T.C.

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAT-YL-2006-0002

SALINIMLARI KONTROL EDİLEN DİZİLER İÇİN TAUBER TEOREMLERİ

HAZIRLAYAN: Ümit TOTUR

DANIŞMAN: Yrd.Doç.Dr. İbrahim ÇANAK

AYDIN-2006

ÖZ

Bu tezde, Karamata'nın temel teoremi ve sonucunun yardımıyla, klasik Tauber teorisinde elde edilmiş olan sonuçların yeniden ispatlanması ve genelleştirilmelerinin verilmesi amaçlanmıştır.

1. Bölümde teze giriş yapılmıştır.

2. Bölümde, tez boyunca kullanılacak olan tanımlar ve gösterimler verilmiş, klasik Tauber teorisinin gelişiminden bahsedilmiştir.

3. Bölümde, kontrol modülo kavramı ile klasik Tauber teoremleri genelleştirilmiştir.

4. Bölümde, alt dizisel Tauber teorisi tanıtılıp, bununla ilgili Tauber teoremleri verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Tauber teoremleri, kontrol modülo, yavaş salınımlı diziler, ılımlı salınımlı diziler, alt dizisel yakınsak diziler.

ABSTRACT

In this work, it is aimed to collect the results in the classical Tauberian theory and to give their generalizations by mean of Karamata's Hauptsatz and its corollary.

In Chapter 1, introduction is done to thesis.

In Chapter 2, all the definitions and notations used in the thesis are given and the state of arts for the classical Tauberian theory is examined.

In Chapter 3, classical Tauberian theorems are generalized by the concept of control modulo.

In Chapter 4, subsequential Tauberian theory is introduced and then Tauberian theorems related to it are given.

KEY WORDS: Tauberian theorems, control modulo, slowly oscillating sequences, moderately oscillating sequences, subsequential convergent sequences.

İçindekiler

Bölüm 1

GİRİŞ

$\{u_n\}$ reel sayı dizisi olmak üzere Abel'in gerek koşulu olarak bilinen $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ limitini sağlayan dizi sınıfı yakınsak olan dizi sınıfından daha geniştir. Klasik Tauber teorisi geniş olan bu dizi sınıfından yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için gerekli olan koşulları bulmak üzerine kurulmuştur. İlk olarak böyle bir koşulu Tauber (1897) vermiştir. Tauber, Kontrol modülonun üzerine konan koşul ile Abel'in gerek koşulunu sağlayan dizinin yakınsaklığını elde etmiştir. Daha sonra çalışmalar bu koşulun zayıflatılması üzerine yoğunlaşmıştır. Littlewood (1910) ve Hardy & Littlewood (1914) kontrol modülo üzerine koydukları daha genel koşullar ile de yakınsaklığın elde edilebildiğini göstermiştir. Sonraları bu koşulların genelleştirilmesi sürecinde Schmidt (1925) yavaş salınımlılık kavramını tanıtmıştır ve yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için daha zayıf bir koşul inşa etmiştir. Fakat daha genel koşullar ile yakınsaklığa geçiş yaparken ispatlar gittikçe çok uzun ve karmaşık hale geliyordu. Karamata (1930) tarafından verilen teorem hem daha önce yapılan ispatları basitleştirmiş hem de genel koşullar bulmak için bir araç olmuştur. Dik (2002b), Karamata'nın teoremi yardımıyla, Stanojević (1998) tarafından tanıtılan m. mertebeden kontrol modülo üzerine koşullar koymuş ve Tauber teoremleri elde etmiştir. Bu tip teoremlerden

Bölüm 3'te bahsedilecektir.

Tauber ile başlayan bu tip teoremlerde bazı koşullar ile Abel'in gerek koşulunun varlığından yakınsaklık elde edilememiştir. Dik (2002a) bu tip koşullar ile ilgilenmiş ve yakınsaklıktan daha genel olan alt dizisel yakınsaklık kavramını tanıtarak Karamata'nın teoremi yardımıyla teoremler ispatlamıştır. Bu tip teoremler Tauber teorisinin yeni bir çeşidi olan alt dizisel Tauber teorisini oluşturmaktadır. Tezin son bölümünde alt dizisel Tauber teorisi ile ilgili geniş bilgi verilmiştir.

Bölüm 2

GENEL BİLGİLER

2.1 Tanımlar ve Gösterimler

Klasik Tauber teorisinde yakınsaklığın yeniden elde edilmesi problemi Abel'in gerek koşulu olarak bilinen,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n \tag{2.1.1}$$

limitin mevcut olması ve $\{u_n\}$ reel sayı dizisi üzerine konulan bazı koşullarla,

$$\lim_{n} u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n \tag{2.1.2}$$

eşitliğinin ispatlanmasına indirgenir. Her yakınsak dizi aynı zamanda (2.1.1) limitini gerçekler. Fakat tersi doğru değildir, örneğin $\{u_n\} = \{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\}$ dizisi (2.1.1) limitini sağlar ama yakınsak değildir. O halde (2.1.1) limitini gerçekleyen dizilerin sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfından daha geniştir. Daha geniş dizi sınıfından yakınsaklığa geçiş için $u = \{u_n\}$ dizisi üzerine konulan koşullar, dizinin Taylor katsayılarını kısıtlayarak oluşturulan koşullardır. Bu koşullara *Tauber koşulları* ve bu koşulları içeren teoremlere de *Tauber teoremleri* denir. Tez boyunca kullanılacak gösterimler aşağıdaki gibi verilebilir:

m pozitif tamsayısı ve n doğal sayısı için,

$$\Delta u_n = \begin{cases} u_n - u_{n-1} & , n \geq 1 \\ u_0 & , n = 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\sigma_n^{(m)}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(m-1)}(u) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(m-1)}(\Delta u)}{k} & , m \geq 1 \\ u_n & , m = 0 \end{cases}$$

ve

$$V_n^{(m)}(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k^{(m-1)}(\Delta u) & , m \geq 1 \\ \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \Delta u_k & , m = 0 \end{cases}$$

dir. Burada özel olarak, $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisi $\{u_n\}$ dizisinin *üreteç dizisi* olarak adlandırılır. $\sigma_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(m+1)}(u) = V_n^{(m)}(\Delta u)$ eşitliği,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u) \tag{2.1.3}$$

ile verilen ve ispatların çeşitli adımlarında sıkça kullanılacak *Kronecker eşitliğinin* genel halidir. Bu eşitlik, $\{u_n\}$ dizisinin $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ üreteç dizisi yardımıyla,

$$u_n = V_n^{(0)}(\Delta u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0 \tag{2.1.4}$$

şeklinde de yazılabilir.

Ayrıca $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarının kontrolü için kullanacağımız $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n$ ifadesine $\{u_n\}$ dizisinin *kontrol modülosu* denir. $m \geq 1$ tamsayısı ve her pozitif n tamsayısı için,

$$\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlanan $\omega_n^{(m)}(u)$'ye $\{u_n\}$ dizisinin *m. mertebeden kontrol modülosu* denir.(Dik (2002b))

Tezde bundan sonraki kısımlarda, $\{u_n\}$ dizisinin sıfıra yakınsaması $u_n = o(1),\ n \to \infty$ ile ; $\{u_n\}$ dizisinin sınırlılığı da $u_n = O(1),\ n \to \infty$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun.*

$$u_n - u_m = o(1)\ ,\ n > m \to \infty\ ,\ \frac{n}{m} \to 1$$

ise $\{u_n\}$ dizisine yavaş salınımlı bir dizi denir.

Schmidt (1925) tarafından verilen bu tanım yapılacak ispatlar için uygun olmadığından bu tez boyunca Stanojević (1998) 'in vermiş olduğu aşağıdaki tanımı kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \overline{\lim_{n}} \max_{n+1 \le k \le [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j \right| = 0 \tag{2.1.6}$$

ise $\{u_n\}$ dizisine yavaş salınımlı bir dizi denir.

Yavaş salınımlı dizilerin sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfını kapsar. $\{u_n\} = \{\log n\}$ dizisi yavaş salınımlı olup yakınsak olmayan diziye bir örnektir. Gerçekten,

$$\sum_{j=n+1}^{k} \Delta \log j = \sum_{j=n+1}^{k} \log(\frac{j}{j-1}) = \log \prod_{j=n+1}^{k} \frac{j}{j-1} = \log(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdots \frac{k}{k-1})$$

dir. Buradan tanımı uygularsak, $\max_{n+1 \le k \le [\lambda n]} \log(\frac{k}{n}) = \log \frac{[\lambda n]}{n}$ bulunur, önce $n \to \infty$ için üst limit ve $\lambda \to 1^+$ için limit alındığında tanımın sağlandığı görülür. Bu örneğin Schmidt'in yavaş salınımlılık tanımını sağladığı da kolayca gösterilebilir.

$\{u_n\}$ dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisinin sınırlı ve yavaş salınımlı olduğu sonucu Tanım 2.1.2 den elde edilir. Gerçekten, $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisi sınırlı ve yavaş salınımlı ise (2.1.4) eşitliğinden dolayı $\{u_n\}$ nin yavaş salınımlı olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, $\{u_n\}$ dizisi yavaş salınımlı ise, $\lambda > 1$ için,

$$\upsilon_n(u,\lambda) = \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right|$$

ile gösterilsin. $\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\frac{n}{2^{j+1}}\le k<\frac{n}{2^j}} k\Delta u_k$ şeklinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k| &\le \sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{\frac{n}{2^{j+1}}\le k<\frac{n}{2^j}} k\Delta u_k\right| \\
&\le \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n}{2^j}\right)\upsilon_{[\frac{n}{2^{j+1}}]}(u,\lambda) \\
&\le nC_1\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} = 2nC_1, \quad (C_1 \quad pozitif \quad sabit)
\end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\Delta u_k = O(1), n\to\infty$$

bulunur. Dolayısıyla, $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ yavaş salınımlıdır ve bundan dolayı $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisi de yavaş salınımlıdır.

Hardy & Littlewood (1914),

$$p > 1 \ i\c{c}in, \quad V_n^{(0)}(|\Delta u|,p) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^p|\Delta u_k|^p = O(1), n\to\infty \qquad (2.1.7)$$

ile (2.1.1) limitinden $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığının elde edilebileceğini tahmin etmiştir fakat bunun Tauber koşulu olduğunu Szász (1928) ispatlamıştır.

Aynı zamanda (2.1.7) koşulunu sağlayan $\{u_n\}$ dizileri yavaş salınımlı dizilerdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| &\le \max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}|\Delta u_j| \\
&\le \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j\frac{|\Delta u_j|}{j} \le \frac{1}{n+1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j|\Delta u_j| \\
&= \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\,\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j|\Delta u_j| \\
&\le \frac{[\lambda n]-n}{n+1}\,\frac{1}{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{p}}}\left[\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j^p|\Delta u_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{([\lambda n]-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n+1}\left[\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j^p|\Delta u_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&= \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{n+1}\left[\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j^p|\Delta u_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{([\lambda n]-n)^{\frac{1}{q}}}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\,\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]} j^p|\Delta u_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın üst limiti alınırsa, C, (2.1.7) den gelen bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n}\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| &\le \overline{\lim_n}\left(\frac{[\lambda n]-n}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{[\lambda n]+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}\overline{\lim_n}\left(\frac{1}{[\lambda n]+1}\sum_{j=0}^{[\lambda n]} j^p|\Delta u_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le (\lambda-1)^{\frac{1}{q}}\lambda^{\frac{1}{p}}C
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $\lambda\to1^+$ e göre limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda\to1^+}\overline{\lim_n}\max_{n+1\le k\le[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j\right| \le C\lim_{\lambda\to1+}(\lambda-1)^{\frac{1}{q}}\lambda^{\frac{1}{p}}=0$$

bulunur. Bu eşitlik (2.1.7) koşulunu gerçekleyen dizilerin yavaş salınımlı olduğunu gösterir.

Fakat $p = 1$ için $V_n^{(0)}(|\Delta u|, 1) = O(1), n \to \infty$ olması koşulu (2.1.1) limitinden $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığının tekrar elde edilebilmesi için bir Tauber koşulu değildir. Bu durum, $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarını kontrol eden yavaş salınımlılıktan daha genel bir kavrama yönelmeyi sağlamıştır.

Yavaş salınımlılığın daha genel hali aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.3 $\lambda > 1$ *için,*

$$\overline{\lim_n} \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j \right| < \infty$$

ise $\{u_n\}$ *dizisine ılımlı salınımlı bir dizi denir.*

Ilımlı salınımlı olup yavaş salınımlı olmayan bir dizi olarak

$$u_n = \begin{cases} 1 & , k = 2^n, \ n = 1, 2, ... \\ -1 & , k = 2^n + 1, \ n = 1, 2, ... \\ 0 & , \text{ diğer} \end{cases}$$

dizisi verilebilir. Bir $\{u_n\}$ dizisinin de la Vallée Poussin ortalaması, $\lambda > 1$ için,

$$\tau_{n,[\lambda n]}(u) = \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım yardımıyla ispatların çeşitli adımlarında sıkça kullanılacak eşitliklerden birincisi elde edilir:

$\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} u_n &= \tau_{n,[\lambda n]}(u) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}(u_k-u_n) \\ &= \tau_{n,[\lambda n]}(u) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j \\ &= \tau_{n,[\lambda n]}(u) - \sigma_n^{(1)}(u) + \sigma_n^{(1)}(u) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k = ([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - (n+1)\sigma_n^{(1)}(u)$$

olduğundan her iki taraf $\dfrac{1}{[\lambda n]-n}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k = \tau_{n,[\lambda n]}(u) = \frac{([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - (n+1)\sigma_n^{(1)}(u)}{[\lambda n]-n}$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \tau_{n,[\lambda n]}(u) - \sigma_n^{(1)}(u) &= \frac{([\lambda n]+1)\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - (n+1)\sigma_n^{(1)}(u)}{[\lambda n]-n} - \sigma_n^{(1)}(u) \\ &= \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) \end{aligned}$$

olur. Böylelikle, $\lambda > 1$ için,

$$u_n = \sigma_n^{(1)}(u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j \quad (2.1.8)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $1 < \lambda < 2$ için $\{u_n\}$ dizisinin de la Vallée Poussin ortalaması,

$$\tau_{2n-[\lambda n],n}(u) = \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n} u_k$$

şeklinde tanımlanır. İkinci eşitlik bu tanımdan çıkarılır:

$$\begin{aligned}
u_n &= \tau_{2n-[\lambda n],n}(u) + (u_n - \tau_{2n-[\lambda n],n}(u)) \\
&= \tau_{2n-[\lambda n],n}(u) + \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n}(u_n - u_k) \\
&= \tau_{2n-[\lambda n],n}(u) + \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\Delta u_j \\
&= \tau_{2n-[\lambda n],n}(u) - \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u) + \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u) + \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\Delta u_j
\end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n} u_k = (n+1)\sigma^{(1)}_n(u) - (2n-[\lambda n]+1)\sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u)$$

olduğundan her iki taraf $\frac{1}{[\lambda n]-n}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n} u_k = \frac{(n+1)\sigma^{(1)}_n(u) - (2n-[\lambda n]+1)\sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u)}{[\lambda n]-n}$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\tau_{2n-[\lambda n],n}(u) - \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u) = \frac{n+1}{[\lambda n]-n}(\sigma^{(1)}_n(u) - \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u))$$

olur. Böylece, $1 < \lambda < 2$ için,

$$\begin{aligned}
u_n &= \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u) + \frac{n+1}{[\lambda n]-n}(\sigma^{(1)}_n(u) - \sigma^{(1)}_{2n-[\lambda n]}(u)) \\
&- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n}\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

elde edilir.

2.2 Klasik Tauber Teorisinin Kısa Bir Özeti

Klasik Tauber teoremlerinde, dizilerin salınım davranışlarını ya da sınırlılık modlarını kısıtlayan bazı araçlardan yararlanarak (2.1.1) limitini sağlayan dizilerin sınıfından tekrar yakınsak diziler elde edilir. İlk olarak Tauber (1897), $\{u_n\}$ dizisi için (2.1.1) limiti mevcut ve $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ olduğunda (2.1.2) in yani yakınsaklığın sağlandığını göstermiştir. Gerçekten,

$N(x) \to \infty$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n = o(1), x \to 1^-$ eşitliğini sağlayan bir $N(x)$ pozitif tamsayısı seçilsin. $n\Delta u_n = o(1),\ n \to \infty$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $n|\Delta u_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ tamsayısı vardır.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n = o(1), x \to 1^-$ eşitliğinde sol tarafı tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n &= \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n x^n + \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n \\
&= \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n (1 - x^n) = S_1 - S_2
\end{aligned}$$

olur.

$$|S_1| \leq \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} |\Delta u_n| x^n < \varepsilon \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \frac{x^n}{n} < \varepsilon \frac{1}{N(x)+1} (\frac{1}{1-x}) < \varepsilon$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}
|S_2| &\leq \sum_{n=0}^{N(x)} |\Delta u_n| (1 - x^n) \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{N(x)} n|\Delta u_n| = \frac{1}{[\frac{1}{1-x}]} \sum_{n=0}^{N(x)} n|\Delta u_n| \\
&= \frac{1}{[\frac{1}{1-x}]} \sum_{n=0}^{N(x)} n|\Delta u_n| = \frac{1}{N(x)} \sum_{n=0}^{N(x)} n|\Delta u_n| = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ koşulunun Tauber koşulu olduğu ispatlanmış olur. Farklı ispatlar için Szász (1944), Hardy (1949), Postnikov (1980) ve Korevaar (2004) e bakılabilir.

Tauber daha sonra $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ koşulunu daha zayıf olan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ koşulu ile değiştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 2.2.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve* $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ *ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

dir.

Bundan sonra (2.1.1) limitinin varlığından yakınsaklığı elde edebilmek için daha zayıf araçlar bulmaya doğru giden bir dönem açılmıştır ve $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ şartının önemli bir genelleştirilmesi Littlewood (1910) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.2.2 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve* $n\Delta u_n = O(1), n \to \infty$ *ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde edilir.

Daha sonraları böyle araçlar bulmak, hatta bunların çalıştığını göstermek oldukça zorlaşmıştır. İlk kısımda verilen Schmidt'in yavaş salınımlılık tanımı (2.1.1) limitinden yakınsaklığı yeniden elde etmeyi sağlamaktadır.

Teorem 2.2.3 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve* $\{u_n\}$ *yavaş salınımlı bir dizi ise* $\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *eşitliği sağlanır.*

Tek taraflı sınırlılığın tanımı Landau (1910) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. Negatif olmayan her n tamsayı ve bir* $C \geq 0$ *için* $u_n \geq -C$ *ise* $\{u_n\}$ *dizisine soldan tek taraflı sınırlı bir dizi denir.*

Landau, Littlewood'un vermiş olduğu $n\Delta u_n = O(1), n \to \infty$ koşulunun genel-leştirilmiş hali olan tek taraflı sınırlı olma koşulununda bir Tauber koşulu olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 2.2.4 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. $\lim\limits_n \sigma_n^{(1)}(u)$ mevcut ve negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için $n\Delta u_n \geq -C$ ise $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n \sigma_n^{(1)}(u)$ dir.*

Hardy ve Littlewood daha sonra yukarıdaki teoremin genelleştirilmiş halini vermiştir.

Teorem 2.2.5 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için $n\Delta u_n \geq -C$ ise $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ eşitliği sağlanır.*

Yukarıda verilen Teorem 2.2.3, Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.2.5'in ispatı Karamata'nın usta tekniğine kadar çok karmaşıktı. Karamata'nın temel teoreminin sonucu sadece daha önceki sonuçların ispatlarının basite indirgenmesi için değil, daha önemlisi $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarının genel kontrol modülosunu gerektiren Tauber teoremlerini elde etmek için yeni bir alan açmıştır.

Teorem 2.2.6 *(**Karamata (1930)**)*
$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi için $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n = A$ limiti mevcut, negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için, $u_n \geq -C$ ise (0,1) açık aralığında Riemann integrallenebilir her g fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n g(x^n) x^n = A \int_0^1 g$$

dir.

İspat. $\alpha \geq 0$ olsun. (2.1.1) limitinde x yerine $x^{1+\alpha}$ yazılırsa,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\alpha n} x^n = \frac{A}{1+\alpha}$$

elde edilir. Sonuç olarak (0,1) açık aralığındaki her P polinomu için

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n P(x^n) x^n = A\int_0^1 P$$

olur. (0,1) açık aralığında Riemann integrallenebilir her g ve her $\varepsilon > 0$ için (0,1) açık aralığında $p \leq g \leq P$ ve $\int_0^1 (P-p) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $p \leq P$ yi gerçekleyen p, P polinomları vardır. Buradan istenen sonuç elde edilir. (0,1) aralığındaki Riemann integrallenebilir fonksiyonların sınıfı olan $R(0,1)$ uzayına göre (2.1.1) limitinin parametrik formu olan

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n g(x^n) x^n = A\int_0^1 g$$

ifadesinde g fonksiyonunun uygun seçilmesiyle birçok olanak sağlanır. Örneğin,

$$x = e^{-\frac{1}{n}} \quad ve \quad g_0(t) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq t < e^{-1} \\ \frac{1}{t} & ,e^{-1} \leq t < 1 \end{cases}$$

seçilirse Karamata'nın temel teoreminin aşağıdaki özel ve önemli bir sonucu elde edilir.

Teorem 2.2.7 ***(Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu)***

$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut, negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için $u_n \geq -C$ ise

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde edilir.

Klasik Tauber teorisinin önemli sonuçları Karamata'nın temel teoreminin örnekleri olarak verilebilir.

Örnek 2.2.1 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve (2.1.6) eşitliği gerçeklenirse* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *elde edilir.*

Çözüm. (2.1.6) koşulu $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ olmasını gerektirir. Negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için $V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ elde edilir. Ayrıca $\{u_n\}$ dizisi (2.1.1) limitini sağlarsa $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizisi de (2.1.1) limitini sağlar ve Kronecker eşitliğinden $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = 0$ elde edilir. Karamata'nın temel teoreminin sonucuyla,
$V_n^{(1)}(\Delta u) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} V_k^{(0)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$ bulunur.

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

ve

$$\sigma_n^{(2)}(u) = \sigma_n^{(1)}(\sigma^{(1)}(u)) \text{ ve } n\Delta\sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde edilir.

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

olduğundan, $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ bulunur. $V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta\sigma_n^{(1)}(u)$ olduğundan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$ elde edilir ve böylece (2.1.1) limitini sağlayan yavaş salınımlı bir dizinin yakınsak olduğu görülür .■

Bölüm 3

TAUBER TEOREMLERİ

3.1 Genel Bir Bakış

Tauber teorisinde, (2.1.1) limitinden $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığını tekrar elde etmek için konulan koşullar, özellikle $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarını kontrol eden $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n$ ile verilen kontrol modüloya dayanmaktadır. Örneğin, Bölüm 2'de ispatlandığı gibi, $\{u_n\}$ dizisi için (2.1.1) limiti mevcut ve $\omega_n^{(0)}(u) = o(1), n \to \infty$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir. Bu teoremi genelleştirerek, koşul olarak $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ kontrol modülonun yerine aritmetik ortalamaları alındığında elde edilen,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k\Delta u_k = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

koşuluyla değiştirilirse (2.1.1) limitinden yakınsaklığa geçişin sağlandığı görülür. Bu koşul $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarını kontrol eden diğer bir kontrol modülosu olarak tanımlanır ve aynı zamanda (2.1.1) limitinden $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığının yeniden elde edilebilmesi için daha zayıf koşulların bulunabildiğinin ispatıdır. İlk bölümde (2.1.5) eşitliğiyle verilen m. mertebeden kontrol modülo tanımlanmıştı. Bu denklemde $m = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \omega_n^{(1)}(u) &= \omega_n^{(0)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(0)}(u)) = n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u) \\ &= n(V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-1}^{(0)}(\Delta u)) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Littlewood (1910) un vermiş olduğu koşulu genelleyeceğiz.

Teorem 3.1.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve* $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ *ılımlı salınımlı ise,* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

İspat. $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan ve $\omega_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(0)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u))$ eşitliğinden $\omega_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty$ elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın aritmetik ortalamaları alındığında,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$$

bulunur. O halde bir $C > 0$ için,

$$n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -C \tag{3.1.1}$$

elde edilir. $\lim_{x\to 1-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = S$ ise $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n = S$ olduğu bilindiğinden ve Kronecker eşitliğinden $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u) x^n = 0$ bulunur. Buradan,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\Delta u) x^n = 0 \tag{3.1.2}$$

olduğu görülür. Karamata'nın temel teoreminin sonucu kullanılırsa, (3.1.1) ve (3.1.2) den $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\Delta V_k^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. Yani $V_n^{(0)}(\Delta V^{(1)}(\Delta u)) = o(1), \ n \to \infty$ dir. Buradan $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), \ n \to \infty$ bulunur. $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan aritmetik ortalamaları olan

$V_n^{(0)}(\Delta u) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\Delta u_k$ yavaş salınımlıdır. 1.Bölüm'de verilen (2.1.8) eşitliğinde u_n yerine $V_n^{(0)}(\Delta u)$ yazılırsa, $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $n \to \infty$ a göre limiti alındığında $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ bulunur. Bu koşulda $\{u_n\}$ dizisi için orijinal Tauber koşuludur. Böylelikle,

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

eşitliği bulunur.■

Orijinal Tauber teoreminin sonucu kullanılarak da yukarıdaki ispat verilebilir. $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olması $\lim\limits_n \sigma_n^{(1)}(u)$ limitinin varlığını ve $\lim\limits_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ eşitliğini göstermektedir. Kronecker eşitliğinden,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = n(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{n-1}^{(1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. (2.1.1) limitinin varlığı $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ varlığını gerektirir ve orijinal Tauber teoreminin sonucu,

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

eşitliğini belirtir. Yukarıdaki ispatta $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ nin yavaş salınımlı olduğu görüldükten sonra Teorem 2.2.3 kullanılarak $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = 0$ bulunur ve buradan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir.

Bu tezde ispatlarda Karamata'nın temel teoreminin sonucu kullanılmıştır. Çünkü Karamata'nın metodu, yüksek mertebeden kontrol modülolar için en verimli araçtır. İspatlar Littlewood teoremi ve Hardy-Littlewood teoremi kullanılarak da yapılabilir fakat bu teoremlerin ispatları Karamata'nın teoreminin birer sonucu olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.1'de (2.1.1) limitinin mevcut olmasını $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ limitinin mevcut olmasıyla yer değiştirerek yüksek mertebeden kontrol modülolar için de kullanabilir.

Teorem 3.1.2 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi olsun.*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.1.3}$$

limiti mevcut ve $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı ise,

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde edilir.

İspat. Teoremin ispatında $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ limitinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan,

$$\omega_n^{(0)}(u)-\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u))=\omega_n^{(1)}(u)=O(1), n\to\infty$$

bulunur. Eşitlikte her iki tarafın aritmetik ortalaması alındığında,

$$V_n^{(0)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u)=n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u)=O(1), n\to\infty$$

ve buradan $V_n^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(2)}(\Delta u)=n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u)=O(1), n\to\infty$ elde edilir. O halde, $n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u)\ \geq\ -C$ yazılabilir. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ limiti mevcut ise $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(2)}(u)x^n$ limiti de mevcut olur. Kronecker eşitliğinden,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}V_n^{(1)}(\Delta u)x^n=0 \tag{3.1.4}$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(2)}(\Delta u)x^n = 0 \tag{3.1.5}$$

elde edilir. (3.1.4) ve (3.1.5) den,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u))x^n = 0$$

bulunur. Karamata'nın temel teoreminin sonucundan,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\Delta V_k^{(2)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$$

elde edilir. O halde bu $\{V_n^{(2)}(\Delta u)\}$ dizisi için orijinal Tauber koşuludur ve $V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$ bulunur. Ayrıca,

$$\sigma_n^{(2)}(u) - \sigma_n^{(3)}(u) = n(\sigma_n^{(3)}(u) - \sigma_{n-1}^{(3)}(u)) = V_n^{(2)}(\Delta u)$$

olduğundan Teorem 2.2.1 kullanılarak $V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$ olması ve $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(3)}(u)x^n$ limitinin mevcut olmasından da,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n = \lim_n \sigma_n^{(3)}(u) \tag{3.1.6}$$

elde edilir. $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı ise $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlıdır ve aritmetik ortalamaları olan $\{V_n^{(1)}(\Delta u)\}$ de yavaş salınımlıdır.

$V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$ olduğundan $\lim\limits_n \sigma_n^{(1)}(V^{(1)}(\Delta u)) = 0$ elde edilir. (2.1.8) eşitliğinde u_n yerine $V_n^{(1)}(\Delta u)$ yazılırsa, $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$ bulunur. $\sigma_n^{(2)}(u) - \sigma_n^{(3)}(u) = V_n^{(2)}(\Delta u)$ denkleminin her iki tarafının $n\to\infty$ a göre limiti alınırsa,

$$\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) - \lim_n \sigma_n^{(3)}(u) = \lim_n V_n^{(2)}(\Delta u) = 0$$

olur. (3.1.6) eşitliğinden,

$$\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde edilir. $\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u)$ denkleminde her iki tarafının $n \to \infty$ a göre limiti alınırsa,

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$$

bulunur. Eğer $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ varsa (2.1.1) limiti mevcuttur. (Stanojević (1998), Hardy (1949))

O halde Teorem 3.1.1'den,

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde edilir.■

Her yavaş salınımlı dizi ılımlı salınımlı olduğundan Teorem 3.1.2'nin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 3.1.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun.*

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$$

limiti mevcut ve $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ *yavaş salınımlı ise,*

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2 ve Sonuç 3.1.1, Littlewood teoreminin daha genel halleridir.

3.2 Kontrol Modüloları Ilımlı Salınımlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremleri

Bu bölümün kalan kısmında $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarını kontrol eden m. mertebeden kontrol modüloları kullanılarak Tauber teoremleri elde edilmeye devam edilecektir.

Birinci mertebeden kontrol modülo olan $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ dizisi Kronecker eşitliği yardımıyla elde edilir:
$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$ denkleminden,

$$\begin{aligned}(u_n - u_{n-1}) - (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{n-1}^{(1)}(u)) &= V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-1}^{(0)}(\Delta u) \\ \Delta u_n - \Delta\sigma_n^{(1)}(u) &= \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$n\Delta u_n - n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

elde edilir. $\sigma_n^{(1)}(u) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k}$ eşitliğini kullanarak,

$$n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = \omega_n^{(1)}(u)$$

olduğu görülür. Yani, $\omega_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(0)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u))$ bulunur.

Teorem 3.1.1'de $\{\omega_n^{(0)}(u)\}$ ılımlı salınımlı olduğunda (2.1.1) limitinden $\{u_n\}$ nin yakınsaklığı elde edilmişti. Aşağıda verilen teoremde kontrol modülonun mertebesi arttırıldığında da yakınsaklığın yeniden elde edilebildiğini göstermektedir.

Teorem 3.2.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun. (2.1.1) limiti mevcut ve* $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ *ılımlı salınımlı ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

İspat. $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ ılımlı salınımlı ise $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ yavaş salınımlıdır. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) &= V_n^{(1)}(\Delta\omega_n^{(1)}(u)) \\ &= n(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_{n-1}^{(2)}(\omega^{(1)}(u))) \\ &= O(1), n \to \infty\end{aligned}$$

olur. O halde negatif olmayan her n tamsayı ve bir $C \geq 0$ için,

$$n(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_{n-1}^{(2)}(\omega^{(1)}(u))) \geq -C \tag{3.2.1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) &= V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) \\ \sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) &= V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)\end{aligned}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa (2.1.1) limitinin varlığından,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u))x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))x^n = 0$$

ve dolayısıyla,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)))x^n = 0 \tag{3.2.2}$$

bulunur. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden Karamata'nın temel teoreminin sonucu kullanılırsa,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k(\sigma_k^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_{k-1}^{(2)}(\omega^{(1)}(u))) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. Bu $\{\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u))\}$ için orijinal Tauber koşuludur. O halde, $\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) = o(1), n \to \infty$ bulunur. $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ dizisinin aritmetik ortalamaları sıfıra yakınsar ve yavaş salınımlıdır. (2.1.8) eşitliğinde $\{u_n\}$ dizisi yerine $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ yazılırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty,$$

yani $n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$ elde edilir. $\{V_n^{(1)}(\Delta u)\}$ için elde edilen bu koşul ile Tauber teoreminin sonucundan $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ bulunur. Buradan, $V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olduğundan, $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. Dolayısıyla bu bir orijinal Tauber teoremidir ve yakınsaklık elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.2.1'de (2.1.1) limitinin mevcut olması koşulunu (3.1.3) limitinin varlığına indirgeyerek teoremin koşulu zayıflatılabilir.

Teorem 3.2.2 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun.* $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ *limiti mevcut ve* $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ *ılımlı salınımlı ise,*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$$

elde edilir.

İspat. $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan, $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ yavaş salınımlıdır. Buradan,

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) = n(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) - \sigma_{n-1}^{(2)}(\omega^{(1)}(u))) = O(1), n \to \infty$$

elde edilir.(3.1.3) limitinin varlığından ve $\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) = V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u))x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u))x^n = 0$$

bulunur. Littlewood (1910) un teoreminden, $\lim_n \sigma_n^{(2)}(\omega^{(1)}(u)) = 0$ olur. O halde,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) = n(V_n^{(2)}(\Delta u) - V_{n-1}^{(2)}(\Delta u)) = o(1), n \to \infty \qquad (3.2.3)$$

elde edilir. (3.1.3) limitinin varlığından $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}V_n^{(2)}(\Delta u)x^n = 0$ olduğu kolayca görülür. O zaman bu $\{V_n^{(2)}(\Delta u)\}$ dizisi için orijinal Tauber teoremidir ve

$V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$ olur. Böylelikle, (3.2.3) den

$$V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty \tag{3.2.4}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)$ yavaş salınımlı olmasından, $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisinin yavaş salınımlı olduğu görülür. Buradan (3.2.4) ve (2.1.8) kullanılarak, $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$ elde edilir.

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = n(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{n-1}^{(1)}(u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1),\ n \to \infty$$

eşitliğiyle orijinal Tauber teoremi sonucundan,

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$$

bulunur. ■

Teorem 3.2.2 nin ispatı, Teorem 3.2.1 kullanılarak da yapılabilir.

(2.1.1) limitinin varlığından $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığının elde edilebilmesi için koşul olarak birinci mertebeden kontrol modüloların tek taraflı sınırlı olması düşünülebilir.

Teorem 3.2.3 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi için (2.1.1) limiti mevcut olsun. Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için, $\omega_n^{(1)}(u) \geq -C$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat.

$$\omega_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(0)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = n\Delta u_n - V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$$

eşitsizliğinin her iki tarafının aritmetik ortalaması alındığında,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -C$$

elde edilir. (2.1.1) limitinin varlığından

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(0)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u))x^n=0$$

bulunur. Dolayısıyla Karamata'nın temel teoreminin sonucundan,

$$V_n^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(2)}(\Delta u)=n\Delta V_n^{(2)}(\Delta u)=o(1),\ n\to\infty$$

elde edilir. Böylece orijinal Tauber teoremininden, $V_n^{(2)}(\Delta u)=o(1), n\to\infty$ olduğu görülür. (2.1.1) limitinin varlığı, $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}V_n^{(2)}(\Delta u)x^n=0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $V_n^{(1)}(\Delta u)=o(1),\ n\to\infty$ elde edilmiş olur. Fakat $V_n^{(0)}(\Delta u)=o(1),\ n\to\infty$ olduğu gösterilmelidir. İspatın bu kısmında gerekli olan eşitlikler, $\lambda>1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_n^{(1)}(\Delta u)+\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u)-V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

ve $1<\lambda<2$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_{2n-[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)+\frac{n+1}{[\lambda n]-n}(V_n^{(1)}(\Delta u)-V_{2n-[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)) \\ &- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=2n-[\lambda n]+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(V_j^{(0)}(\Delta u)-V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

olarak verilir.

Her j pozitif tamsayısı için $-(V_j^{(0)}(\Delta u)-V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\leq\frac{C}{j}$ eşitsizliğini (3.2.5) de yerine yazarsak, $\lambda>1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &\leq V_n^{(1)}(\Delta u)+\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u))+\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\frac{C}{j} \\ &\leq V_n^{(1)}(\Delta u)+\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u))+C_1\sum_{k=n}^{[\lambda n]}\frac{1}{k} \\ &\leq V_n^{(1)}(\Delta u)+\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u)-V_n^{(1)}(\Delta u))+C_1\log\left(\frac{[\lambda n]}{n}\right) \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafının n'ye göre üst limitini alırsak,

$$\overline{\lim_n} V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \overline{\lim_n} V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\overline{\lim_n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) + C_1 \log\lambda$$

bulunur. $V_n^{(1)}(\Delta u)) = o(1)$, $n \to \infty$ olduğundan, eşitsizliğin sağındaki ilk iki terim sıfır olur. Böylece, $\overline{\lim_n} V_n^{(0)}(\Delta u) \leq C_1 \log\lambda$ elde edilir. Burada $\lambda \to 1^+$ giderken her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\overline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq 0 \tag{3.2.7}$$

olur. Benzer işlemler (3.2.6) eşitliğine uygulanırsa,

$$\underline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \geq 0 \tag{3.2.8}$$

bulunur. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitsizliklerinden, $\lim_n V_n^{(0)}(\Delta u) = 0$ elde edilir. O halde, $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir. ■

$V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ koşulunun varlığından $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olduğunu göstermek için Teorem 3.2.3 te kullanılan metot, uzun olsa bile, $\{u_n\}$, $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ veya bu dizileri kapsayan dizilerin tek taraflı sınırlı olma durumunda da geçerlidir. Ancak Teorem 3.2.3 in ispatı Hardy-Littlewood teoremi kullanılarak çok kısa verilebilir:
(2.1.1) limitinin varlığından $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = 0$ elde edilir. Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için, $n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ olduğundan Hardy-Littlewood teoreminden $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. Bu da orijinal Tauber koşuludur ve $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığını elde etmeyi sağlar.

Teorem 3.2.3 te (2.1.1) limitinin mevcut olması daha da zayıflatılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi için, (3.1.3) limiti mevcut olsun.*

Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için, $\omega_n^{(1)}(u) \geq -C$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ *dir.*

Teorem 3.2.4 ün ispatı Teorem 3.2.3 te kullanılan teknikle benzer şekilde yapılabilir. İspatın ayrıntıları için Dik (2002b) e bakılabilir.

Yukarıda verilen teoremde $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ dizisinin ılımlı salınımlı olma şartı bazı güçlü koşullarla yer değiştirirse aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir:

Sonuç 3.2.1 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi için,* $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ *limiti mevcut olsun. $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ yavaş salınımlı ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi için,* $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ *limiti mevcut olsun.* $\omega_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty$ *ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde edilir.

Şimdi $m \geq 0$ tamsayı olmak üzere $\{\sigma_n^{(m)}(u)\}$ dizisi için genelleştirilmiş Tauber teoremleri verilerek bölüm bitirilecektir.

Teorem 3.2.5 *$\{u_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve $m \geq 0$ pozitif tamsayısı için*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(m+1)}(u)x^n \tag{3.2.9}$$

mevcut olsun. $\{V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(m)}(u)) - V_n^{(1)}(\Delta\sigma^{(m)}(u))\}$ *ılımlı salınımlı ise*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(m)}(u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(m+1)}(u)x^n$$

olur.

İspat. $\sigma_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(m+1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(m)}(u)) = V_n^{(m)}(\Delta u)$ olduğundan,

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(m)}(u)) - V_n^{(1)}(\Delta\sigma^{(m)}(u)) = V_n^{(m)}(\Delta u) - V_n^{(m+1)}(\Delta u)$$

elde edilir. $\{V_n^{(m)}(\Delta u) - V_n^{(m+1)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan aritmetik ortalamaları olan $\{V_n^{(m+1)}(\Delta u) - V_n^{(m+2)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlıdır ve

$$\begin{aligned}(V_n^{(m)}(\Delta u) &- V_n^{(m+1)}(\Delta u)) - \sigma_n^{(1)}(V^{(m)}(\Delta u) \\ &- V^{(m+1)}(\Delta u)) = O(1), n\to\infty \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(V_n^{(m+1)}(\Delta u) &- V_n^{(m+2)}(\Delta u)) - \sigma_n^{(1)}(V^{(m+1)}(\Delta u) \\ &- V^{(m+2)}(\Delta u)) = O(1), n\to\infty \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olduğu kolayca görülür. (3.2.9) eşitliğinden,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(m+1)}(\Delta u) - V_n^{(m+2)}(\Delta u))x^n = 0$$

elde edilir. (3.2.11) den negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için,

$$n\Delta\sigma_n^{(1)}(V^{(m+1)}(\Delta u) - V^{(m+2)}(\Delta u)) \geq -C$$

bulunur. Karamata'nın temel teoreminin sonucu uygulanırsa,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\Delta\sigma_k^{(1)}(V^{(m+1)}(\Delta u) - V^{(m+2)}(\Delta u)) = o(1), n\to\infty$$

olur. Bu bir orijinal Tauber koşuludur. Dolayısıyla,

$$\sigma_n^{(1)}(V^{(m+1)}(\Delta u) - V^{(m+2)}(\Delta u)) = o(1), n\to\infty$$

elde edilir. Bu durumda $\{V_n^{(m+1)}(\Delta u) - V_n^{(m+2)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlı olduğundan,

$$V_n^{(m+1)}(\Delta u) - V_n^{(m+2)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(m+2)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty \qquad (3.2.12)$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(m+1)}(\Delta u) x^n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(m+2)}(\Delta u) x^n = 0$$

olur ve orijinal Tauber teoreminin sonucundan,

$$V_n^{(m+2)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty \qquad (3.2.13)$$

olduğu görülür. (3.2.12) eşitliğinden, $V_n^{(m+1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. $\{V_n^{(m)}(\Delta u) - V_n^{(m+1)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan (3.2.10), (3.2.12) ve (3.2.13) den, $V_n^{(m)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ ve $\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(m)}(\Delta u) x^n = 0$ bulunur. Buradan, $\sigma_n^{(m)}(u) - \sigma_n^{(m+1)}(u) = V_n^{(m)}(\Delta u)$ olması,

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m)}(u) x^n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m+1)}(u) x^n$$

eşitliğini gerektirir.■

Teorem 3.2.5 te verilen koşulu daha da zayıflatarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi ve* $m \geq 0$ *pozitif tamsayısı için*

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m+1)}(u) x^n$$

mevcut olsun. $\{n\Delta\sigma_n^{(m)}(u) - V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(m)}(u))\}$ *ılımlı salınımlı ise*

$$\lim_n \sigma_n^{(m)}(u) = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m+1)}(u) x^n$$

olur.

Teoremin ispatı için Dik (2002b) e bakılabilir.

Bölüm 4

ALT DİZİSEL TAUBER TEORİSİ

4.1 Alt Dizisel Yakınsaklığın Tanıtımı

İkinci bölümde, $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığını elde etmek için (2.1.1) limitinin mevcut olmasına ek olarak $\{u_n\}$ üzerinde koşullar eklemeye ihtiyaç duyulmuştu. Fakat (2.1.1) limitinin varlığından $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığı sonucunun mümkün olmadığı bazı daha genel koşullar vardır. Bu tarz Tauber teoremlerinin temel örnekleri için Stanojević et al. (1997), Çanak (1998b), Çanak (1998a) ve Stanojević (1999b) e bakılabilir. Bu bölümde aşağıdaki iki soruyla ilgilenecektir:
(i) $\{u_n\}$ dizisinin ıraksaklığının türü hakkında ne söylenebilir?
(ii)$\{u_n\}$ nin yapısının, $\{u_n\}$ nin ıraksaklığının davranışıyla bağlantısı nasıldır?

Bölüm 3'te ana hedef **(i)** ve **(ii)** de tanımlanan Tauber problemlerini çözmek olacaktır.

(2.1.1) limitini sağlayan $\{u_n\}$ dizisi için $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ koşulu yakınsaklık için yeterli olmamasına rağmen, bu koşula

$$\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_{n-1}^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

koşulu eklenirse, $\{u_n\}$ nin alt dizisel davranışları hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Gerçekten, $\{u_n\}$ reel sayı dizisi olmak üzere, $V_n^{(0)}(\Delta u) = u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty$ olduğundan, negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = n(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{n-1}^{(1)}(u)) \geq -C$$

elde edilir. (2.1.1) limitinin varlığından, $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ limiti de mevcuttur ve Karamata'nın temel teoreminin sonucu uygulandığında,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k(\sigma_k^{(1)}(u) - \sigma_{k-1}^{(1)}(u)) = o(1), n \to \infty$$

bulunur. Bu orijinal Tauber koşuludur. Böylece,

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde edilir. Sonuçta, $u_n = O(1), n \to \infty$ elde edilir. $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ olması $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ olmasını gerektirir. $u_n = O(1), n \to \infty$ ve $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ ise $\{u_n\}$ nin tüm yığılma noktalarının $(\underline{\lim}_n u_n, \overline{\lim}_n u_n)$ aralığındadır. İspat için Dik (2002a) e bakılabilir. Bu, her $z \in (\underline{\lim}_n u_n, \overline{\lim}_n u_n)$ için $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ olacak şekilde $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(z)}\}$ alt dizisinin varlığını gösterir.

Yakınsak olmayan her sınırlı dizinin bir yakınsak alt dizisi olduğu açıktır. Dolayısıyla $\{u_n\}$ sınırlı dizisi için, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ koşulu altında $\{u_n\}$ yakınsak olmasa bile en az bir yakınsak alt dizisi vardır. O halde doğal olarak "$\{u_n\}$ dizisi hangi koşullar altında sınırlıdır?" sorusu sorulmalıdır. Örneğin, $\{u_n\}$ dizisi için $V_n^{(0)}(\Delta u) = u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty$ olmasının $u_n = O(1), n \to \infty$ olmasını gerektirdiği biliniyor. Ilımlı salınımlılık tanımı hatırlanırsa, $u_n = O(1), n \to \infty$ ise $\{u_n\}$ nin ılımlı salınımlı olduğu kolayca görülür. O halde $\{u_n\}$ ılımlı salınımlı ise $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ yakınsak ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ olduğundan $u_n = O(1), n \to \infty$ bulunur. Ayrıca

$\{u_n\}$ nin sınırlılığını elde etmek için $\{u_n\}$ dizisinin ılımlı salınımlı alınmasının yanı sıra daha genel hali olan $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı alınması da yeterlidir.

Çanak (1998a) ın teoreminin aşağıda verilen genelleştirilmesi, daha sonra verilecek olan teoremler ve sonuçlar için gereklidir.

Teorem 4.1.1 *$\{u_n\}$ reel sayıların dizisi için,*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

limiti mevcut olsun. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı ve $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n\to\infty$ ise bir I aralığındaki her $z\in I$ için $\{u_n\}$ dizisinin z'ye yakınsayan bir $\{u_{n(z)}\}$ alt dizisi vardır.

İspat. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n\to\infty \tag{4.1.1}$$

ve

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) = O(1), n\to\infty \tag{4.1.2}$$

bulunur. Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C\geq 0$ için,

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) \geq -C \tag{4.1.3}$$

elde edilir. (3.1.3) limitinin varlığından,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u))x^n = 0 \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Karamata'nın temel teoreminin sonucu kullanılarak, (4.1.3) ve (4.1.4) ten,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k(V_k^{(2)}(\Delta u) - V_{k-1}^{(2)}(\Delta u)) = o(1), n\to\infty$$

olur. Bu orijinal Tauber koşuludur, böylece $V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ bulunur. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan $\{V_n^{(1)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlıdır ve $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(1)}(\Delta u) &= V_n^{(2)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(2)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)) \\ &- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(1)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(1)}(\Delta u)) \end{aligned}$$

eşitliğinden $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. Sonuç olarak, $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$, $n \to \infty$ olur.

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = n(\sigma_n^{(2)}(u) - \sigma_{n-1}^{(2)}(u)) = V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty \quad (4.1.5)$$

olduğu görüldükten sonra, (3.1.3) limitinin mevcut olması $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(2)}(u)x^n$ varlığını gerektirir. O halde orijinal Tauber teoreminin sonucundan, $\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ elde edilir. Böylece (4.1.5) eşitliğinden

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$$

bulunur. Sonuç olarak, $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty$ olduğundan $u_n = O(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ hipotezinden $\Delta u_n = o(1)$, $n \to \infty$ olduğu görülür. Daha önce ispatlandığı gibi, $u_n = O(1)$, $n \to \infty$ ve $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ olması, $(\underline{\lim}_n u_n, \overline{\lim}_n u_n)$ aralığındaki her noktanın $\{u_n\}$ nin yığılma noktası olmasını gerektirir. Bundan dolayı, $z \in (\underline{\lim}_n u_n, \overline{\lim}_n u_n)$ için $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ olacak şekilde $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(z)}\}$ alt dizisi vardır.

Burada,"$\{u_n\}$ nin alt dizisi hakkında bazı bilgiler elde etmek, sınırsız diziler içinde mümkün müdür?" veya diğer bir deyişle, "sınırsız dizilerin alt dizileri ile ilgili bilgiler bulunabilir mi?" diye sorulabilir. Bu soruya cevap aşağıdaki gibi düşünülerek verilebilir:

$\{u_n\}$ yavaş salınımlı ve sınırsız bir dizi olsun. $\{u_n\}$ dizisi yavaş salınımlı olduğundan $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizisi de yavaş salınımlıdır ve $\{u_n - \sigma_n^{(1)}(u)\}$ sınırlı dizidir.

(2.1.3) te verilen Kronecker eşitliğinden $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlıdır. Dolayısıyla, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olur. Böylece $\Delta(u_n - \sigma_n^{(1)}(u)) = o(1), n \to \infty$ elde edilir. O halde, I aralığındaki her $z \in I$ için $\lim_{n(z)}(u_{n(z)} - \sigma_{n(z)}^{(1)}(u)) = z$ olacak şekilde $\{u_n - \sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizisinin $\{u_{n(z)} - \sigma_{n(z)}^{(1)}(u)\}$ alt dizisi vardır. Buradan görülüyor ki, dizinin yavaş salınımlılığını bilmek, dizi ile aritmetik ortalamaları arasındaki farkın davranışları hakkında alt dizisel bilgiye sahip olmak demektir.

Şimdiki teoremde $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisinin alt dizisel bilgisini gerektiren başka bir koşul verilecektir.

Teorem 4.1.2 $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ *reel sayıların bir dizisi ve* $\lim_n V_n^{(1)}(\Delta u)$ *mevcut olsun.* $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ *ve* $\lambda > 1$ *için*

$$\overline{\lim_n}\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}\Delta V_j^{(0)}(\Delta u)\right| < \infty \tag{4.1.6}$$

ise bir I aralığındaki her $z \in I$ *için* $\lim_{n(z)} V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u) = z$ *olacak şekilde* $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ *dizisinin bir* $\{V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u)\}$ *alt dizisi mevcuttur.*

İspat. (3.2.5) eşitliğinden $\lambda > 1$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &\le V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &+ \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\left|V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)\right| \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafının n'ye göre üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} V_n^{(0)}(\Delta u) &\le \overline{\lim_n} V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\overline{\lim_n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &+ \overline{\lim_n}\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\left|\sum_{j=n+1}^{k}(V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u))\right| \end{aligned}$$

olur. $\lim_n V_n^{(1)}(\Delta u)$ mevcut olduğundan, eşitsizliğin sağındaki ikinci terim sıfır olur ve dolayısıyla,

$$\overline{\lim_n} V_n^{(0)}(\Delta u) \quad \leq \quad \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) + \overline{\lim_n} \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right|$$

olur. Böylece,

$$K = \overline{\lim_n} \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| < \infty$$

yazılırsa,

$$\overline{\lim_n} V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) + K$$

elde edilir. (3.2.6) eşitliğinden,

$1 < \lambda < 2$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) \quad &\geq \quad V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1} (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &- \quad \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} (V_j^{(0)}(\Delta u) - V_{j-1}^{(0)}(\Delta u)) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafının n'ye göre alt limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \quad &\geq \quad \underline{\lim}_n V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - \frac{1}{\lambda-1} \underline{\lim}_n (V_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &+ \quad \underline{\lim}_n \left(- \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_n V_n^{(1)}(\Delta u)$ mevcut olduğundan eşitsizliğin sağındaki ikinci terim sıfır olur ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \quad &\geq \quad \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) + \underline{\lim}_n \left(- \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| \right) \\ &\geq \quad \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) - \overline{\lim}_n \left(- \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$M = \overline{\lim}_n \left(\frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \left| \sum_{j=k+1}^{n} \Delta V_j^{(0)}(\Delta u) \right| \right) < \infty$$

yazılırsa,

$$\underline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \geq \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) - M$$

olur. Sonuç olarak,

$$\lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) - M \leq \underline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \overline{\lim}_n V_n^{(0)}(\Delta u) \leq \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) + K$$

elde edilir. Bu ise $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ olması demektir. $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ olduğundan I aralığındaki her $z \in I$ için $\lim_{n(z)} V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u) = z$ olacak şekilde $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisinin $\{V_{n(z)}^{(0)}(\Delta u)\}$ alt dizisi mevcuttur. ■

Bu teoremin genelleştirmesi olarak, (3.1.3) limitinin varlığı varsayılarak, $\{u_n\}$ dizisinin alt dizisel bilgileri elde edilir.

4.2 Kontrol Modüloları Ilımlı Salınımlı Olan Diziler İçin Alt Dizisel Tauber Teoremleri

Önceki kısımda, $\{u_n\}$ dizisinin salınım davranışlarının koşullarını zayıflatarak, (2.1.1) limitinin varlığından yakınsaklığı gerektirmeyen yeni yaklaşımlar üzerinde durulmuştu. Bu koşullarla $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığı sağlanmasa da, dizinin yapısı üzerinde daha derin bilgiler elde edilir. Örneğin, $\{u_n\}$ reel sayı dizisi, $u_n = O(1), n \to \infty$ ve $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ koşullarını gerçeklerse herhangi bir $z \in (\underline{\lim}_n u_n, \overline{\lim}_n u_n)$ için $\lim_{n(z)} u_{n(z)} = z$ olacak şekilde $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(z)}\}$ alt dizisinin varlığı gösterildi. Sonra, $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ koşuluyla birlikte,

(i) $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$,

(ii) $\{u_n\}$ ılımlı salınımlı,

(iii) $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olması bazı alt dizisel yakınsaklık bilgileri gerektirdiği gözlemlendi. Yani (i), (ii), (iii) ile (2.1.1) limitinin varlığından $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(z)}\}$ alt dizisi olduğunu ve $\lim_{n(z)} u_{n(z)}$ mevcut olduğunu göstermek çok zor değildir.

Yukarıdaki verilen örnek ve diğer sonuçlar ile Stanojević (1999a) de verilen yeni alt dizisel bilgiler verilebilir.

Tanım 4.2.1 $\{u_n\}$ *reel sayıların bir dizisi olsun.* $\{u_n\}$ *dizisinin tüm yığılma noktaları* $I(u)$ *da olmak üzere sonlu bir* $I(u)$ *aralığı mevcut ve* $I(u)$ *aralığının her noktası* $\{u_n\}$ *dizisinin bir yığılma noktası ise* $\{u_n\}$ *dizisine alt dizisel yakınsak dizi denir.*

Tanımdan, alt dizisel yakınsaklığın dizinin sınırlılığını gerektirdiği açıkça görülür. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, $\{u_n\} = \{(-1)^n\}$ dizisi sınırlıdır ama alt dizisel yakınsamaz. Yani sınırlı diziler alt dizisel yakınsak olmak zorunda değildir. Çünkü sınırlılık, alt dizisel yakınsaklık için gerek şarttır. Önceden de görüldüğü gibi, $\{u_n\}$ nin yakınsaklığı veya alt dizisel yakınsaklığı için gerekli koşullar $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ nin veya dizinin kontrol modülosu olan $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n$ nin mertebesinin büyüklüğüne dayanmaktadır. Örneğin, 2. Bölüm'de tanıtılan 1. mertebeden kontrol modülo olan ve

$$\omega_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(0)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(u)) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = \omega_n^{(0)}(V^{(0)}(\Delta u))$$

eşitliğiyle verilen $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ dizisinin ılımlı salınımlı olması ve (3.1.3) limitinin mevcut olması ile Teorem 3.2.2 de yakınsaklık elde edilmişti. Fakat burada $\{\omega_n^{(1)}(u)\}$ dizisinin ılımlı salınımlı olması koşulu $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ dizisinin ılımlı salınımlı olmasıyla yer değiştirirse (2.1.1) limitinini varlığından $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığı elde edilemez. Ancak $\{u_n\}$ dizisi hakkında alt dizisel bilgiye sahip olunabilir.

Teorem 4.2.1 *$\{u_n\}$ reel sayı dizisi için, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ ve (3.1.3) limiti mevcut olsun.*

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = O(1), n \to \infty \tag{4.2.1}$$

ise $\{u_n\}$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.

İspat. (4.2.1) den

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty \tag{4.2.2}$$

elde edilir. (3.1.3) limitinin varlığı,

$$\lim_{x \to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\Delta u)x^n = \lim_{x \to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u))x^n = 0 \tag{4.2.3}$$

olmasını gerektirir. Buradan Littlewood teoremi uygulanırsa (4.2.2) ve (4.2.3) den $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ bulunur. Böylece,

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty \tag{4.2.4}$$

yani,

$$n\Delta\sigma_n^{(2)}(u) = o(1), n \to \infty \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (3.1.3) limitinin varlığı,

$$\lim_{x \to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(2)}(u)x^n \tag{4.2.6}$$

limitinin varlığını gerektirir. Orijinal tauber teoreminin sonucu uygulanırsa, (4.2.5) ve (4.2.6) den,

$$\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x \to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(2)}(u)x^n$$

bulunur. (4.2.4) eşitliğiyle

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x \to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde edilir. $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olduğundan (4.2.2) den $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$, $n \to \infty$ bulunur. Sonuç olarak, Kronecker eşitliğinden $u_n = O(1), n \to \infty$ elde edilir. O halde, $\Delta u_n = o(1), n \to \infty$ ve $u_n = O(1), n \to \infty$ olduğundan $\{u_n\}$ dizisinin alt dizisel yakınsaklığı kolayca görülür. ■

Şimdi verilecek teorem, Teorem 4.2.1 in daha genel halidir.

Teorem 4.2.2 *$\{u_n\}$ reel sayı dizisi için, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ ve (3.1.3) limiti mevcut olsun. $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\}$ ılımlı salınımlı ise $\{u_n\}$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.*

İspat. $\{\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u))\} = \{V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan, $\{V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlıdır. Aynı zamanda,

$$V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) - (V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u)) = O(1), n \to \infty \tag{4.2.7}$$

ve

$$V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) - (V_n^{(2)}(\Delta u) - V_n^{(3)}(\Delta u)) = O(1), n \to \infty \tag{4.2.8}$$

olur. Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için,

$$n\Delta(V_n^{(2)}(\Delta u) - V_n^{(3)}(\Delta u)) \geq -C \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1.3) limitinin varlığı,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\Delta u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u))x^n = 0 \tag{4.2.10}$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(2)}(\Delta u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(3)}(\Delta u)x^n = 0 \tag{4.2.11}$$

olmasını gerektirir. Karamata'nın temel teoreminin sonucu uygulandığında, (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) den,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\Delta(V_k^{(2)}(\Delta u) - V_k^{(3)}(\Delta u)) = o(1), n \to \infty$$

bulunur. Bu orijinal Tauber koşuludur. Böylece,

$$V_n^{(2)}(\Delta u) - V_n^{(3)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. (4.2.8) den, $V_n^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(2)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ olur. Sonuçta (4.2.7) den, $V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.2.1 in ispatı gibi yapılabilir. ■

Bu teoremde $\{V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)\}$ dizisi ılımlı salınımlı değilde yavaş salınımlı olarak alınsaydı yakınsaklık elde edilirdi. İspat için Dik (2002b) e bakılabilir.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 de, koşullar $\sigma_n^{(1)}(\omega^{(1)}(u)) = n\Delta V_n^{(1)}(\Delta u)$ üzerine konulmuştu. Şimdiki teoremde $\{u_n\}$ nin salınım davranışlarının kontrol modülosu olarak $\{n\Delta V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))\}$ dizisi kullanılacaktır.

Teorem 4.2.3 *$\{u_n\}$ reel sayı dizisi için, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ ve (2.1.1) limiti mevcut olsun. $\{V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))\}$ ılımlı salınımlı ise $\{u_n\}$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.*

İspat. $\{V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))\}$ ılımlı salınımlı olduğundan, $\{V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))\}$ yavaş salınımlıdır ve

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) &- [V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))] \\ &= O(1),\ n \to \infty \qquad (4.2.12) \end{aligned}$$

olur. Yani, negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) \quad &- \quad [V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))] \\ &\geq \quad -C \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

olur. (2.1.1) limitinin varlığından,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(u_n - \sigma_n^{(1)}(u))x^n = 0$$

ve $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\Delta u)x^n = 0$ elde edilir. Böylece,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u))x^n = 0$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)))x^n = 0 \tag{4.2.14}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)))x^n = 0 \tag{4.2.15}$$

bulunur. (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) ten Karamata'nın temel teoreminin sonucu uygulanırsa,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\Delta(V_k^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_k^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u))) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. Bu bir orijinal Tauber koşuludur. Böylece,

$$V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(2)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = o(1), n \to \infty$$

olduğu görülür. (4.2.12) den,

$$V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = O(1), n \to \infty \tag{4.2.16}$$

bulunur ve buradan, negatif olmayan n tamsayıları ve bir $C \geq 0$ için,

$$V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) \geq -C \tag{4.2.17}$$

olur. (4.2.14) ve (4.2.17) den Karamata'nın temel teoremi yeniden uygulanırsa,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\Delta(V_k^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. Bu da bir orijinal Tauber koşuludur. Böylece,

$$V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. (4.2.16) dan $V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty$ bulunur. İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 4.2.1'in ispatı gibi yapılır. ■

Teorem 4.2.3'te $V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = O(1), n \to \infty$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1 *$\{u_n\}$ reel sayı dizisi için, $\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$ ve (2.1.1) limiti mevcut olsun. $V_n^{(0)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) - V_n^{(1)}(\Delta V^{(0)}(\Delta u)) = O(1), n \to \infty$ ise $\{u_n\}$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.*

ÖZET

Klasik Tauber teorisinin temel amaçlarından biri, Abel'in gerek koşulu ya da genelleştirilmesi olarak bilinen limitin varlığından ve salınım davranışlarını kontrol eden ek koşullar ile ıraksaklığı kontrol edilebilen dizilerin yakınsaklığının yeniden elde edilmesidir. Bu koşullara Tauber koşulları ve bu tip teoremlere de Tauber teoremleri denir. Stanojević (1998) tarafından tanıtılan tamsayı mertebeli kontrol modülolar ile klasik Tauber teoremleri özetlenecektir. Tauber (1897) dizinin klasik kontrol modülosu sıfır dizisi ise Abel'in gerek koşulundan yakınsaklığın elde edildiğini ispatlamıştır. Littlewood (1910), Tauber'in koşulunun dizinin klasik kontrol modülosunun sınırlılığı ile değiştirebildiğini göstermiştir. Sonra, Schmidt (1925) yavaş salınımlı dizileri tanıtmış ve genelleştirilmiş Littlewood teoremi olarak bilinen daha genel teoremi ispatlamıştır. Karamata (1930) tarafından verilen teorem önceki klasik Tauber teoremlerinin ispatlarını basitleştirmiş ve dizilerin salınım davranışlarının kontrol modülolarını içeren bazı Tauber teoremlerinin yeniden elde edilebildiğini göstermiştir. Dik (2002b), Karamata'nın temel teoremini kullanarak ve Stanojević (1999a) tarafından tanımlanan ılımlı salınımlı dizi tanımından yararlanarak bir Tauber koşulu olarak dizinin yüksek mertebeden kontrol modülosunu içeren çeşitli teoremler ispatlamıştır. Dik (2002a), Abel'in gerek koşulunun varlığından dizinin yakınsaklığının bulunamadığı bazı koşulların varlığını vurgulamıştır. Bu alt dizisel Tauber teorisi olarak adlandırılan farklı bir Tauber teorisi çeşidine yönlendirmiştir.

SUMMARY

One of the main objectives of the classical Tauberian theory is to recover convergence of sequences, whose divergence is manageable, out of the existence of certain limits, which is known as Abel's necessary conditions or its generalizations, and certain additional conditions that control the oscillatory behavior. These conditions are called Tauberian conditions and this type of theorems are called Tauberian theorems. In terms of the control modulo of oscillatory behavior of integer order, introduced by Stanojević (1998), we now summarize the classical results. Tauber (1897) proved that if the classical control modulo of a sequence is a null sequence, then one obtains convergence of sequence out of its Abel's necessary condition. Littlewood (1910) showed that Tauber's condition can be replaced by the boundedness of the classical control modulo of a sequence. Later, Schmidt (1925) introduced the slowly oscillating sequences and proved the more general theorem, which is known as the generalized Littlewood theorem. The theorem given by Karamata (1930) simplified the proofs of the early classical Tauberian theorems and provided viewpoint to obtain some Tauberian theorems that was given in terms of control modulo of oscillatory behavior of a sequence. Using the Karamata's Hauptsatz and employing the definition of moderately oscillating sequences defined by Stanojević (1999a), Dik (2002b) proved several theorems that admitted the higher order control modulo of a sequence as a Tauberian condition. Dik (2002a) pointed out that there were some conditions that we could not infer convergence of a sequence out of the existence of Abel's necessary condition. This motivated a different kind of Tauberian theory, so called subsequential Tauberian theory.

Teşekkür

Danışman hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇANAK'a, yüksek lisans tezimi yönetirken göstermiş olduğu sabrından, yardımından ve beni cesaretlendirmesinden dolayı; bölüm başkanım Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a, yüksek lisans öğrenciliğim süresince yaptığı rehberlikten ve gösterdiği destekten dolayı; Yrd. Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na yardımlarından dolayı; Araş. Gör. Korhan GÜNEL'e, Araş. Gör. Yılmaz ERDEM'e ve Araş. Gör. Enes YILMAZ'a hep yanımda oldukları için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca aileme göstermiş oldukları sevgi, güven, anlayış ve değer biçilemez desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Araştırma Fon Saymanlığınca FEF-05004 nolu proje ile desteklenmiştir.

Kaynaklar

Çanak İ. (1998a), Tauberian teorems for generalized abelian summability methods. *Math. Morav.*, 2, 21–66.

Çanak İ. (1998b), *Tauberian Theorems for Generalized Abelian Summability Methods*. Doctoral dissertation, University of Missouri-Rolla.

Dik F. (2002a), *Tauberian Teorems for Convergence and Subsequential Convergence of Sequences with Controlled Oscillatory Behavior*. Doctoral dissertation, University of Missouri-Rolla.

Dik M. (2002b), *Tauberian Theorems for Sequences with Moderately oscillatory Control Moduli*. Doctoral dissertation, University of Missouri- Rolla.

Hardy G.H. (1949), *Divergent Series*. Oxford University Press.

Hardy G.H. & Littlewood J.E. (1914), Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coeffients are positive. *Proc. London. Math 13*, 174–191.

Karamata J. (1930), Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Math. Z.*, 32, 319–320.

Korevaar J. (2004), *Tauberian Theory*. Springer-Verlag.

Landau E. (1910), Über die Bedeutung einiger neuerer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. *Prace Mat. Fiz.*, 21, 97–177.

Littlewood J.E. (1910), The converse of Abel's theorem on power series. *Proc. London Math. Soc. 9*, 2, 434–448.

Postnikov A.G. (1980), Tauberian theory and its applications. *A translation of Trudy Mat. Inst. Steklov*, 144(1979). *Proc. Steklov Inst. Math.* no.2

Schmidt R. (1924), Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. *Math. Z.*, 22(89-152).

Szász O. (1928), Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen. *J. Lond. Math. Soc.*, 3, 254–262.

Szász O. (1944), Introduction to the theory of divergent series. University of Cincinnati.

Stanojević Č. V. (1998), Analysis of divergence: Control and management of divergent process. *Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by İ. Çanak, University of Missouri-Rolla*. Fall 1998.

Stanojević Č. V.(1999a), Analysis of divergence: Applications to the Tauberian theory. *Graduate Research Seminar, University of Misouri- Rolla* . Winter 1999.

Stanojević Č. V. (1999b), Analysis of divergence: Beyond the classical Tauberian theories. *Graduate Research Seminar, University of Misouri- Rolla* . Fall 1999.

Stanojević Č. V., Çanak İ. & Stanojević V.B. (1997), Tauberian theorems for generalized Abelian summability methods. *Analysis of Divergence: Control and Manegement of Divergent Process, Proceeding of the 7th International Workshop in Analysis and Applications,(Orono, ME,1997)*(W.O. Bray and Č. V. Stanojević, eds.), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Massachusetts, 1999, 13-26.

Tauber A. (1897), Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatsh. Math. Phys.*, 8, 273–277.

Özgeçmiş

1978 yılında İzmir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir'de tamamladı. 1999 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Ağırlıklı lisans programından mezun oldu. 1999 yılından 2002 yılına kadar çeşitli özel kuruluşlarda matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2002 yılında Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu göreve devam etmektedir.