dönüşümünün tanımlı olması için $d \neq 0$ olmak zorundadır.

i. $\alpha \neq 1$ olsun. Bu durumda, $z = \alpha z + \beta$ denklemi çözülerek $z = \dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{b}{d-a}$ bulunur ve bu nokta da T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

O halde, T dönüşümünün sabit noktaları $\dfrac{b}{d-a}$ ve sonsuzdur. Dolayısıyla T bir ötelemedir.

ii. $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ olsun ($\beta = 0$ ise T birim dönüşümdür). Bu durumda, $T(z) = z + \beta$ dönüşümü sadece sonsuzu sabit tutar ve T bir limit rotasyondur.

2. Durum: $c \neq 0$.

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünde $T(\infty) = \dfrac{a}{c} \neq \infty$ olduğundan ∞ bir sabit nokta olamaz.

(6) numaralı denklemde $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$ nin aldığı değerlere göre T dönüşümünün sabit noktalarını inceleyelim.

i. $\Delta > 0$ ve $a \neq d$ olsun. Bu durumda, T dönüşümünün sabit noktaları

$z = \dfrac{a - d \mp \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$ dir ve T bir ötelemedir.

ii. $\Delta > 0$ ve $a = d$ ise T , $z = \mp\sqrt{\dfrac{b}{c}}$ noktalarını sabit tutar ve bir ötelemedir.

iii. $\Delta < 0$ ve $a \neq d$ ise T dönüşümünün $z = \dfrac{a - d \mp \sqrt{-\Delta}\, i}{2c}$ şeklinde eşlenik iki sabit noktası vardır ve T bir rotasyondur.

iv. $\Delta < 0$ ve $a = d$ olsun. Bu durumda, $z = \mp\sqrt{\dfrac{-b}{c}}\, i$ T dönüşümünün eşlenik iki sabit noktasıdır ve T bir rotasyondur.

v. $\Delta = 0$ ise T sadece $z = \dfrac{a-d}{2c}$ noktasını sabit tutar. O halde, T bir limit rotasyondur.

Teorem 2.4.2: $f, g \in \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}) - \{I\}$ olsun. Bu taktirde, $f \circ g = g \circ f$ olması için gerek ve yeter şart *f* ve *g* dönüşümlerinin sabit nokta kümelerinin aynı olmasıdır.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

G bir grup ve $g \in G$ olmak üzere,

$$C_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$$

biçiminde tanımlanan $C_G(g)$ kümesine *g* elemanının *G* grubundaki ***merkezleyeni*** denir. $C_G(g)$ kümesi *G* grubunun bir alt grubudur.

Teorem 2.4.3: $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunda bir ötelemenin merkezleyeni, sabit nokta kümesi bu öteleme ile aynı olan ve $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubundaki ötelemelerden oluşur.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

Bu son teorem, rotasyonlar ve limit rotasyonlar için de geçerlidir.

2.5. $M_1(2,R)$ Grubunun Basit Fonksiyonlara Ayrışımı

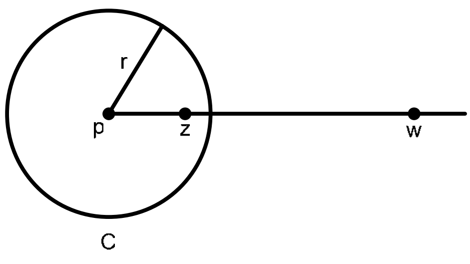
$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in$ $M_1(2,\mathbf{R})$ olsun. Eğer $c=0$ ise $T(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ dir. $f(z)=\dfrac{a}{d}z$ ve $g(z)=z+\dfrac{b}{d}$ olmak üzere, $T(z)=(g\circ f)(z)$ dir. Burada f bir öteleme ve g bir limit rotasyondur.

Eğer $c\neq 0$ ise $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{cz+d}$ şeklinde yazılabilir. $f(z)=z+\dfrac{d}{c}$ ve $g(z)=\dfrac{1}{z}$ ve $h(z)=\dfrac{-1}{c^2}z$ ve $k(z)=z+\dfrac{a}{c}$ olmak üzere, $T(z)=(k\circ h\circ g\circ f)(z)$ dir. Burada h bir öteleme, f ile k ise limit rotasyondurlar. Ayrıca, g dönüşümünün determinantı -1 olduğundan $g\notin$ $M_1(2,\mathbf{R})$ dir.

Teorem 2.5.1: Möbius dönüşümleri çemberler ve doğruları çemberler ve doğrulara resmeder.

İspat: (Churchill, 1960).

2.6. Bir Çember Üzerinde Yansıma (İnversiyon)



Şekil 2.1 Bir çember üzerinde yansıma (inversiyon).

C, karmaşık düzlemde merkezi p, yarıçapı r olan bir çember ve $z\in C-\{p\}$ olsun (Şekil 2.1). p noktasından başlayıp z noktasından geçen yarı doğru üzerinde,

$$|z-p|\cdot|w-p|=r^2 \tag{7}$$

olacak şekilde bir tek w noktası vardır. Böylece, z noktası C çemberi üzerinde yansıtıldığında görüntüsü, (7) numaralı denklemdeki kurala göre w olur. C çemberi üzerinde bu şekilde elde edilen yansımaya C üzerinde ***yansıma (inversiyon)*** denir ve I_c notasyonuyla gösterilir.

$I_c : C-\{p\} \to C-\{p\}$ bir fonksiyondur ve çemberin merkezi hariç, içindeki noktaları dışındaki noktalara, dışındaki noktaları içindeki noktalara resmeder. C üzerindeki noktaları ise sabit tutar.

Şimdi de $I_c(z)$ nin denklemini bulalım. $z \neq p$ olsun. Bu taktirde,

$$|(\overline{z}-\overline{p})(w-p)| = |\overline{z}-\overline{p}| \cdot |w-p| = |z-p| \cdot |w-p| = r^2$$

dir. Burada $\arg(z-p) = \arg(w-p)$ olduğundan $\arg(\overline{z}-\overline{p})(w-p) = 0$ dır. Böylece, $(\overline{z}-\overline{p})(w-p) = r^2$ olur ve

$$w = I_c(z) = p + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{p}} \tag{8}$$

elde edilir.

Eğer $p = 0$ *ve* $r = 1$ alınırsa, birim çember üzerindeki inversiyon elde edilir ve bu durumda $I_c(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ dir.

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ

3.1. Hiperbolik Düzlem

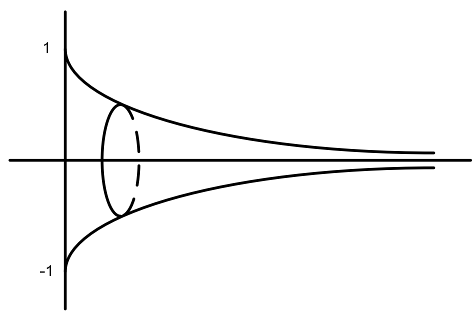
Öklid düzleminde bir L doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen yalnız ve yalnız bir doğrunun olduğu biliniyor. Bu ifade Öklid geometrisinin aksiyomlarından birisidir.

Üzerinde; bir L doğrusu ve L doğrusunun dışında bir p noktası verildiğinde, p noktasından geçen ve L doğrusunu kesmeyen birden fazla doğru bulunduran iki boyutlu bir uzay arayışları sonucunda hiperbolik düzlem ve hiperbolik geometri ortaya çıkmıştır. Bu konudaki ilk çalışmaları birbirlerinden bağımsız olarak, Carl Friedrich Gauss, Nicolai Ivanovich Lobachevsky ve Janos Bolyai yapmıştır.

Hiperbolik düzleme somut bir örnek olarak yalancı küre (pseudosphere) verilebilir (Beltrami, 1868). Yalancı küre,

$$x = \theta - tanh\theta \ , \ y = sec\,h\theta \ , \ \theta \in [0,+\infty)$$

parametrik denklemi ile verilen ve ***çekme eğrisi*** olarak bilinen eğrinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir yüzeydir (Şekil 3.1). Bu yüzeyin her noktası bir eyer noktasıdır ve her noktasındaki Gauss eğriliği –1 dir (Stillwell, 1992).



Şekil 3.1 Yalancı küre.

Üzerindeki geometrinin daha kolay anlaşılabilmesi için hiperbolik düzlemin değişik modelleri ortaya konmuştur. En çok kullanılan iki model ***üst yarı düzlem modeli*** ve ***birim daire modeli***dir. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik düzlem,

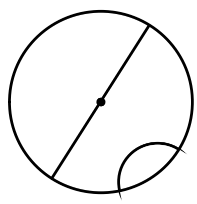
$$\mathbf{H} = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$$

kümesidir. Bu düzlemde doğrular, karmaşık düzlemdeki reel eksene dik doğru ve çemberlerin **H** kümesinde kalan kısımlarıdır. Bu çalışma boyunca hiperbolik düzlem **H** ile gösterilecektir ve üst yarı düzlem modeli kullanılacaktır.

Birim daire modeline göre ise hiperbolik düzlem,

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

kümesidir. Bu modele göre doğrular ise, karmaşık düzlemde *D* kümesinin sınırını dik kesen çemberler ve doğruların *D* kümesinde kalan kısımlarıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Birim daire modelinde doğrular.

3.2. Hiperbolik Metrik

$\mathrm{I} = [0,1]$ ve $x, y : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^2$ eğrisi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şeklinde verilsin. γ eğrisinin ***Öklid uzunluğu*** $|\gamma|_{Ö}$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formülü yardımıyla tanımlanır ve

$$|\gamma|_{Ö} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

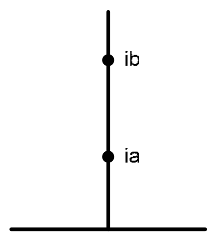
olarak bulunur.

$\beta : \mathrm{I} \to \mathbf{H}$ ve $\beta(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere, hiperbolik düzlemde β eğrisinin ***hiperbolik uzunluğu*** $|\beta|_H$, $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \dfrac{|dz|^2}{y^2}$ $(z = x + iy)$ formülü yardımıyla tanımlanır ve

$$|\beta|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}\ dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)}\ dt$$

olarak hesaplanır.

Örnek 3.2.1: $b > a > 0$ olmak üzere sanal eksen üzerindeki ia ve ib noktalarını birleştiren doğru parçasının Öklid uzunluğunun $b - a$ birim olduğu açıktır (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 Hiperbolik doğru parçası.

Şimdi de aynı doğru parçasının hiperbolik uzunluğunu bulalım. I=[0,1] ve $\beta : \mathrm{I} \to \mathbf{H}$ olmak üzere $\beta(t)=(0,(b-a)t+a)$ olsun. $\beta(\mathrm{I})$ nın ia ve ib noktalarını birleştiren doğru parçası olduğu açıktır ve

$$|\beta|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} \, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{0+(b-a)^2}}{(b-a)t+a} \, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{b-a}{(b-a)t+a} \, dt = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

olarak bulunur.

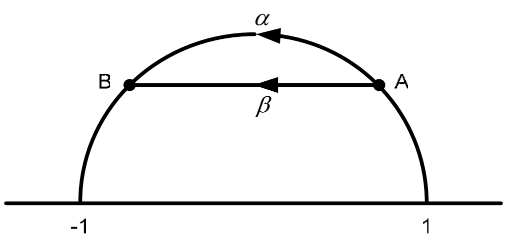
Örnek 3.2.2: I=[0,1] ve t$\in$I olmak üzere,

$$\alpha(t) = \left(cos\frac{\pi}{4}(2t+1) \;,\; sin\frac{\pi}{4}(2t+1) \right)$$

ve

$$\beta(t) = \left(-\sqrt{2}\;\; t + \frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

olarak verilen eğrilerin Öklid ve hiperbolik uzunluklarını bulalım.



Şekil 3.4 Öklid ve hiperbolik doğru parçaları.

Burada, $\alpha(\mathrm{I})$ birim çemberin $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ile $B = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktaları arasındaki parçasıdır. $\beta(\mathrm{I})$ ise, $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ile $B = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasıdır (Şekil 3.4). $\alpha(\mathrm{I})$ ve $\beta(\mathrm{I})$ eğrilerinin Öklid ve hiperbolik uzunluklarını bulalım. Yukarıdaki formüller kullanılarak,

$$|\alpha|_{Ö} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{-\pi}{4} 2\,sin \frac{\pi}{4}(2t+1)\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} 2\,cos \frac{\pi}{4}(2t+1)\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\, dt = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{2} t \;\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

$$|\alpha|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{-\pi}{4} 2\,sin \frac{\pi}{4}(2t+1)\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} 2\,cos \frac{\pi}{4}(2t+1)\right)^2}}{sin \frac{\pi}{4}(2t+1)}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}{sin \frac{\pi}{4}(2t+1)} dt = \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{sin \frac{\pi}{4}(2t+1)} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{du}{sin\,u} = \ln|cos\,ec\,u - cot\,u|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| - \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right| = \ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - \ln\left|\sqrt{2} - 1\right| = \ln \frac{\left|\sqrt{2}+1\right|}{\left|\sqrt{2}-1\right|},$$

$$|\beta|_{Ö} = \int_0^1 \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 0^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t \;\Big|_0^1 = \sqrt{2}\,,$$

ve

$$|\beta|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 0^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} dt = \int_0^1 2dt = 2t \;\Big|_0^1 = 2$$

bulunur.

Teorem 3.2.3: $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbf{H}$ bir eğri ve $T \in \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ ise $|T \circ \gamma|_H = |\gamma|_H$ dir.

İspat: (Jones and Singerman,1987).

z_1 ve z_2 hiperbolik düzlemde iki farklı nokta olsun. Şimdi z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren ve hiperbolik uzunluğu en küçük olan eğrinin tek olduğunu göstereceğiz. Böyle bir eğriye z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren ***hiperbolik doğru parçası*** denir.

Teorem 3.2.4: Hiperbolik düzlemde iki farklı noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçası vardır.

İspat: **1. Durum:** $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$ ve z_1 ile z_2 noktalarının reel kısımları 0 olsun. Bu durumda, $z_1 = ia$ ve $z_2 = ib$ şeklindedir. Genelliği bozmayacağı için $b > a$ kabul edebiliriz.

Sanal eksenin z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren parçasına γ diyelim. γ eğrisinin hiperbolik uzunluğunun $|\gamma|_H = \ln\frac{b}{a}$ olduğu Örnek 3.2.1 de gösterildi.

γ^*, *ia* ile *ib* noktalarını birleştiren ve γ dan farklı bir eğri olsun. Bu durumda, $\gamma^* : [0,1] \to \mathbf{H}$, $\gamma^*(t) = (x(t), y(t))$, $(t \in [0,1])$ şeklindedir ve [0,1] aralığındaki en az bir t_0 noktası için $x(t_0) \neq 0$ dır. Böylece,

$$|\gamma^*|_H = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}\,dt \; > \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}\,dt$$

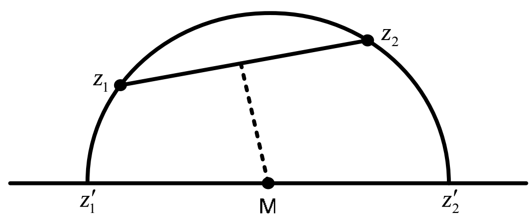
$$= \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}dt}{y(t)} = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a} = |\gamma|_H$$

bulunur ve $|\gamma^*|_H > |\gamma|_H$ olduğu görülür.

O halde, *ia* ile *ib* noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu iki noktayı birleştiren Öklid doğru parçasıdır.

Eğer z_1 ve z_2 hiperbolik düzlemde reel kısımları aynı fakat sıfırdan farklı olan iki nokta ise bu noktaları $T(z) = z + \alpha$, $(\alpha \in \mathbf{R})$ şeklinde bir dönüşüm ile sanal eksen üzerine taşıyabiliriz. $T \in \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ olduğundan, yukarıdaki açıklamalar ve Teorem 3.2.3 gereğince, z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçası olduğu görülür.

2. Durum: Şimdi de z_1 ve z_2 hiperbolik düzlemde reel kısımları farklı iki nokta olsun. Bu durumda, merkezi reel eksen üzerinde bulunan ve z_1 ile z_2 noktalarından geçen bir tek *C* çemberi vardır. Bu çemberin reel ekseni kestiği noktalar Şekil 3.5 te gösterildiği gibi z_1' ve z_2' olsun. Teorem 2.3.3 uyarınca $T(z_1') = 0$ ve $T(z_2') = \infty$ olacak şekilde bir $T \in \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ vardır. Ayrıca, Teorem 2.5.1 e göre *T*(*C*) sanal eksenin hiperbolik düzlemde kalan kısmıdır ve $T(z_1)$ ile $T(z_2)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçasıdır. Teorem 3.2.3 gereğince *T*, hiperbolik doğru parçalarını hiperbolik doğru parçalarına resmettiği için z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası *C* çemberinin bu iki noktayı birleştiren yayıdır.



Şekil 3.5 İki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası.

Sonuç olarak, her iki durumda da z_1 ile z_2 noktalarını birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının mevcut olduğu görülür.

Teorem 3.2.4 ün ispatından kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.5: Hiperbolik düzlemde hiperbolik doğru parçaları, reel eksene dik olan Öklid doğru parçaları ve reel ekseni dik kesen çemberlerin yaylarıdır.

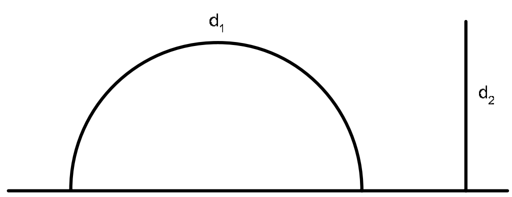
z ve w hiperbolik düzlemde iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki ***hiperbolik uzaklık*** bunları birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik uzunluğu olarak tanımlanır ve $\rho(z,w)$ notasyonuyla gösterilir. Bu şekilde elde edilen $\rho : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to [0,\infty)$ fonksiyonu **H** üzerinde bir metriktir ve ***hiperbolik metrik*** olarak adlandırılır. **H** kümesi, ρ metriği ile birlikte ele alındığında hiperbolik düzlem için bir model oluşturur (Jones and Singerman, 1987).

Teorem 3.2.6: **H** üzerinde hiperbolik metrik ile Öklid metriği aynı topolojiyi üretirler.

İspat: (Katok, 1992).

3.3. Hiperbolik Doğrular

Reel ekseni dik kesen çemberler ve Öklid doğrularının hiperbolik düzlemde kalan kısımlarına ***hiperbolik doğrular*** denir. Şekil 3.6 daki d_2 doğrusunun bir ucu reel eksen üzerindedir. Diğer ucunun ise sonsuzda olduğunu kabul ediyoruz.



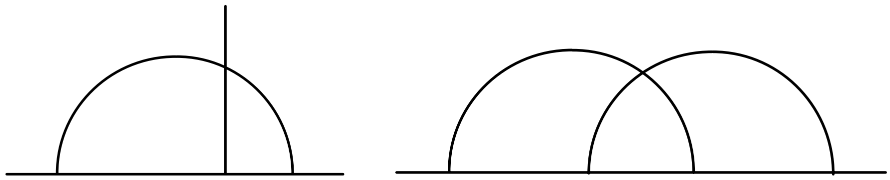
Şekil 3.6 Hiperbolik doğrular.

Tanım 3.3.1: d_1 ve d_2 iki farklı hiperbolik doğru olsun. Bu taktirde,

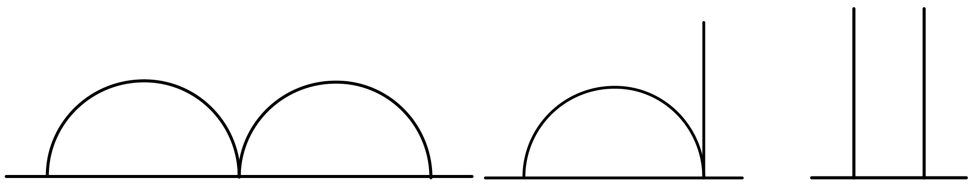
i. d_1 ve d_2 doğrularının hiperbolik düzlemde bir tek ortak noktası varsa doğrular ***kesişirler*** (Şekil 3.7),

ii. d_1 ve d_2 doğrularının $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde bir tek ortak noktası varsa doğrular ***paraleldir*** (Şekil 3.8),

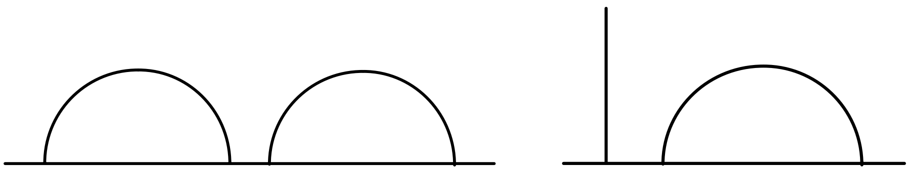
iii. d_1 ve d_2 doğrularının **H** ve $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümelerinde hiçbir ortak noktası yoksa doğrular ***ayrık paraleldir*** (Şekil 3.9).



Şekil 3.7 Kesişen hiperbolik doğrular.



Şekil 3.8 Paralel hiperbolik doğrular.



Şekil 3.9 Ayrık paralel hiperbolik doğrular.

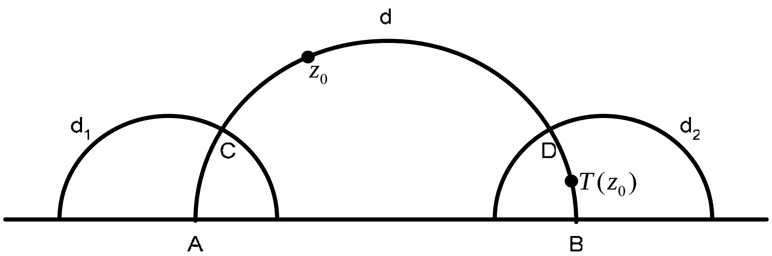
Teorem 3.3.2: $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ bütün hiperbolik doğrular üzerinde geçişlidir.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

3.4. Hiperbolik Düzlemde İzometriler

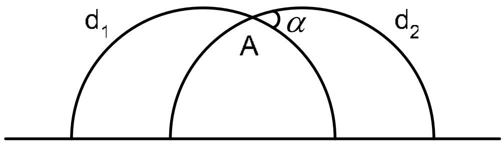
Yansıma: *d* hiperbolik düzlemde bir doğru olsun. Bu taktirde, *d* reel ekseni dik kesen bir yarı doğru veya bir yarım çemberdir. Eğer *d* bir yarı doğru ise, *d* üzerindeki ***yansıma***, Öklid anlamındaki yansımayla aynıdır. Eğer *d* bir yarım çember ise *d* üzerindeki yansıma *d* üzerindeki inversiyondur.

Öteleme: d_1 ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrık paralel iki doğru olsun. Bu durumda, d_1 ile d_2 doğrularının bir tek ortak dikmesi vardır ve bunu *d* ile gösterelim. Aksi halde, iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{2}$ olan hiperbolik dörtgenler elde edilir ki bunun mümkün olmadığı bir sonraki kısımda verilen Gauss-Bonnet formülünden kolayca görülebilir. Şekil 3.10 da görüldüğü gibi *d* doğrusu d_1 ve d_2 doğrularını *C* ve *D* noktalarında kessin. *d* doğrusunun sonsuzdaki noktaları *A* ve *B* olsun. *C* ve *D* noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığa α diyelim. T_1 ve T_2 sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar olsun. $T = T_1 \circ T_2$ bir ötelemedir. *T* hiperbolik düzlemdeki hiçbir noktayı sabit tutmaz. Sadece sonsuzdaki *A* ve *B* noktalarını sabit tutar. z_0, *d* üzerinde bir nokta olsun. *T*, z_0 noktasını *d* üzerinde 2α kadar öteler. *T*, *d* doğrusunu küme olarak sabit tutar. Yani $T(d)=d$ dir. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü de bir ötelemedir ve *T* dönüşümünün tersidir. T^{-1}, *A* ve *B* noktalarını sabit tutar ve $T^{-1}(d)=d$ dir. *T* dönüşümü *d* üzerindeki noktaları *A* noktasından *B* noktasına doğru öteler. T^{-1} ise *B* noktasından *A* noktasına doğru öteler. Öteleme mesafesi her iki dönüşümde de 2α dır.



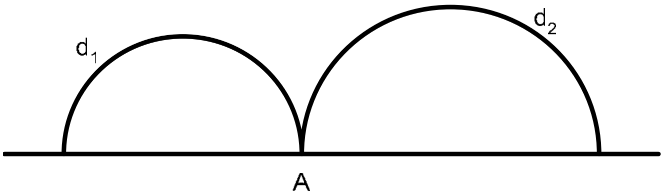
Şekil 3.10 Bir ötelemenin sabit doğrusu.

Rotasyon: d_1 ve d_2 doğruları hiperbolik düzlemde bir *A* noktasında kesişsin. d_1 ve d_2 doğruları arasındaki dar açı α olsun (Şekil 3.11). d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki yansımaları sırasıyla T_1 ve T_2 ile gösterelim. Bu durumda $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü *A* noktasını sabit tutan bir rotasyondur. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$, *T* dönüşümünün tersidir ve *A* noktasını sabit tutar. *T* ve T^{-1} dönüşümleri hiperbolik düzlemde *A* noktasının dışındaki noktaları *A* noktası etrafında 2α kadar döndürürler. Ancak dönmeler ters yöndedir.



Şekil 3.11 Bir rotasyonun sabit noktası.

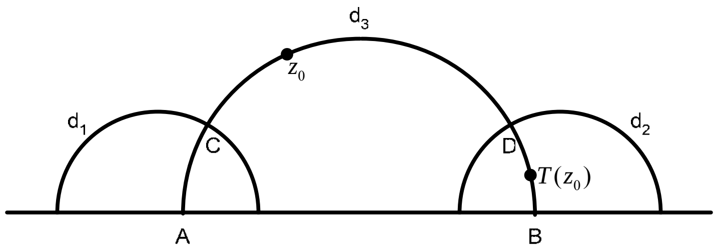
Limit Rotasyon: $d_1$ve d_2 hiperbolik düzlemde paralel iki doğru olsun (Şekil 3.12). Bu durumda, d_1 ve d_2 doğrularının $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ kümesimde bir ortak noktası vardır. Bu noktayı A ile gösterelim. $d_1$ve d_2 doğruları üzerindeki yansımalar sırasıyla T_1 ve T_2 olsun. $T = T_1 \circ T_2$ dönüşümü A noktasını sabit tutar. Fakat T dönüşümü hiperbolik düzlemde hiçbir noktayı sabit tutmaz. $T^{-1} = T_2 \circ T_1$ dönüşümü de A noktasını sabit tutan bir limit rotasyondur ve T dönüşümünün tersidir. T ve T^{-1} dönüşümleri A noktasından geçen hiperbolik doğruları yine A noktasından geçen başka hiperbolik doğrulara resmeder. T ve T^{-1} hiçbir hiperbolik doğruyu sabit tutmaz.



Şekil 3.12 Bir limit rotasyonun sabit noktası.

Ötelemeli Yansıma: $d_1$ve d_2 hiperbolik düzlemde ayrık paralel iki doğru, d_3 ise d_1 ve d_2 doğrularını dik kesen doğru olsun (Şekil 3.13). d_3 doğrusunun $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ kümesi üzerindeki uç noktaları A ve B, $d_1$ve d_2 doğrularını kestiği noktalar ise sırasıyla C ve D olsun. T_1, T_2 ve T_3 sırasıyla d_1, d_2 ve d_3 doğruları üzerindeki yansımalar olmak üzere $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ dönüşümü bir ***ötelemeli yansıma***dır. T dönüşümü d_3 doğrusunu kendisine resmeder, uç noktalarını (A ve B) ise sabit tutar. z_0, d_3 üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda, $T(z_0)$ noktası da d_3 üzerindedir ve z_0

ile $T(z_0)$ arasındaki uzaklık C ve D noktaları arasındaki uzaklığın iki katıdır. T dönüşümü d_3 dışındaki hiçbir doğruyu sabit tutmaz. T^{-1} dönüşümü de bir ötelemeli yansımadır ve d_3 doğrusunu kendisine resmeder; A ve B noktalarını sabit tutar; d_3 doğrusu üzerindeki noktaları T ye benzer şekilde fakat ters yönde öteler.



Şekil 3.13 Bir ötelemeli yansımanın sabit doğrusu.

3.5. Hiperbolik Alan ve Gauss Bonnet Formülü

$A \subset \mathbf{H}$ olsun. A kümesinin ***hiperbolik alanı***,

$$\mu(A) = \iint_A \frac{dxdy}{y^2}$$

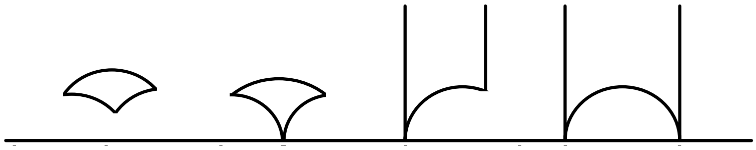
olarak tanımlanır.

Teorem 3.5.1: $A \subset \mathbf{H}$ olsun. Bu taktirde, her $T \in \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ için $\mu(T(A)) = \mu(A)$ dır.

İspat: (Katok, 1992).

n kenarlı bir ***hiperbolik çokgen***, n tane hiperbolik doğru parçasıyla sınırlanan ve $\mathbf{H} \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesi içinde kalan bir kapalı kümedir. Bir hiperbolik çokgenin herhangi bir kenarı $\mathbf{R}$ üzerinde bulunamaz. Köşeleri ise hiperbolik düzlemde ve $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde bulunabilir.

Şekil 3.14 te verilen hiperbolik üçgenlerin $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde sırasıyla 0,1,2 ve 3 köşesi bulunmaktadır.



Şekil 3.14 Hiperbolik üçgenler.

Bir hiperbolik üçgenin $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ kümesi üzerindeki köşesine karşılık gelen iç açısının ölçüsü sıfırdır. Buna göre, Şekil 3.14 teki son üçgenin iç açılarının ölçüsü sıfırdır. Ayrıca, hiperbolik üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı π den küçüktür (Beardon,1983).

Teorem 3.5.2. (Gauss-Bonnet): *S*, iç açılarının ölçüleri α,β,γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. Bu taktirde, *S* üçgeninin hiperbolik alanı $\mu(S)=\pi-\alpha-\beta-\gamma$ formülü ile verilir.

İspat: (Beardon,1983).

Yukarıdaki teorem ***Gauss-Bonnet formülü*** olarak da bilinir.

Tanım 3.5.3: $Y\subset\mathbf{H}$ ve $y_0\in Y$ olsun. Eğer *Y* kümesinin her noktasını y_0 noktasına birleştiren hiperbolik doğru parçası tamamen *Y* kümesinin içinde kalıyorsa, *Y* kümesine ***yıldızıl***dır denir.

Yıldızıl kümelere örnek olarak hiperbolik konveks kümeleri verebiliriz.

Sonuç 3.5.4: *F*, iç açılarının ölçüleri $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ olan *n* kenarlı bir hiperbolik yıldızıl çokgen olsun. Bu taktirde, *F* yıldızıl çokgeninin hiperbolik alanı

$$\mu(F)=(n-2)\pi-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_n$$

dir.

İspat: Teorem 3.5.2 den kolayca elde edilir.

4. FUCHS GRUPLARININ GEOMETRİSİ

4.1. Fuchs Grupları

$\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}) = \left\{ z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbf{R},\, ad-bc=1 \right\}$ kümesinin bileşke işlemine göre bir grup olduğunu biliyoruz. Şimdi $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunun bir topolojik grup olduğunu gösterelim. $\mathbf{R}^4$, Öklid topolojisi ile birlikte düşündüğünde,

$$X = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; ad-bc=1 \right\},$$

$\mathbf{R}^4$ topolojik uzayının bir alt uzayıdır. $\alpha : X \to X$, $\alpha(a,b,c,d) = (-a,-b,-c,-d)$ şeklinde tanımlanan α dönüşümü bir homeomorfizmdir. α dönüşümü birim elemanla birlikte X kümesine etki eden iki elemanlı bir G grubu oluşturur. $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunda $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $z \to \dfrac{(-a)z+(-b)}{(-c)z+(-d)}$ dönüşümleri aynıdır. Bu nedenle, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ ile X kümesinin elemanları arasında birebir bir eşleme kuramayız. Fakat X/G bölüm uzayını ele alıp, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunun $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ elemanını X/G bölüm uzayının $[(a,b,c,d)] = \{(a,b,c,d),(-a,-b,-c,-d)\}$ elemanına karşılık getirirsek, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ ile X/G arasında birebir bir eşleme elde ederiz. Böylece, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ bir topolojik uzay olur. Ayrıca,

$$g : \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}) \times \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}) \to \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}),\quad g(S,T) = S \circ T$$
$$h : \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}) \to \mathrm{M}_1(2,\mathbf{R}),\quad h(T) = T^{-1}$$

dönüşümleri süreklidir. Dolayısıyla, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ bir topolojik gruptur (Jones and Singerman, 1987).

Tanım 4.1.1: $M_1(2,\mathbf{R})$ topolojik grubunun herhangi bir ayrık alt grubuna bir ***Fuchs grubu*** denir.

Örnek 4.1.2: $M_1(2,\mathbf{Z}) = \left\{ z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbf{Z},\, ad-bc=1 \right\}$, $M_1(2,\mathbf{R})$ topolojik grubunun bir ayrık alt grubudur. Dolayısıyla bir Fuchs grubudur. Bu grup ***Modüler grup*** olarak bilinir.

$M_1(2,\mathbf{R})$ topolojik grubunun yansıma ve ötelemeli yansıma içermediğini biliyoruz. Bu nedenle, bir Fuchs grubunun elemanları öteleme, rotasyon ve limit rotasyondan oluşur. Ancak, aşağıdaki örneklerde de görüleceği gibi bir Fuchs grubunun bu üç türden eleman içermesi gerekmez.

Örnek 4.1.3: $g:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, $g(z)=z+1$ olmak üzere, g bir G grubu üretir. G grubunun elemanları,

$$z \to z+1,\ z\to z+2,\ z\to z+3,\ldots,\ z\to z,\ z\to z-1,\ z\to z-2,\ldots$$

şeklindeki dönüşümlerdir. Burada, birim eleman ($z\to z$) dışındaki dönüşümlerin her biri sonsuzu sabit tutan bir limit rotasyondur. Burada, G grubunun $(\mathbf{Z},+)$ grubuna izomorf ve $M_1(2,\mathbf{R})$ topolojik grubunun ayrık bir alt grubu olduğu açıktır. O halde, G bir Fuchs grubudur.

Tanım 4.1.4: X bir topolojik uzay, $G=\{g \mid g: X\to X \text{ homeomorfizm}\}$, X topolojik uzayının homeomorfizm grubu ve K, X topolojik uzayının bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer sadece sonlu sayıda $g\in G$ için $g(K)\cap K\neq\phi$ ise G grubunun X kümesine etkisi ***süreksiz***dir denir.

Örnek 4.1.5: $f,g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(z)=z+1$, $g(z)=z+i$ şeklinde tanımlanan f ve g dönüşümlerinin bileşke işlemine göre ürettiği grup G olsun. Bu taktirde, G grubunun $\mathbf{C}$ kümesine etkisi süreksizdir. Benzer şekilde, Örnek 4.1.3 teki G grubunun $\mathbf{H}$ kümesine etkisi süreksizdir.

Teorem 4.1.6:

i. Γ, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunun bir alt grubu olsun. Bu taktirde Γ grubunun bir Fuchs grubu olması için gerek ve yeter şart Γ grubunun **H** kümesine etkisinin süreksiz olmasıdır.

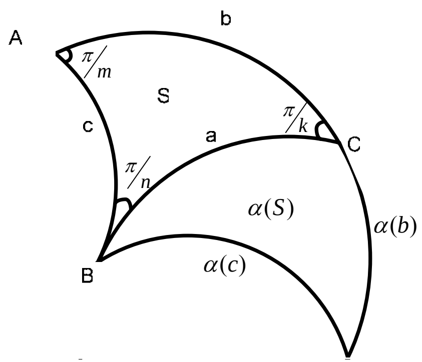
ii. Γ bir Fuchs grubu ve $p \in \mathbf{H}$ noktası Γ grubunun bazı elemanları tarafından sabit tutulsun. Bu taktirde, p noktasının bir W komşuluğu vardır öyle ki Γ grubunun birimden farklı hiçbir elemanı $W-\{p\}$ kümesindeki noktaları sabit tutmaz.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

Sonuç 4.1.7: Γ, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunun bir alt grubu olsun. Bu taktirde, Γ grubunun bir Fuchs grubu olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbf{H}$ için $\Gamma(z)=\{T(z) \mid T \in \Gamma\}$ kümesinin hiperbolik düzlemin bir ayrık alt kümesi olmasıdır.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

4.2. Üçgensel Gruplar



Şekil 4.1 Bir hiperbolik üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar.

S, Şekil 4.1 de görüldüğü gibi köşeleri $A,B,C,$ kenarları a,b,c ve iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{k}$ olan bir hiperbolik üçgen olsun, (m,n,k pozitif tamsayılardır). α,β ve γ sırasıyla a,b ve c kenarları üzerindeki yansımalar olsun. Bu üç yansıma, sonlu olmayan bir Γ^* grubu üretir. Üreticileri $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunun elemanı olmadığı için Γ^* bir Fuchs grubu değildir.

S üçgeninin α yansıması altındaki görüntüsü $\alpha(S)$ yine bir hiperbolik üçgendir ve kenarları $\alpha(a)=a,\alpha(b),\alpha(c)$ dir. $\alpha\beta\alpha=\alpha\circ\beta\circ\alpha$ dönüşümü $\alpha(S)$ üçgeninin $\alpha(b)$ kenarı üzerindeki hiperbolik yansımadır. Bu yansıma $\alpha(S)$ üçgenini $\alpha\beta\alpha(\alpha(S))=\alpha\beta(S)$ üçgenine resmeder. Bu şekilde devam edersek, *C* köşesinin aynı zamanda $\alpha(S),\alpha\beta(S),\alpha\beta\alpha(S),\ldots,(\alpha\beta)^{k-1}\alpha(S)$ üçgenlerinin de köşesi olduğunu görebiliriz. Burada $\alpha\beta$, mertebesi *k* olan ve *C* köşesini sabit tutan bir rotasyondur. Ayrıca, birim eleman dışındaki her $T\in\Gamma^*$ için $\overset{o}{S}\cap T(\overset{\circ}{S})=\phi$ ve $\bigcup_{T\in\Gamma^*}T(S)=\mathbf{H}$ olduğu Magnus (1974) tarafından gösterilmiştir, ($\overset{\circ}{S}$, *S* üçgeninin içini göstermektedir).

Böylece **H**; kenar uzunlukları *a,b,c*; iç açılarının ölçüleri $\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{k}$; birbirlerini kesmeyen, sadece kenarları ve köşeleri ortak olan üçgenlerle kaplanmış olur.

p, S üçgeni üzerinde herhangi bir nokta olsun. *p* noktasının yörüngesi $\Gamma^*(p)$, her biri yukarıda bahsedilen farklı üçgenler üzerinde bulunan noktalardan oluşur. O halde, $\Gamma^*(p)$, hiperbolik düzlemin bir ayrık alt kümesidir.

$\Gamma=\Gamma^*\cap\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ olsun. Bu durumda, $\Gamma(p)\subset\Gamma^*(p)$ olduğundan $\Gamma(p)$, hiperbolik düzlemin bir ayrık alt kümesidir. Sonuç 4.1.7 ye göre Γ bir Fuchs grubudur. Bu şekilde elde edilen bir Fuchs grubuna bir ***üçgensel grup*** denir.

4.3. Temel Bölgeler

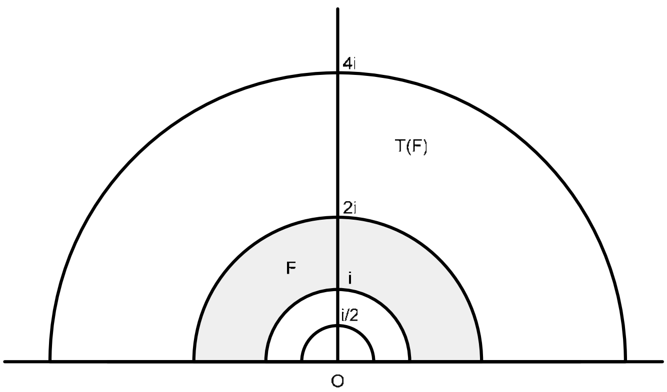
Γ bir Fuchs grubu ve $F\subset\mathbf{H}$ kapalı bir alt küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı taktirde *F* kümesine Γ grubu için bir ***temel bölge*** denir:

i. $\bigcup_{T\in\Gamma} T(F) = \mathbf{H}$,

ii. $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \phi,\ (\forall T \in \Gamma - \{I\})$.

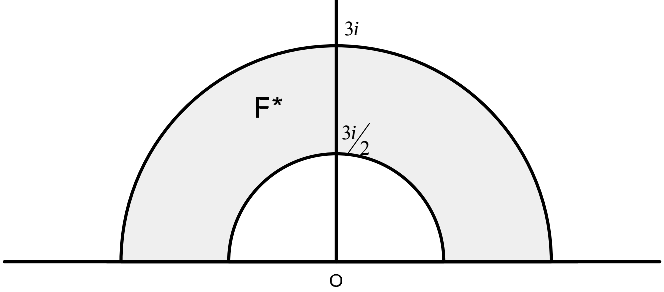
Burada $\overset{\circ}{F}$, F kümesinin içini, I ise Γ grubunun birim elemanını göstermektedir.

Örnek 4.3.1: Γ , $T(z)$=2z hiperbolik ötelemesi tarafından üretilen devirli grup olsun. Bu durumda, Şekil 4.2 deki F kümesi Γ için bir temel bölgedir.



Şekil 4.2 $\langle z \rightarrow 2z \rangle$ grubu için temel bölgeler.

Ayrıca, $T(F)$, $T^2(F) = (T \circ T)(F)$,..., $T^{-1}(F)$, $T^{-2}(F)$,... kümelerinin herbiri ve Şekil 4.3 teki F^* kümesi de Γ için bir temel bölgedir.



Şekil 4.3 $\langle z \rightarrow 2z \rangle$ grubu için bir temel bölge.

Örnek 4.3.2: Γ , 4.2 deki üçgensel grup olsun. Bu durumda, $S \cup \alpha(S)$, $S \cup \beta(S)$ ve $S \cup \gamma(S)$ kümelerinin her biri Γ grubu için bir temel bölgedir.

Teorem 4.3.3: F_1 ve F_2 bir Γ Fuchs grubunun iki temel bölgesi ve $\mu(F_1)$ sonlu olsun. Bu taktirde, $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ dir.

İspat: F_1 ve F_2 kümelerinin sınırlarının hiperbolik alanları sıfır olduğundan, $\mu(\mathring{F}_i) = \mu(F_i)$ $(i=1,2)$ dir. Buradan,

$$F_1 \supseteq F_1 \cap \left(\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathring{F}_2)\right) = \bigcup_{T \in \Gamma} \left(F_1 \cap T(\mathring{F}_2)\right) \tag{1}$$

elde edilir. $\mathring{F}_2$ bir temel bölgenin içi olduğundan her $T \in \Gamma$ için $F_1 \cap T(\mathring{F}_2) = \phi$ dir. Böylece,

$$\mu(F_1) \geq \sum_{T \in \Gamma} \mu(F_1 \cap T(\mathring{F}_2)) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(F_1) \cap \mathring{F}_2) \tag{2}$$

bulunur. F_1 bir temel bölge olduğundan, $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F_1) = \mathbf{H}$ dir ve böylece, $\bigcup_{T \in \Gamma} (T(F_1) \cap \mathring{F}_2) = \mathring{F}_2$ dir. (2) numaralı denklemden,

$$\mu(F_1) \geq \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(F_1) \cap \mathring{F}_2) \geq \mu\left(\bigcup_{T \in \Gamma} T(F_1) \cap \mathring{F}_2\right) = \mu(\mathring{F}_2) = \mu(F_2)$$

olduğu görülür.

F_1 ile F_2 kümelerinin yerleri değiştirilerek benzer şekilde $\mu(F_2) \geq \mu(F_1)$ bulunur ve $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ elde edilir.

Teorem 4.3.4: Γ bir Fuchs grubu ve Λ, Γ grubunun indeksi n olan bir alt grubu olsun. Eğer, $\Gamma = \Lambda T_1 \cup \Lambda T_2 \cup ... \cup \Lambda T_n$, Γ grubunun Λ yan sınıflarına bir ayrışımı ve F, Γ grubunun bir temel bölgesi ise,

i. $F_1 = T_1(F) \cup T_2(F) \cup ... \cup T_n(F)$ kümesi Λ için bir temel bölgedir,

ii. $\mu(F)$ sonlu ve F kümesinin sınırının hiperbolik alanı sıfır ise $\mu(F_1) = n\mu(F)$ dir.

İspat: i. $z \in \mathbf{H}$ olsun. F, Γ grubunun bir temel bölgesi olduğundan, $z=T(w)$ olacak şekilde $w \in F$ ve $T \in \Gamma$ vardır. Burada, $S \in \Lambda$ ve $1 \le i \le n$ olmak üzere $T = ST_i$ dir. O halde,

$$z = T(w) = ST_i(w) = S(T_i(w))$$

yazabiliriz. $T_i(w) \in F_1$ olduğundan, z, F_1 kümesindeki bir noktanın Λ altındaki yörüngesindedir. Böylece,

$$\bigcup_{S \in \Lambda} S(F_1) = \mathbf{H}$$

olduğu görülür.

Şimdi de $z \in \mathring{F}_1$, $S \in \Lambda$ ve $S(z) \in \mathring{F}_1$ olsun. S dönüşümünün birim eleman olduğunu göstermemiz gerekiyor. ε >0 ve

$$D_\varepsilon(z) = \{w \in H \mid \rho(z,w) < \varepsilon\} \subset \mathring{F}_1$$

olsun. $\mathring{F}$ kümesinin $T_1,...,T_n$ dönüşümlerinden k tanesi altındaki görüntülerinin $D_\varepsilon(z)$ ile kesişimi boş küme değildir, $(1 \le k \le n)$. Bu k tane dönüşümü $T_{i1},...,T_{ik}$ ile gösterelim. $1 \le j \le n$ olmak üzere, $T_j(\mathring{F})$ ile $D_\varepsilon(S(z)) = S(D_\varepsilon(z))$ kümesinin arakesiti boş olmasın. Buradan,

$$D_\varepsilon(z)\cap S^{-1}T_j(\overset{\circ}{F})\neq\phi$$

elde edilir. O halde, $1\leq m\leq k$ olmak üzere, $S^{-1}T_j=T_{im}$ dir. Böylece,

$$\Lambda T_j=\Lambda S^{-1}T_j=\Lambda T_{im}$$

elde edilir. Buradan da $T_j=T_{im}$ ve $S=I$ (birim eleman) olduğu görülür.

Sonuç olarak, hiperbolik düzlemdeki her noktanın Λ altındaki yörüngesine ait sadece bir noktanın $\overset{\circ}{F}_1$ de bulunduğu görülür. O halde F_1, Λ için bir temel bölgedir.

ii. Teorem 3.5.1 den kolayca elde edilir.

Tanım 4.3.5: Γ bir Fuchs grubu ve $p\in\mathbf{H}$ noktası, Γ grubunun birim dönüşüm dışındaki elemanları tarafından sabit tutulmasın. Teorem 4.1.6 ii gereğince böyle bir *p* noktası vardır. Bu durumda, Γ grubu için ***p merkezli Dirichlet bölgesi***,

$$D_p(\Gamma)=\{z\in\mathbf{H}\mid\forall T\in\Gamma\text{ için }\rho(z,p)\leq\rho(z,T(p))\}$$

olarak tanımlanır.

p noktasının Γ altındaki yörüngesi ayrık ve $p\in D_p(\Gamma)$ olduğundan $D_p(\Gamma)$, *p* noktasının bir komşuluğunu içerir. *T*, Γ grubunun bir elemanı olsun. *p* ve *T*(*p*) noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının orta dikmesi hiperbolik düzlemi iki yarı düzleme ayırır. Bunlardan *p* noktasını içeren yarı düzlem, $\rho(z,p)\leq\rho(z,T(p))$ eşitsizliğini sağlayan *z* noktalarından oluşur. Böylece, her *T* dönüşümü *p* noktasını içeren bir yarı düzlem belirler. O halde, $D_p(\Gamma)$ hiperbolik yarı düzlemlerin bir ara kesitidir ve bu nedenle hiperbolik anlamda bir konveks kümedir.

Teorem 4.3.6: Γ bir Fuchs grubu ve $p \in \mathbf{H}$ noktası, Γ grubunun birim dönüşüm dışındaki elemanları tarafından sabit tutulmasın. Bu taktirde, *p* merkezli Dirichlet bölgesi Γ grubu için bağlantılı bir temel bölgedir.

İspat: (Katok,1992).

Teorem 4.3.7: $F = \left\{ z \in \mathbf{H} \mid |z| \geq 1 \text{ ve } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$ kümesi modüler grup için $p = ki\,(k > 1)$ merkezli Dirichlet bölgesidir.

İspat: (Katok,1992).

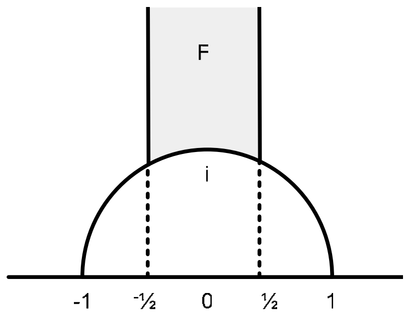
Tanım 4.3.8: Γ bir Fuchs grubu, *F*, Γ grubunun bir temel bölgesi ve $a \in F$ olsun. Eğer sadece sonlu sayıda $T \in \Gamma$ için $V(a) \cap T(F) \neq \phi$ olacak şekilde *a* noktasının bir *V(a)* komşuluğu varsa, *F* ye ***yerel sonlu***dur denir.

Teorem 4.3.9: Fuchs gruplarının Dirichlet bölgeleri yerel sonludur.

İspat: (Jones and Singerman,1987).

Γ bir Fuchs grubu; *F*, Γ grubu için bir Dirichlet bölgesi; *s*, *F* bölgesinin bir kenarı ve $T \in \Gamma - \{I\}$ (*I*, Γ nın birim elemanıdır) olsun. Eğer *T*(*s*), *F* bölgesinin bir kenarı ise *s* ve *T*(*s*) kenarları ***denktir*** denir.

Örnek 4.3.10: Modüler grubun Teorem 4.3.7 de verilen temel *F* bölgesinin iki düşey kenarı denktir. Bu kenarlar $z \to z+1$ ve $z \to z-1$ dönüşümleri tarafından birbirlerine resmedilirler. Aynı temel bölgenin birim çemberin üzerindeki kenarı ise $z \to -\frac{1}{z}$ dönüşümü tarafından kendisine resmedilir. $z \to -\frac{1}{z}$ dönüşümü bu kenarın orta noktasını (i noktasını) sabit tutar. Diğer noktaları ise i noktasına göre simetriğine götürür (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Modüler grubun bir temel bölgesi.

Teorem 4.3.11: Γ bir Fuchs grubu ve F, Γ grubunun bir Dirichlet bölgesi olsun. F bölgesinin kenarlarını yine F bölgesinin kenarlarına götüren ve Γ grubunun elemanlarından oluşan $\{T_i\}$ kümesinin elemanları Γ grubunu üretir.

İspat: $\{T_i\}$ kümesinin elemanlarının ürettiği grup Λ olsun. Λ, Γ grubunun bir alt grubudur. $\Lambda = \Gamma$ olduğunu gösterirsek ispat biter. $S_1 \in \Lambda$ ve $S_2(F), S_1(F)$ bölgesinin bir komşu temel bölgesi olsun. Yani $S_1(F) \cap S_2(F)$ bir kenar olsun. Bu taktirde, $S_1^{-1} \circ S_2(F)$, F bölgesinin bir komşu temel bölgesidir. O halde, $S_1^{-1} \circ S_2 = T_k \in \{T_i\}$ dir ve $S_2 = S_1 \circ T_k$ olduğundan $S_2 \in \Lambda$ dır. Eğer $S_3(F), S_1(F)$ bölgesini bir v köşesinde keserse, Teorem 4.3.9 gereğince, v sadece sonlu sayıda temel bölgenin köşesidir. Böylece, yukarıdakine benzer işlemler ard arda tekrar edilirse $S_3 \in \Lambda$ olduğu görülür. Şimdi $X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F)$ ve $Y = \bigcup_{S \in \Gamma - \Lambda} S(F)$ ise $X \cap Y = \phi$ dir. $X \cup Y = \mathbf{H}$ olduğu açıktır. Eğer X ve Y kümelerinin hiperbolik düzlemin kapalı alt kümeleri olduklarını gösterirsek, **H** bağlantılı ve $X \neq \phi$ olduğundan X=**H** ve $Y = \phi$ elde edilir. Bu ise $\Lambda = \Gamma$ demektir.

Şimdi de temel bölgelerin herhangi bir birleşimi olan $\cup V_j(F)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$, $\cup V_j(F)$ kümesinde bir dizi, $x_0 \in \cup V_j(F)$ ve $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ olsun. Bu taktirde, bir $g \in \Gamma$ için $x_0, g(\Gamma)$ kümesinin elemanıdır ve Teorem 4.3.9 a göre, x_0 noktasının bir N komşuluğu vardır öyle ki N kümesinin sadece sonlu sayıda $V_j(F)$ ile arakesiti boş küme değildir. Bu sonlu aileye ait kümelerden bir tanesi $\{x_n\}$

dizisinin x_0 noktasına yakınsayan bir alt dizisini içermek zorundadır. Bu kümeyi $V_{x_0}(F)$ ile gösterelim. $V_{x_0}(F)$ kapalı olduğundan $x_0 \in V_{x_0}(F) \subset \cup V_j(F)$ elde edilir. Bu ise $\cup V_j(F)$ ailesinin kapalı olduğunu gösterir. O halde, *X* ve *Y* kapalıdır.

Örnek 4.3.12: Teorem 4.3.11 ve Örnek 4.3.10 a göre, $z \to z+1$ ve $z \to -\dfrac{1}{z}$ dönüşümleri modüler grubu üretir.

4.4. Bölüm Uzayları (Yörünge Uzayları)

Γ bir Fuchs grubu olsun. $x \in \mathbf{H}$ olmak üzere, x noktasının yörüngesi $\Gamma_x = \{g(x) \mid g \in \Gamma\}$ kümesidir. Eğer $y \in \Gamma_x$ ise $g(x)=y$ olacak şekilde bir $g \in \Gamma$ vardır. Bu durumda, $\forall x, y \in \mathbf{H}$ için,

$$xRy \Leftrightarrow y \in \Gamma_x$$

şeklinde tanımlanan *R* bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre herhangi bir x elemanının denklik sınıfı x noktasının yörüngesidir. Denklik sınıflarının kümesi $\mathbf{H}/R = \{\Gamma_x \mid x \in \mathbf{H}\}$ ile gösterilir ve bu küme, hiperbolik düzlemin *R* bağıntısına göre bölüm kümesidir.

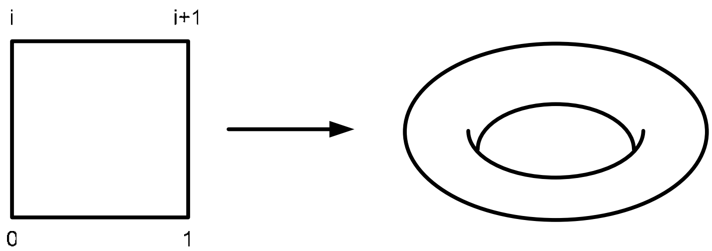
$\Pi : \mathbf{H} \to \mathbf{H}/R$, $\Pi(x) = \Gamma_x$ bölüm fonksiyonu olmak üzere,

$$\text{“}O \subset \mathbf{H}/R \text{ açıktır} \Leftrightarrow \Pi^{-1}(O)\ \mathbf{H} \text{ de açıktır”}$$

şeklinde tanımlanan *O* açık kümeleri **H**/*R* kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topoloji **H**/*R* üzerindeki bölüm topolojisidir. Bölüm topolojisi ile beraber düşünüldüğünde **H**/*R* bir topolojik uzaydır ve bu topolojik uzaya ***bölüm uzayı*** veya ***yörünge uzayı*** denir. **H**/*R* bölüm uzayının elemanları Γ grubuna göre yörüngeler olduğundan bundan sonra **H**/*R* yerine **H**/Γ notasyonunu kullanacağız.

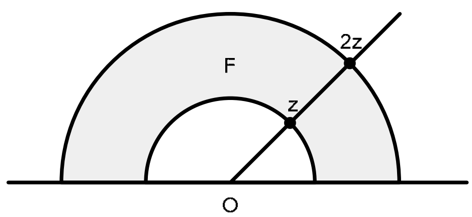
$\mathbf{H}/\Gamma$ bir yüzeydir ve geometrik olarak şu şekilde elde edilir. F, Γ grubu için bağlantılı bir temel bölge olsun. Temel bölge tanımından dolayı F bölgesinin iki farklı iç noktası aynı yörüngede bulunamaz. Fakat F bölgesinin sınırı üzerinde birden fazla nokta aynı yörüngede bulunabilir. F nin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar uygun şekilde birleştirilirse $\mathbf{H}/\Gamma$ yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.4.1: $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = z + 1$, $g(z) = z + i$ dönüşümleri bir G grubu üretirler. Herhangi bir $z \in \mathbf{C}$ noktasının yörüngesi karmaşık sayılar kümesinin bir ayrık alt kümesidir. O halde, G bir ayrık gruptur. Köşeleri $0, 1, i$ ve $1+i$ olan kare G grubu için bir temel bölgedir. Bu karenin kenarları üzerinde aynı yörüngeye sahip noktalar uygun şekilde birleştirilirse bir torus elde edilir (Şekil 4.5).



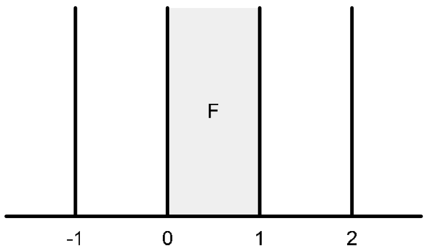
Şekil 4.5 Torus.

Örnek 4.4.2: $g : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $g(z) = 2z$ dönüşümü devirli bir Γ Fuchs grubu üretir. Şekil 4.6 daki F bölgesi Γ için bir temel bölgedir. Orijinden geçen herhangi bir doğrunun F bölgesinin sınırlarını kestiği noktalar aynı yörüngede bulunurlar. F bölgesinin sınırı üzerinde bulunan aynı yörüngeye sahip noktalar uygun şekilde birleştirilirse sonsuz bir silindir elde edilir.



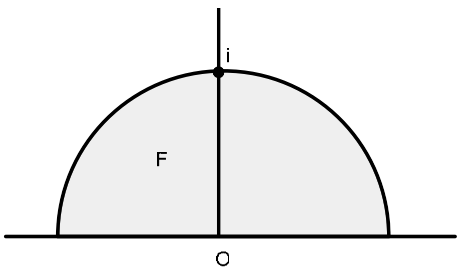
Şekil 4.6 $\langle z \to 2z \rangle$ grubu için bir temel bölge.

Örnek 4.4.3: $g:\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{H},\ g(z)=z+1$ dönüşümü devirli bir G grubu üretir. Şekil 4.7 deki F bölgesi G grubu için bir temel bölgedir. F bölgesinin sınırı üzerinde ordinatları aynı olan noktalar aynı yörüngede bulunurlar. Bu şekildeki noktalar birleştirildiğinde sonsuz bir silindir elde edilir.



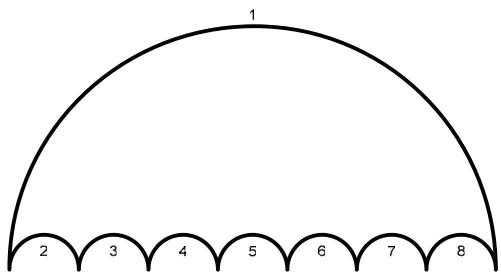
Şekil 4.7 $\langle z\rightarrow z+1\rangle$ grubu için bir temel bölge.

Örnek 4.4.4: $f:\mathbf{H}\rightarrow\mathbf{H},\ f(z)=-\dfrac{1}{z}$ dönüşümü iki elemanlı bir devirli K Fuchs grubu üretir. Şekil 4.8 deki F bölgesi K grubu için bir temel bölgedir. Hiperbolik metriğe göre F bölgesinin sınırı üzerindeki i noktasına göre simetrik noktalar aynı yörüngededirler. f dönüşümü i noktasını sabit tuttuğu için i noktasının yörüngesinde kendisi dışında nokta yoktur. F bölgesinin sınırı üzerinde aynı yörüngede bulunan noktalar birleştirildiğinde bir yarım koni elde edilir.



Şekil 4.8 $\langle z\rightarrow -\dfrac{1}{z}\rangle$ grubu için bir temel bölge.

Örnek 4.4.5: *F*, hiperbolik düzlemde iç açılarının ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ olan bir düzgün hiperbolik sekizgen olsun. Böyle bir sekizgen daima bulunabilir (Beardon, 1979). *F* sekizgeninin kenarlarını Şekil 4.9 daki gibi numaralandıralım.

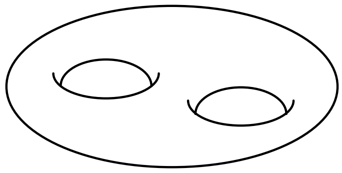


Şekil 4.9 Düzgün hiperbolik sekizgen.

Sekizgenin çift sayılarla numaralandırılmış kenarlarını hiperbolik doğrulara tamamlarsak, bu doğrular birbirlerini kesmezler. Aksi halde iç açılarının ölçüleri toplamı π den daha büyük hiperbolik üçgenler elde edilir ki bu mümkün değildir. Aynı irdeleme sekizgenin tek sayılarla numaralandırılmış kenarları için de geçerlidir. Teorem 3.3.2 gereğince, $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubunda sekizgenin tek veya çift numaralı herhangi iki kenarını birbirine resmeden bir dönüşüm vardır. Bu kenarları üzerlerinde bulunduran hiperbolik doğrular ayrık paralel oldukları için söz konusu dönüşüm bir ötelemedir. Bu şekilde, sekizgenin karşılıklı kenarlarını birbirine resmeden dört öteleme bulabiliriz. Bu ötelemeleri, birleştirdikleri kenarların numaraları cinsinden şöyle gösterelim:

$$\begin{array}{ll} f_1 : 2 \to 4 & \qquad g_1 : 1 \to 3 \\ f_2 : 6 \to 8 & \qquad g_2 : 5 \to 7 \end{array}$$

f_1, f_2, g_1 ve g_2 dönüşümleri bir Fuchs grubu üretirler ve *F* bu Fuchs grubu için bir temel bölgedir (Scott, 1983). *F* bölgesinin denk kenarlarını birleştirirsek Şekil 4.10 daki gibi bir yüzey elde ederiz. Burada sekizgenin köşelerinin tamamı yüzey üzerinde aynı noktaya karşılık gelir.



Şekil 4.10 Düzgün sekizgenden elde edilen yüzey (iki kulplu küre).

Şekil 4.10 daki yüzey topolojik olarak iki kulp eklenmiş bir küre olarak düşünülebilir. Benzer şekilde, F yerine iç açılarının ölçüsü $\frac{\pi}{2n}$ olan $4n$ kenarlı bir düzgün çokgen alıp işleme devam edersek, bölüm uzayı olarak n kulplu bir küre elde ederiz. Burada n, 1 den büyük bir tamsayıdır.

4.5. Fuchs Gruplarının Cebirsel Özellikleri

Yardımcı Teorem 4.5.1: $(\mathbf{R},+)$ toplamsal grubunun bir ayrık alt grubu $(\mathbf{Z},+)$ toplamsal grubuna izomorftur.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

Yardımcı Teorem 4.5.2: S, karmaşık düzlemde birim çember olmak üzere $(S,.)$ çarpımsal grubunun bir ayrık alt grubu $\mathbf{Z}_n$ $(n \geq 2)$ devirli grubuna izomorftur.

İspat: (Jones and Singerman, 1987).

Teorem 4.5.3: Γ bir Fuchs grubu olsun. Eğer Γ grubunun birim eleman dışındaki tüm elemanlarının sabit nokta kümeleri aynı ise Γ bir devirli gruptur.

İspat: $g \in \Gamma$ bir öteleme olsun. g dönüşümünün $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde iki sabit noktası vardır. Genelliği bozmayacağı için g dönüşümünün sabit noktalarını 0 ve ∞ alabiliriz. Hipoteze göre, Γ grubunun bütün elemanları 0 ve sonsuzu sabit tutan ötelemelerdir. O halde, Γ, $G = \{ z \to \lambda z \mid \lambda > 0 \}$ grubunun bir ayrık alt grubudur. $\mathbf{R}^* = \{ x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \}$ olmak üzere G, $(\mathbf{R}^*,.)$ çarpımsal grubuna izomorftur. $\mathbf{R}^*$ grubu da

$$\theta : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ \theta(x) = \ln x$$

dönüşümü ile $(\mathbf{R},+)$ grubuna izomorftur. Yardımcı Teorem 4.5.1 den dolayı Γ, $(\mathbf{Z},+)$ grubuna izomorf olduğundan bir devirli gruptur.

$g \in \Gamma$ bir limit rotasyon olsun. g dönüşümünün $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde bir sabit noktası vardır. Genelliği bozmayacağı için g dönüşümünün sabit noktasını ∞ alabiliriz. O halde, Γ grubunun bütün elemanları sonsuzu sabit tutacağı için Γ, $H = \{ z \to z + \alpha \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$ grubunun bir ayrık alt grubudur. *H,* $(\mathbf{R},+)$ grubuna izomorf olduğundan Yardımcı Teorem 4.5.1 e göre Γ bir devirli gruptur.

$g \in \Gamma$ bir rotasyon olsun. *g,* hiperbolik düzlemde bir *a* noktasını sabit tutar. Hipoteze göre Γ grubunun bütün elemanları *a* noktasını sabit tutar. *a* noktasını sabit tutan dönüşümlerin oluşturduğu grup *R* olsun. O halde Γ, *R* grubunun bir ayrık alt grubudur. *R,* $(S,.)$ grubuna izomorf olduğundan Yardımcı Teorem 4.5.2 ye göre Γ bir sonlu devirli gruptur.

Teorem 4.5.4: Bir Fuchs grubundaki rotasyonların mertebeleri sonludur.

İspat: Teorem 4.5.3 ün ispatındaki son paragraftan kolayca elde edilir.

Teorem 4.5.5: Her değişmeli Fuchs grubu devirlidir.

İspat: Teorem 2.4.3 ve Teorem 4.5.3 den elde edilir.

Teorem 4.5.6: Γ bir Fuchs grubu ve $g \in \Gamma$ olsun. g elemanının $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubundaki merkezleyeni bir Fuchs grubu değildir.

İspat: *g* bir öteleme olsun. *g* dönüşümünün $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ kümesinde *A* ve *B* gibi iki sabit noktası vardır. *g* elemanının $\mathrm{M}_1(2,\mathbf{R})$ grubundaki merkezleyeni *H* olsun. *H* bir gruptur ve Teorem 2.4.3 e göre *H* grubunun elemanları, *A* ve *B* noktalarını sabit tutan ötelemelerdir. *A* ve *B* noktalarını birleştiren *L* doğrusu üzerinde bir nokta x_0 olsun. x_0 noktasının yörüngesi, yani $H_{x_0} = \{ h(x_0) \mid h \in H \}$ kümesi, *L* doğrusu üzerindeki tüm noktalardan oluşur ve H grubunun bir ayrık alt kümesi değildir. Sonuç 4.1.7 ye göre, H bir Fuchs grubu değildir.

g dönüşümünün bir rotasyon veya limit rotasyon olması durumunda da ispat benzer şekilde verilir.

ÖZET

Fuchs grupları, hiperbolik düzlemin konform izometri grubunun ayrık alt gruplarıdır. Modüler grup ve üçgensel gruplar gibi bazı örneklerin önceden bilinmesine rağmen, Fuchs grupları ilk defa Poincaré (1882) tarafından sistemli bir biçimde çalışılmıştır. Poincaré, L. Fuchs'un diferansiyel denklemler konusundaki bir makalesini okuduktan sonra bu gruplara Fuchs grupları ismini vermiştir.

Bu çalışmada hiperbolik düzlem için üst yarı düzlem modeli kullanılmıştır. Bu modele göre hiperbolik düzlem,

$$\mathbf{H} = \left\{ x + iy \,\middle|\, x, y \in \mathbf{R},\ y > 0 \right\}$$

kümesidir ve hiperbolik düzlemin konform izometrileri

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1)$$

biçimindeki Möbius dönüşümleridir. Bu dönüşümler sabit noktalarına göre, ötelemeler, rotasyonlar ve limit rotasyonlar olmak üzere üç türe ayrılırlar.

Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı bir yüzeydir. Bu yüzeyin topolojik özellikleri gruptaki dönüşümlerin türlerine bağlıdır. Örneğin, limit rotasyon içeren bir Fuchs grubunun bölüm uzayı kompakt olamaz. Pürüzsüz ve kompakt yüzeyler sadece ötelemeler tarafından üretilen Fuchs gruplarından elde edilirler.

Bir Fuchs grubunun bir temel bölgesi, hiperbolik düzlemin bir kapalı alt kümesidir. Grubun elemanları altında bu kümenin görüntülerinin birleşimi hiperbolik düzlemi verir. Ayrıca, herhangi iki görüntü ya ayrıktır veya ortak noktaları sınırlarındadır. Bir Fuchs grubunun bölüm uzayı, bu gruba ait herhangi bir temel bölge üzerinde aynı yörüngede bulunan noktaların uygun biçimde birleştirilmesiyle elde edilir.

Bu çalışmada, Fuchs gruplarının temel bölgeleri ve bölüm uzayları gibi daha çok geometrik özellikleri üzerinde durulmuş ve toplanan bilgiler, örnekler ve şekillerle açıklanarak verilmiştir.

SUMMARY

Fuchsian groups are discrete subgroups of the group of conformal isometries of the hyperbolic plane. These groups were first studied systematically by Poincaré (1882), although some examples such as the modular group and triangle groups had been known before that. After reading a paper by L. Fuchs on differential equations, Poincaré called them Fuchsian groups.

In this work, for the hyperbolic plane, the upper-half plane model is used. By this model, hyperbolic plane is the set

$$\mathbf{H} = \left\{ x + iy \,\middle|\, x, y \in \mathbf{R},\ y > 0 \right\}$$

and the conformal isometries of **H** are the Möbius transformations of the form

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1).$$

According to their fixed-points, these transformations fall into three kinds, which are translations, rotations and limit rotations.

The quotient space of a Fuchsian group is a surface. The topological features of this surface depend on the kinds of the transformations in the group. For example, the quotient space of a Fuchsian group that contains a limit rotation cannot be compact. Smooth and compact surfaces can be obtained from Fuchsian groups that are generated only by translations.

A fundamental region of a Fuchsian group is a closed subset of the hyperbolic plane. The union of the images of this set under the elements of the group gives the hyperbolic plane. Also, any two images is either disjoint or their common points lie on their boundaries. The quotient space of a Fuchsian group is obtained by joining the points, which are in the same orbit, of a fundamental region of this group.

In this work, mostly the geometrical properties of Fuchsian groups such as their fundamental regions and quotient spaces have been emphasized and the collected knowledge have been given by clarifying with examples and figures.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında yardımlarından dolayı Hocam Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca teknik bilgisiyle yardımlarını esirgemeyen kardeşime ve manevi destekleri için eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

KAYNAKLAR

1. BEARDON A.F. (1977). The Geometry of Discrete Groups. (in Discrete Groups and Automorphic Functions. Ed. W. HARWEY). Academic Press. London.
2. BEARDON A.F. (1979). Hyperbolic polygons and Fuchsian groups. J. London Math. Soc. (2) 20: 247-254.
3. BEARDON A.F. (1983). The Geometry of Discrete Groups. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.
4. BELTRAMI E. (1868). Teoria fondamentale delgi spazii di curvatura costante. Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2 (2): 232-255.
5. CHURCHILL R.V. (1960). Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, Inc. New York, Toronto, London.
6. JONES G.A. and D. SINGERMAN. (1987). Complex Functions. Cambridge University Press. Cambridge.
7. KATOK S. (1992). Fuchsian Groups. The University of Chicaga Pres. London.
8. MACBEATH A.M. (1961). Discontinuous groups and birational transformations. Proc. Dundee Summer School.
9. MAGNUS W. (1974). Non-Euclidean Tessellations and Their Groups. Academic Press. New York.
10. POINCARÉ.H. 1882. Theorie des Groupes Fuchsiens. Acta Math. 1. 1-62.

11. SCOTT.P. 1983. The Geometry of 3-Manifolds. Bull. London Math. Soc. 15: 401-487.

12. SPRİNGER G. (1957). Introduction to Riemann surfaces. Addison-Wesley. Reading.

13. STILLWELL.J. 1992. Geometry of Surfaces. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Afyon'da doğdu. Ortaokul ve lise eğitimini İzmir Bornova Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Ögretmenliği'nden mezun oldu. Halen İzmir Karabağlar İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.