

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAT-YL-2006-0001

ZAMAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ VE
UYGULAMALARI

HAZIRLAYAN: Korhan GÜNEL

DANIŞMAN: Yrd.Doç.Dr. Ali FİLİZ

AYDIN-2006

ÖZ

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hakkında bugüne kadar yapılan çalışmaların derlemesi olan bu çalışmada aşağıdaki yol izlenmiştir:

I. Bölümde, gecikmeli diferansiyel denklemler hakkında genel bilgi verilmiş ve özetle uygulama alanlarına değinilmiştir. Ayrıca gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için günümüze kadar geliştirilen yazılımlar kısaca tanıtılmıştır.

II. Bölümde, gecikmeli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için literatürde geçen metotlar verilmiştir. Aynı zamanda gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri ile gecikme terimi içeren integro-diferansiyel denklemler ele alınmıştır.

III. Bölümde, gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri tartışılmıştır.

IV. Bölümde, lineer tipteki gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kararlılık analizi üzerinde durulmuştur. In't Hout interpolasyonu ile 4. mertebeden Runge-Kutta metodunun kararlılık analizi Schur kararlılık polinomu kullanılarak yapılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Gecikmeli diferansiyel denklem, Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem, Euler yöntemleri, Trapez yöntemi, Runge-Kutta yöntemleri, θ -yöntemi, asimptotik kararlılık.

ABSTRACT

In this work, which is aimed to collect the works about numerical solutions of delay differential equations, which are called DDE shortly, the following steps were taken:

In Chapter I, DDEs are introduced and the application area of them have been given. Also, the software, which solve the DDEs numerically, have been summarized.

Chapter II describes some of the methods for the analytical solution of a DDE, in literature. The system of DDEs and the integro-differential equations with delay were also introduced.

Chapter III summarizes the methods for numerical solutions of DDEs.

Chapter IV deals with the stability analysis of numerical methods for the solutions of DDEs. The stability of 4th order Runge Kutta method with In't Hout interpolation is analyzed using Schur polynomials.

KEY WORDS: DDE, Delay differential equation, Volterra integro-differential equations with delay, Euler methods, trapezoidal rule, the θ -method, Runge-Kutta type methods, asymptotic stability.

İçindekiler

Öz	ii
Abstract	iii
Şekiller Listesi	viii
Çizelgeler Listesi	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler ile Modelleme	1
1.2 Konu ile İlgili Önceki Çalışmalar ve Bazı Uygulama Alanları . . .	3
1.2.1 Karışım Problemi	4
1.2.2 Popülasyon Dinamiği	6
1.2.3 Tıp	10

1.2.4	Kontrol Sistemleri	12
1.2.5	Elektrodinamik	14
1.3	Gecikmeli Diferansiyel Denklem Teorisinin Adi Diferansiyel Denklemlerden Olan Farklılıkları	16

2 GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM- LERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ 19

2.1	Varlık ve Teklik	19
2.2	Lineer Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri . .	22
2.2.1	Belmann'ın Adımlar Yöntemi ile Çözüm	22
2.2.2	Laplace Transformu ile Çözümün Bulunması	24
2.2.3	Lambert W Fonksiyonu ile Çözümün Bulunması	28
2.3	Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemleri	30
2.4	Integro-diferansiyel Denklemler	34

3 GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM- LERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ 38

3.1	Euler Metodu	40
-----	------------------------	----

3.2	Trapez Yöntemi	42
3.3	Runge-Kutta Yöntemleri	44
3.3.1	RK4 Metodu	48
3.4	Gecikme Terimi İçeren İntegro-diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri	51
4	GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM- LER İÇİN KARARLILIK ANALİZİ	55
4.1	Açık Euler Yöntemi için Kararlılık Analizi	60
4.2	Kapalı Euler Yöntemi için Kararlılık Analizi	64
4.3	Trapez Yöntemi için Kararlılık Analizi	66
4.4	Runge-Kutta Yöntemleri için Kararlılık Analizi	69
	Özet	82
	Summary	83
	Teşekkür	84
	Kaynakça	84

Şekiller Listesi

1.1	(a) $y(t) = 0.1$ ve (b) $y(t) = 2$ ve $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ için (1.2.5) denkleminin çözümleri	8
1.2	(a) $y(t) = 0.1$ ve (b) $y(t) = 2$ ve $\alpha \in \left[\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right]$ için (1.2.5) denkleminin çözümleri	8
1.3	$y(t) = 0.1$ ve $\alpha = 1.6$ için (1.2.5) denkleminin faz uzayı çözümü	8
1.4	Minorsky gemiler için yaptığı modelleme	13
1.5	İki elektronun birbirleri üzerindeki etkisi	14
2.1	$\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ için $s = \frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau)$ karakteristik denkleminin kökü	31
3.1	(a) $h = 0.1$ ve (b) $h = 0.05$ ve $t \in [0, 4]$ için (2.2.4) denkleminin Açık Euler yöntemi ile çözümleri	42
3.2	(a) $h = 0.1$ ve (b) $h = 0.05$ ve $t \in [0, 4]$ için (2.2.4) denkleminin Kapalı Euler yöntemi ile çözümleri	43

4.1	$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denkleminin kararlılık bölgesi.	59
4.2	$\tau = 1$ ve $m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Açık Euler yönteminin kararlılık bölgesi.	62
4.3	$\tau = 1$ ve $m = 2$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Açık Euler yönteminin kararlılık bölgesi.	63
4.4	$m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Kapalı Euler yönteminin kararlılık bölgesi.	65
4.5	$m = 2$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Kapalı Euler yönteminin kararlılık bölgesi.	65
4.6	$\tau = 1$ ve $m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Trapez yönteminin kararlılık bölgesi.	68
4.7	$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denklemi için Runge-Kutta yönteminin kararlılık grafiği.	72
4.8	$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denklemi için Runge-Kutta yönteminin kararlılık grafiği.	80

Çizelgeler Listesi

1.1	Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için mevcut programlar	5
3.1	Butcher Tablosu	45
3.2	Runge-Kutta 4 metodu için Butcher Tablosu	49
3.3	(2.2.4) Gecikmeli diferansiyel denkleminin nümerik çözümleri . . .	52
3.4	(2.2.4) Gecikmeli diferansiyel denkleminin Runge Kutta ile nümerik çözümleri	53
3.5	(3.4.3) denkleminin θ -metodu ile nümerik çözümünden kaynaklanan hatalar $ \tilde{y}_i - y_i $	54
4.1	Kapalı Euler metodu ile $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ için (4.0.1) denkleminin $\phi(t) = 1$ başlangıç fonksiyonu ile $0 \leq t \leq 4$ aralığındaki nümerik çözümleri.	66

4.2 $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ gecikmeli diferansiyel denkleminin RK4 yöntemi ile kararlı çözümleri için katsayı değerleri 81

Bölüm 1

GİRİŞ

1.1 Gecikmeli Diferansiyel Denklemler ile Modelleme

Günlük hayatta, her alanda karşılaştığımız problemlerin çözümü için matematiksel modelleme yapılırken, çoğunlukla

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

denklemi ile verilen başlangıç değer problemleri kullanılır. Burada (1.1.1) denklemi ile verilen başlangıç değer probleminde t_0 başlangıç noktası ve y_0 başlangıç değeri olarak verilir.

Örneğin, bir topluluktaki nüfus artış miktarını tahmin etmek istediğimizi varsayalım; öncelikle bu grubu her türlü dış etkiden uzak, izole bir kapalı kutu halinde düşünelim. $y(t)$, t zamanındaki nüfus miktarını veriyor olsun. Aynı zamanda büyüme hızının, o andaki belirlenecek mevcut nüfusa orantılı olduğunu

kabul edelim. Bu oranı k gibi bir sabit ile gösterelim. Bu durumda nüfus değişimini $y'(t)$ ile gösterecek olursak, sistemi

$$\begin{cases} y'(t) = k \cdot y(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

denklemini ile modelleyebiliriz.

Adi diferansiyel denklemler kullanılarak, modelleme yapılması istenen sistemlerde mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir, ancak sistemdeki çok küçük gecikme miktarları bile, sistemin mevcut durumda çok büyük değişiklikler görmesine neden olabilir. Bu nedenle karşılaşılan problemlerin bir çoğunun modellemesi yapılırken, gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir.

Nüfus artışı belirlemek için yaptığımız önceki modellemede, grubun sadece o anki mevcut nüfusla orantılı olduğunu kabul ettik. Ancak çoğu zaman sistemin daha önceki bir zamandaki durumu, sistemin gelecekteki durumunu büyük ölçüde etkiler. Sistemlerin geçmişteki durumlarını belirtmek için, gecikme miktarlarını kullanırız ve böylece modelleme yaparken sistemlerin geçmişe olan bağımlılıklarını da hesaba katmış oluruz. Bu durumda topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de, belirli bir süre (τ) önceki nüfus ile orantılı olduğunu kabul ettiğimizde

$$\begin{cases} y'(t) = k \cdot y(t - \tau), & t \geq t_0, \tau > 0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini elde ederiz.

Bu çalışmada, Bölüm I'de gecikmeli diferansiyel denklemlerin tanımı, adi diferansiyel denklemlerle aralarındaki farklılıklar verilecektir ve gecikmeli dife-

ransiyel denklemlerin uygulama alanları üzerinde durulacaktır. Bölüm II'de, nümerik çözümlere temel oluşturması amacıyla, öncelikle gecikmeli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için değişik yaklaşımlar üzerinde durulacaktır. Bu amaçla lineer gecikmeli diferansiyel denklemler ile gecikmeli Volterra-integro diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri incelenecektir. Bölüm III'de gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için mevcut yaklaşımlara değinilecek ve bu yaklaşımlar Matlab DDE23 programı kullanılarak test edilecektir. Bundan dolayı literatürde birer test denklemi olarak kullanılan,

$$\begin{cases} y'(t) = \mu \cdot y(t) + \alpha \cdot y(t - \tau), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad \varphi_0 > 0, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

ve

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha \cdot y(t - \tau) \cdot (\lambda + y(t)), & t \geq t_0, \quad \tau > 0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (1.1.3)$$

denklemleri üzerinde inceleme yapılacaktır. Bölüm IV'de gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılık analizi yapılacaktır.

1.2 Konu ile İlgili Önceki Çalışmalar ve Bazı Uygulama Alanları

Bu kısımda gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanıldığı fiziksel ve biyolojik sistemler üzerine örnekler vererek, neden gecikmeli diferansiyel denklem teorisine ihtiyaç duyulduğunu açıklamaya çalışacağız. Bunu yaparken de özellikle literatürde sıkça kullanılan örnekler üzerinde duracağız.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için pek çok yazılım gerçekleştirilmiştir (Paul, 1991, 1995, 2000; Shampine & Thompson, 2000a,b). Literatür incelendiğinde pek çok algoritmaya ulaşmak mümkündür, ancak programların tümünde özel bir teknik kullanılmıştır. Bilinen tüm nümerik teknikleri içinde barındıran ve fonksiyon türüne, başlangıç koşullarına ve gecikme miktarına göre en uygun tekniği seçen bir yazılım henüz mevcut değildir. Çizelge 1.1 de mevcut yazılımların bazılarının listesi gösterilmiştir.

1.2.1 Karışım Problemi

Gecikmeli diferansiyel denklemler üzerinde literatürde yapılacak araştırmalarda karşımıza ilk çıkacak problem, Driver (1964)'ın tuzlu su karışım problemidir.

İçinde B litre tuzlu su karışımı bulunan bir tank düşünelim. Tankın üstünden dakikada q litre saf su tanka boşaltılmaktadır. Karışım sürekli karıştırılıp, tankın altında bulunan bir musluktan, yine dakikada q litre olmak üzere dışarı akmaktadır. $y(t)$, t anında karışımındaki tuz miktarını (kg) olarak gösterebiliriz. Karıştırma işleminin sürekli ve tank içinde homojen bir biçimde gerçekleştiği kabul edilirse, tank içinde litre başına $\frac{y(t)}{B}$ kg oranında tuz bulunur.

Dakikada q litre karışım tanktan boşaltıldığına göre, belli bir t anında tank içindeki tuz miktarının değişimini

$$y'(t) = -q \frac{y(t)}{B},$$

diferansiyel denklemi ile modelleyebiliriz.

Ancak Driver'ın da belirttiği üzere, gerçekte karıştırma işlemi yapılırken

Çizelge 1.1: Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için mevcut programlar

Program Adı	Yazar	Açıklama
ARCHI	C. A. H. Paul	Hermite interpolasyonu ile 5. mertebeden RK yöntemi (Paul, 1995)
DDE23	L. F. Shampine ve S. Thompson	Hermite interpolasyonu ile RK2(3) yöntemi (Shampine & Thompson, 2000a,b)
DDE-STRIDE	Butcher	Neutral ve $\tau = \tau(t)$ tipindeki gecikme miktarı içeren gecikmeli diferansiyel denklemler için çalışır.
DDE-VERK	Enright ve Hayashi	Sürekli RK metodunu kullanarak $\tau = \tau(t)$ tipindeki gecikme miktarı içeren gecikmeli diferansiyel denklemler için çalışır.
DELH	Weiner ve Strehmel	Rosenbrock yöntemi ile sabit gecikmeli diferansiyel denklemler için çalışır.
DRLAG6	Corwin, Sarafyan ve Thompson	Implicit RK6 metodunu kullanarak $\tau = \tau(t)$ tipindeki gecikme miktarı içeren gecikmeli diferansiyel denklemler için çalışır.
RADAR5	Guglielmi ve Hairer	Radau metodunu kullanır ve neutral tipteki gecikmeli diferansiyel denklemler için çalışır.

depo içinde her yerde tuz oranının sabit olamayacağı, yani homojen bir dağılımın asla mümkün olmayacağı açıktır. Bu durumda t anında depoyu terk eden tuz oranı da daha önceki bir andaki (τ), orana bağlı olacaktır. Sistemi yeniden modellersek,

$$y'(t) = -q \frac{y(t - \tau)}{B},$$

gecikmeli diferansiyel denklemini elde ederiz.

1.2.2 Popülasyon Dinamiği

İzole edilmiş bir ortamda, bir hayvan kolonisinin herhangi bir t anındaki popülasyonunu $y(t)$ ile gösterirsek, popülasyonun büyümesini matematiksel olarak aşağıdaki gibi belirleyebiliriz.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

(1.2.1) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü, $y(t) = y_0.e^{\alpha t}$ şeklindedir ve popülasyonun üstel sınırsız artış sağladığı açıkça görülmektedir. Bundan dolayı, belli bir zaman sonra aşırı artan popülasyon sonucu kıtlık oluşacak ve kolonide ani ölümler görülecektir. Bu modelleme popülasyondaki büyüme oranının sadece doğumlarla ilgili olduğu düşünülmektedir. Ancak kolonideki ölümlerin de popülasyon dinamiğini etkileyeceği düşünülmelidir. Bu nedenle sistemi,

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha \left[1 - \frac{y(t)}{p} \right] y(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

diferansiyel denkleminle modellemek daha doğru olacaktır.

(1.2.2) denkleminde $1 - \frac{y(t)}{p}$ değeri, biyolojik anlamda sistem dengesini sağlayan faktör olarak verilir. Bu başlangıç değer probleminde α ve p değerleri

pozitif sabit olarak kabul edilirse çözüm (1.2.3) gibi olacaktır.

$$y(t) = \frac{y_0(t) \cdot e^{\alpha t}}{1 + \frac{y_0}{p}(e^{\alpha t} - 1)}. \quad (1.2.3)$$

Çözüm incelendiğinde, $\frac{y_0}{p} < 1$ ise, $t \rightarrow 0$ iken çözümün $y(t) = y_0 \cdot e^{\alpha t}$ haline dönüştüğü kolaylıkla görülebilir. Ancak $y_0 > 0$ başlangıç değeri için $t \rightarrow \infty$ için $y(t)$ denge noktası p ye yakınsar.

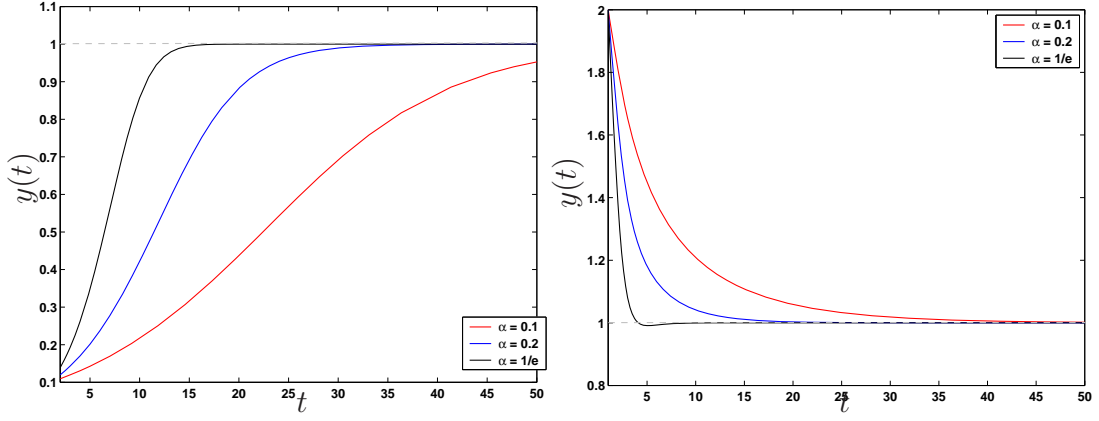
Şimdi topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de, belirli bir süre (τ) önceki nüfus ile orantılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda (1.2.4) ile verilen gecikmeli diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) \left[1 - \frac{y(t - \tau)}{p} \right], & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad \varphi_0 > 0. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

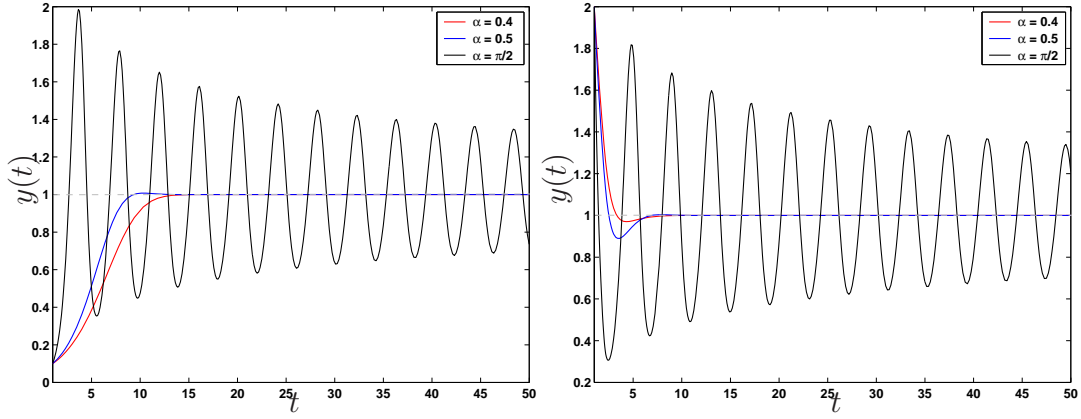
(1.2.4) gecikmeli diferansiyel denklemi literatürde çok sıkça geçmektedir. Wright (1946), $\tau = 1$ ve $p = 1$ için bu denklemin özel bir halini incelemiştir.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) \{1 - y(t - 1)\}, & t \geq 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq 0, \quad \varphi_0 > 0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

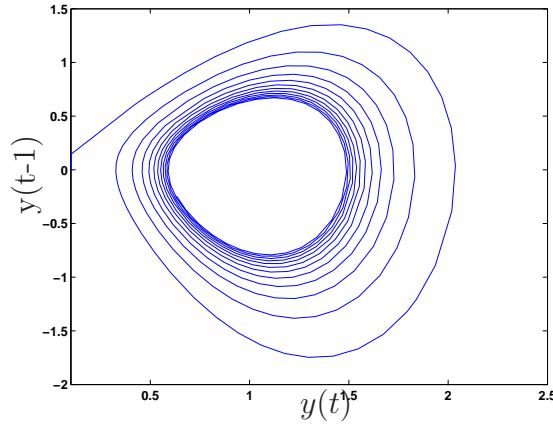
Wright (1946), α 'nın almış olduğu özel değerler için, (1.2.5) denkleminin bir çözümünü bulmanın mümkün olduğunu göstermiştir. $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ için, (1.2.5) denkleminin pozitif çözümleri monotondur. $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right]$ için $p = 1$ etrafında salınım gösterir. Her iki durumda da $t \rightarrow \infty$ iken çözüm p 'ye yakınsar. Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 bu iki durumu örnekler. Ayrıca α 'nın her değeri için çözüm bulmanın mümkün olmadığını ispatlamıştır.



Şekil 1.1: (a) $y(t) = 0.1$ ve (b) $y(t) = 2$ ve $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ için (1.2.5) denkleminin çözümleri



Şekil 1.2: (a) $y(t) = 0.1$ ve (b) $y(t) = 2$ ve $\alpha \in \left[\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right]$ için (1.2.5) denkleminin çözümleri



Şekil 1.3: $y(t) = 0.1$ ve $\alpha = 1.6$ için (1.2.5) denkleminin faz uzayı çözümü

Şekil 1.3 $y(t)$ 'nin $y(t - 1)$ 'e göre grafiğidir ve gecikme miktarının çözüme olan etkisini gösterir. (1.2.5) denklemi, Kuang (1993) bu denklemi popülasyon dinamiğini modellemek için (1.2.5) denklemini kullanmıştır. Bu model *Verhulst-Pearl* eşitliği olarak bilinmektedir.

Özel olarak, Lord Cherwell (1946) (1.2.5) denkleminde $\alpha = \log_e 2$ alarak, belli bir aralık içindeki asal sayıların dağılımını incelemiştir (bkz Wright (1946)).

Popülasyon dinamiğinde av-avcı problemi olarak tanımlanan modellemeler içinde gecikmeli diferansiyel denklem sistemleri kullanılır. Şimdi izole bir ortam içinde, belli bir t anındaki av olarak belirlenen bir türün popülasyonunu $y_1(t)$ ile ve avcı popülasyonunu da $y_2(t)$ ile gösterelim. Eğer ortamda avcı olarak belirlenen türden hiç bulunmadığını farz edersek, av olarak belirlenen türün popülasyonunda bir artış olacağı mutlaklıdır. Eğer artış oranını $c_{11} > 0$ olarak kabul edersek, av türünün popülasyonundaki değişimi

$$y_1'(t) = c_{11}y_1(t),$$

ile ifade edebiliriz. Şimdi de avcı olarak belirlenen türün, tek besin kaynağının av olarak belirlenen tür olduğunu varsayalım. Bu durumda avcı olarak belirlenen türün popülasyonundaki artış, av olarak belirlenen türün popülasyonu ile ters orantılıdır. Bu durumda modellemeyi $c_{12} > 0$ olmak üzere,

$$y_1'(t) = c_{11}y_1(t) - c_{12}y_1(t)y_2(t),$$

biçiminde güncelleyebiliriz.

İzole ortamda av olarak belirlenen türden hiç olmadığını varsayarsak, avcı olarak belirlenen türün popülasyonunda mutlak bir azalma olacaktır. Bu durumu

da $c_{21} > 0$ olmak üzere

$$y_2'(t) = -c_{21}y_2(t),$$

şeklinde ifade ederiz. Benzer biçimde av-avcı popülasyonu arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurursak, c_{11} , c_{12} , c_{21} ve c_{22} pozitif sabitler olmak üzere,

$$\begin{cases} y_1'(t) = c_{11}y_1(t) - c_{12}y_1(t)y_2(t), \\ y_2'(t) = -c_{21}y_2(t) + c_{22}y_1(t)y_2(t), \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi ile en basit haliyle av-avcı probleminin modellemesini yapmış oluruz. Bu denklemde $y_1(0) > 0$ ve $y_2(0) > 0$ olur.

Son olarak, av ve avcı türlerinin sadece belli bir t anındaki popülasyonlarını değilde, belli bir τ süre önceki popülasyonlarını göz önünde bulundurursak, daha gerçekçi bir modelleme yapmış oluruz. Bu durumda denklem sistemimiz

$$\begin{cases} y_1'(t) = c_{11} \left[1 - \frac{y_1(t)}{p} \right] y_1(t) - c_{12}y_1(t)y_2(t), \\ y_2'(t) = -c_{21}y_2(t) + c_{22}y_1(t-\tau)y_2(t-\tau), \end{cases} \quad (1.2.6)$$

haline dönüşür (Kuang, 1993). (1.2.6) denklem sistemi Bölüm II'de verilen Adımlar Yöntemi, (Bellman & Cooke, 1963), ile çözülebilir.

1.2.3 Tıp

American Cancer Society'e göre sadece Amerika'da her yıl bir milyonun üzerinde insana kanser teşhisi konulmakta ve 500.000'in üzerinde insan kanser nedeniyle hayatını kaybetmektedir. Bu nedenle tüm dünyada bilim adamlarının kanser hücrelerinin çoğalmasını ortaya koyan modelleme yapma çalışmaları hiç de şaşırtıcı değildir. Bu konuda Villasana & Radunskaya (2003) tarafından yapılan

bir çalışma, kanser hücrelerinin çoğalması ve bağışıklık sistemi hücreleri ile Hydroxy AraC ve Paclitaxel gibi özel bazı ilaçların kanser hücrelerinin çoğalması üzerindeki etkilerini inceleyen bir matematiksel modelleme sunmaktadır. Bu çalışmanın daha önceki çalışmalara göre en önemli farkı, modelleme yapılırken gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılmasıdır.

Çalışmaya göre, bir hücre devri olarak tanımlanan, hücrelerin ikiye bölünmesi için gerekli süredir ve bu süreç dört ana fazda gerçekleşir: G_1 aşaması, pre-synthetic faz olarak adlandırılır ve hücrenin kopyalama sürecine başlamadan önceki kuluçka dönemidir. G_1 aşaması tipik bir hücre için yaklaşık 48 saat sürer ve hücre devrinin en uzun aşamasıdır. İkinci aşama, S fazı ya da synthetic faz olarak adlandırılır. Bu aşamada DNA'nın bir kopyası oluşturulur ve bu işlem yaklaşık olarak 8 ile 20 saat arasında gerçekleştirilir. DNA'nın kopyası çıkarıldıktan sonra G_2 ya da post-synthetic faz adı verilen ikinci bir bekleme süreci yaşanır. G_2 aşaması Mitoz ya da kısaca M adı verilen faza bir hazırlık dönemidir. Son faz, M , hücreler içinde ikiye katlanan kromozomların birbirinden ayrılarak, iki ayrı hücre oluşumu safhasıdır. Tipik bir hücre için, hücre devri yaklaşık olarak 24 saat içinde tamamlanırken, bu süre karaciğer hücreleri için bir yılı bulur.

Modelleme için, $T_I(t)$, interphase olarak adlandırılan $G_1 + S + G_2$ safhasındaki herhangi bir t anında tümör hücrelerinin popülasyonunu, $T_M(t)$, M fazındaki herhangi bir t anında tümör hücrelerinin popülasyonunu, $I(t)$, t anında bağışıklık sistemi hücrelerinin popülasyonunu gösterebilir. Aynı zamanda $u(t)$, t anında uygulanan ilaç miktarı ve τ hücrelerin arayüz safhasında kalma süresini göstermek

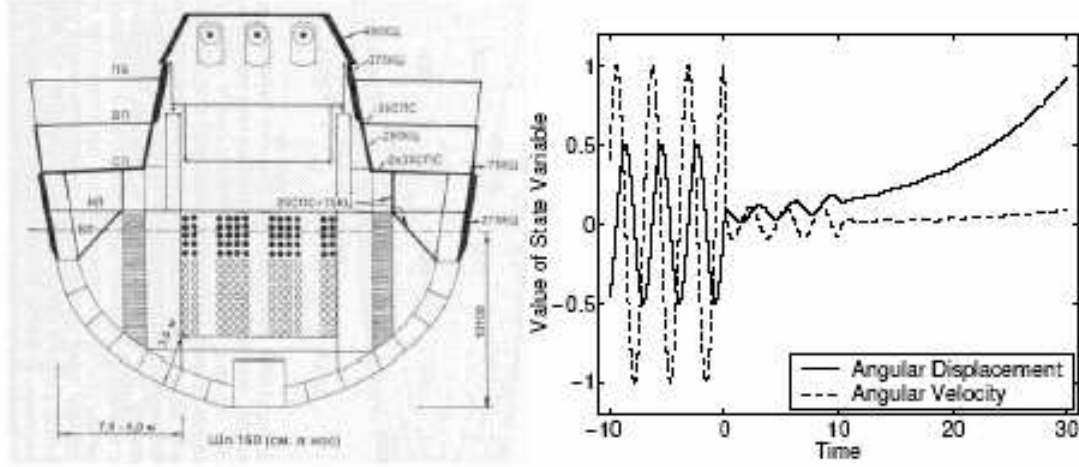
üzere model aşağıda verilen sistemle ilişkilendirilmiştir.

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_I' = 2a_4T_M - (c_1I + d_2)T_I - a_1T_I(t - \tau), & t \geq 0, \\ T_M' = a_1T_I(t - \tau) - d_3T_M - a_4T_M - c_3T_MI - k_1(1 - e^{-k_2u})T_M, & t \geq 0, \\ I' = k + \frac{\rho(T_I + T_M)^n}{\alpha + (T_I + T_M)^n} - c_2IT_I - c_4T_MI - d_1I - k_3(1 - e^{-k_4u})I, & t \geq 0, \\ u' = -\gamma u, & t \geq 0, \\ T_I(t) = \phi_1(t), & t \in [-\tau, 0], \\ T_M(t) = \phi_2(t), & t \in [-\tau, 0], \\ I(t) = \phi_3(t), & t \in [-\tau, 0], \\ u(0) = u_0. & \end{array} \right.$$

Model içindeki d_2T_I , d_3T_M ve d_1I doğal hücre ölüm oranlarını, a_1 ve a_4 hücrelerin hücre devirlerini tamamlama yüzdeleri, c_i değerleri ise bağışıklık sistemi hücrelerinin etkisiyle, tümör hücrelerinin kaybolma oranını ifade eder. ρ , α ve n değişkenleri ise tümör hücrelerinin tipine bağlı olarak değer almaktadır.

1.2.4 Kontrol Sistemleri

Geri beslemeli kontrol sistemlerinin hemen hemen tümünde gecikme zamanı bulunur. Bu nedenle kontrol sistemlerinin tasarımında gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması çok sıkça rastlanılan bir durumdur. Gecikmeli diferansiyel denklem kullanılarak bir kontrol sisteminin modellenmesine ilk örneklerden biri, *Minorsky*'nin II. Dünya Savaşı sırasında gemilerin dalgalardan dolayı sağa sola yalpalanmasını önleyebilmek için yaptığı çalışmadır. Bu modele göre, θ geminin denge durumunda bulunduğu normal pozisyon ile yana yatma durumundaki pozisyonu arasındaki açıyı gösterebilir. *Minorsky*'nin yaptığı modellemeye göre;



Şekil 1.4: Minorsky gemiler için yaptığı modelleme

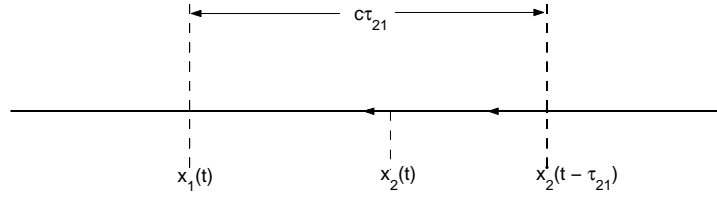
gemi, denge durumunda kalabilmek için ağırlık sağlaması amacıyla içi suyla doldurulup boşaltılabilen tanklar içermektedir.

Bununla birlikte geminin yana yatmasını engelleyebilmek için, suyun bir tanktan diğerine pompalanarak boşaltılmasını sağlayan bir mekanizma bulunmaktadır. Böylece dalgaların gemi üzerindeki etkisi ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Doğal olarak, bu mekanizmanın çalışması belli bir t anında aniden gerçekleşen bir olay değildir, yani suyun bir tanktan diğerine boşaltılabilmesi için belli bir süre geçmesi gerekir. Bu süre τ ile gösterilecek olursa, geminin dengede kalabilmesi, geminin $t - \tau$ anındaki durumuna bağlıdır. Minorsky, tüm bunları göz önünde bulundurarak yapmış olduğu modelleme sonucu, aşağıdaki denklemi elde etmiştir (bkz Driver (1977)).

$$\begin{cases} m\theta''(t) + b\theta'(t) + q\theta'(t - \tau) + k\theta(t) = 0, & t \geq 0, \\ \theta(t) = \phi(t), & t \leq 0. \end{cases}$$

1.2.5 Elektrodinamik

Aralarında belli bir mesafe bulunan iki elektronun birbiriyle etkileşimini düşünelim. Elektronların ışık hızıyla (c), bir yörünge etrafında hareket ettiklerini hesaba katalım. Bundan dolayı elektronların hareketlerini belli bir t anında gerçekleşen anlık bir olay gibi düşünmek mümkün değildir. Bu nedenle belli bir t anında elektronlardan birinin diğeri üzerindeki etkisi, daha önceki bir $t - \tau$ anındaki etkisi tarafından üretilir. Daha kolay anlaşılabilmesi için, bu iki elektronun



Şekil 1.5: İki elektronun birbirleri üzerindeki etkisi

yörüngelerinin sadece x eksenini doğrultusunda olduğunu düşünelim ve sırasıyla $x_1(t)$ ile $x_2(t)$ bu iki elektronun t anındaki konumlarını belirtsin.

Şimdi ikinci elektronun birinci elektron üzerindeki etkisini inceleyelim. Şekil 1.5 de gösterildiği gibi t anında, ikinci elektronun etki alanı, bu elektronun $t - \tau_{21}$ anındaki konumunun etkisiyle $x_1(t)$ konumuna erişir. Burada τ_{21} gecikme miktarının sabit olmadığı ve t 'ye bağlı olarak değiştiği açıktır ve aşağıdaki denklemi sağlar.

$$c.\tau_{21} = |x_1(t) - x_2(t - \tau_{21})|$$

Aynı şekilde birinci elektronun ikinci elektron üzerindeki etkisi benzer bir denklem üretir. Bu durumda τ_{12} birinci elektronun ikinci elektron üzerindeki etkisini üreten gecikme miktarı ve τ_{21} ikinci elektronun birinci elektron üzerindeki etkisini

üreten gecikme miktarı olmak üzere modellememizi (1.2.1) denkleminde olduğu gibi yapabiliriz.

$$\begin{cases} c.\tau_{21} = |x_1(t) - x_2(t - \tau_{21})|, \\ c.\tau_{12} = |x_2(t) - x_1(t - \tau_{12})|. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Bu bölümde gecikmeli diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarına bir kaç örnek verdik. Ancak literatür tarandığında bu uygulama alanlarının çok daha geniş bir alana yayıldığı rahatlıkla görülebilir. Bulaşıcı hastalıkların yayılımını inceleyen modellemesiyle Kermack ve McKendrick (Hairer et al., 2000), makinelerin çalışırken çıkardığı gürültülerin giderilmesi amacıyla yaptığı modellemeyle (Asl & Ulsoy, 2003), enzimlerin kinetiğini inceleyen çalışmalarıyla Okamoto ve Hayashi (Hairer et al., 2000), bir virüs tipine karşı bağışıklık sisteminin gösterdiği tepkiyi modelleyen çalışmasıyla Marchuk (Hairer et al., 2000), Solow (1966)'un bir şehrin ekonomik büyümesini inceleyen çalışması (Boucekkine et al., 1996), Grossman (1998)'in HIV'in bulaşıcılığını modelleyen çalışması (Baker et al., 1999), Glass ve Mackey (1979)'in memelilerde solunum bozukluğundan kaynaklanan rahatsızlıklar üzerindeki çalışmalarında yaptıkları modellemeleri (Kuang, 1993), Caberlin (2002), biyolojik sistemlerin matematiksel modellemeleri ile ilgili çalışması gibi pek çok uygulama alanı mevcuttur.

1.3 Gecikmeli Diferansiyel Denklem Teorisinin Adi Diferansiyel Denklemlerden Olan Farklılıkları

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_i)), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

(1.3.1) denkleminde $\forall i$ için $\tau_i \geq 0$ dır ve τ_i gecikme miktarları sabit (constant delay case) olabileceği gibi, $\tau_i = \tau_i(t)$ biçiminde t parametresine bağlı (time dependent delay case) veya $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$ biçiminde (state dependent delay case) olabilir.

Notasyonu basite indirgemek için, $\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min_{t \geq t_0} (t - \tau_i) \right\}$ olmak üzere, $\varphi(t)$ fonksiyonunu $[\rho, t_0]$ aralığında tanımlı düşüneceğiz. Özel olarak eğer τ_i 'ler $\tau_i = \tau_i(t, y(t))$ biçiminde ise, $\varphi(t)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık için bir başlangıç değerinden (ρ) söz etmek mümkün değildir.

Şimdi (1.3.1) denkleminin daha basit bir halini ele alalım.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Genel olarak, $y'(t_0)^+ = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau))$ türevi, $\varphi'(t_0)^-$ türevine eşit değildir. Bundan dolayı $y(t)$ fonksiyonu, t_0 noktasında $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonuna düzgün olarak bağlı değildir. Dolayısıyla sadece $y \in C^0$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca t_0 noktasından başlayarak integrasyon aralığı boyunca, $y(t)$ fonksi-

yonunun türevlerinin süreksizlik noktaları mevcuttur. Bu da aralık boyunca, $y(t)$ çözüm fonksiyonunun düzgün ve pürüzsüz olmamasını sağlayan noktalara sahip olmasını sağlar.

Sonuç olarak $f(t, y(t), y(t-\tau), \tau(t, y(t)), \varphi(t)) \in C^\infty$ olsa bile (1.3.1) biçimindeki $y(t)$ fonksiyonu için aralık boyunca $y(t) \in C^1$ olur.

Örnek 1.3.1 *Driver (1977)*

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = 1, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini düşünelim.

$y'(0)^- = 0$ ve $y'(0)^+ = y(-1) = 1$ olduğundan t_0 noktasında $y'(t)$ türev fonksiyonu bir atlama noktasına sahiptir. Benzer şekilde

$$y''(t) = y'(t-1),$$

fonksiyonu $t = 1$ noktasında ve

$$y'''(t) = y''(t-1) = y'(t-2),$$

fonksiyonu $t = 2$ noktasında atlama noktalarına sahiptir. Devam edildiğinde her gecikme miktarı için $y(t)$ fonksiyonunun her mertebeden türevlerinin süreksizlik noktalarına sahip olduğu görülür.

Üzerinde durulması gereken farklılıklardan biri de, (1.3.2) denklemiyle verilen $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonunun durumunun, çözüm üzerinde çeşitli beklenmedik sonuçların elde edilmesine neden olmasıdır. Bu durumu örneklemek için, başlangıç fonksiyonuna bağlı olarak, aşağıda verilen gecikmeli diferansiyel denklemin iki farklı çözümünün olduğunu göstereceğiz.

Örnek 1.3.2 *Bellen & Zennaro (2003)*

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - |y(t)| - 1) + \frac{1}{2}, & t \geq 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq 0, \end{cases}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini için $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

Şimdi $[0, 2]$ aralığında $y(t)$ fonksiyonu için, $y(t) = \frac{3}{2}t$ ve $y(t) = \frac{1}{2}t$ 'nin iki farklı çözüm olduğunu görmek kolaydır.

Gecikmeli diferansiyel denklem teorisinde karşılaşılan problemlerden biri de gecikme miktarı ve denklem içindeki diğer parametrelere bağlı olarak çözümün bazen salınımlı bir sonuç doğurması bazen de kaotik bir sonuç doğurmasıdır.

Bölüm 2

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde öncelikle,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.0.1)$$

biçiminde tanımlanan gecikmeli diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliği üzerine değinilecek ve arkasından analitik çözümlerin bulunabilmesi için literatürde geçen bazı yaklaşımlara yer verilecektir.

2.1 Varlık ve Teklik

Adi diferansiyel denklem teorisinde olduğu gibi, (2.0.1) ile verilen başlangıç değer problemlerinin varlık ve teklik teoremleri, temel olarak $f(t, y(t), y(t - \tau))$ fonksiyonunun sürekli olması ve t 'ye bağlı olarak Lipschitz koşulunu sağlamasına bağlıdır.

Teorem 2.1.1 (Yerel Varlık Teoremi)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

eşitliğini düşünelim. $f(t, u(t), v(t))$ fonksiyonu $A \subseteq [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ üzerinde sürekli ve $u(t)$ ve $v(t)$ 'ye bağlı olarak yerel Lipschitz sürekli olsun. Aynı zamanda $\tau(t) \geq 0$ gecikme fonksiyonu $[t_0, t_f]$ aralığında sürekli, $\tau(t_0) = 0$ ve $\exists \xi > 0$ için $(t_0, t_0 + \xi]$ aralığında $t - \tau(t) > t_0$ olsun.

Bu durumda (2.1.1), $\exists \delta > 0$ için $[t_0, t_0 + \delta]$ tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm başlangıç değerine bağlıdır.

İspat : Bellen & Zennaro (2003).

Teorem 2.1.2 (Global Varlık Teoremi) Teorem 2.1.1 için verilen hipotezler altında (2.1.1) denkleminin tekil maksimal çözümü sınırlandırılır. Bu nedenle $[t_0, t_f]$ aralığında çözüm mevcuttur.

İspat : Bellen & Zennaro (2003).

Genel olarak, global varlık teoremini kullanmak yerine öncelikle çözümün sınırlandırılmasına ihtiyaç duyacağız. Bu amaçla aşağıdaki sonuç teoremi vereceğiz.

Teorem 2.1.3 Teorem 2.1.1 için verilen hipotezler altında, $M(t)$ ve $N(t)$ fonksiyonları $[t_0, t_f]$ aralığında pozitif değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $f(t, u, v)$ fonksiyonu, $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ aralığında

$$\|f(t, u, v)\| \leq M(t) + N(t)(\|u\| + \|v\|)$$

koşulunu sağlar.

Bu durumda (2.1.1) denkleminin çözümü mevcuttur ve $[t_0, t_f)$ aralığında çözüm tektir.

Sonuç Teorem 2.1.3 birden fazla gecikme içeren denklemler içinde sağlanır. Aşağıdaki teorem (Bellen & Zennaro, 2003), Teorem 2.1.1 genişletilmiş halidir ve Driver (1967) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.4 (Genelleştirilmiş Yerel Varlık Teoremi)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

denklemini ele alalım. $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ve $V \subseteq \mathbb{R}^d$ sırasıyla $\varphi(t_0)$ ve $\varphi(t_0 - \tau(t_0, \varphi(t_0)))$ 'in birer komşuluğu olsun. $f(t, u, v)$ fonksiyonu hem t değişkenine göre sürekli hem de $\exists h > 0$ için, $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$ bölgesinde u ve v değişkenlerine göre Lipschitz sürekli olsun. Aynı zamanda başlangıç fonksiyonu $\phi(t)$, $t < t_0$ için, Lipschitz sürekli ve $\tau(t, y) \geq 0$ gecikme fonksiyonu, hem t değişkenine göre sürekli hem de $[t_0, t_0 + h] \times U$ bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz sürekli olsun.

Bu durumda $\exists \delta > 0$ için $[t_0, t_0 + \delta)$ aralığında (2.3.1) denklemi tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm başlangıç değerine bağlıdır.

2.2 Linear Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümleri

2.2.1 Belmann'ın Adımlar Yöntemi ile Çözüm

Belmann'ın adımlar yöntemine göre, (2.2.1) ile verilen denklemin çözümünü bulma işlemi bir başlangıç değer problemidir.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & t_0 \leq t \leq T, \tau > 0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Bu başlangıç değer probleminin çözümü $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için $y(t) = \varphi(t)$ ve $t \geq t_0 \geq T$ için ise $y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$ denklemini sağlayan ve $T > t_0$ olmak üzere, $[t_0 - \tau, T]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyondur.

(2.2.1) başlangıç değer problemine adımlar yöntemini uygularsak, ilk adımda gecikmesi olmayan

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \varphi_0(t - \tau)), & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ y(t_0) = \varphi_0(t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

elde edilir.

Elde edilen başlangıç değer probleminin $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığında çözümünün tanımlı ve var olduğu kabul edilirse,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \varphi_1(t - \tau)), & t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, \\ y(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau), \end{cases} \quad (2.2.3)$$

elde edilir.

Bu yöntemle çözüm, sonlu bir aralık için genişletilir. Adımlar yöntemine (Belmann, R. and Cooke, K. L. (1963))'a göre tüm t değerleri için çözümün varlık ve tekliğini gerçekler.

Şimdi gecikmeli diferansiyel denklemlerin Adımlar yöntemi ile çözümlerini anlayabilmek için (1.1.2) ile verilen gecikmeli diferansiyel denklemi $\mu = 0$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$ değerleri ve $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için $y(t) = 1$ başlangıç fonksiyonu için basitleştirerek inceleyelim. $t_0 = 1$ için (1.1.2) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), & t \geq 1, \\ y(t_0) = 1, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Örnek 2.2.1 *Şimdi (2.2.4) ile verilen gecikmeli diferansiyel denkleminin adımlar yöntemi ile çözümünü inceleyelim.*

Çözüm : $0 \leq t \leq 1$ için, gecikme yoktur ve bu aralıkta sistemin çözümü $y(t) = 1$ ile belirlenir. Gecikme miktarı $\tau = 1$ olduğundan, birer adım aralığıyla çözümü sonlu bir aralık için elde edebiliriz.

İlk adımda $1 \leq t \leq 2$ için

$$\begin{cases} y'(t) = 1, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $y(t) = t$ olarak bulunur. Elde ettiğimiz bu çözümü, gecikme miktarına bağlı olarak tekrar düzenleyebiliriz. Gecikme miktarı $\tau = 1$ olduğundan, çözümü $1 \leq t \leq 2$ için $y(t) = 1 + (t-1)$ şeklinde yeniden yazabiliriz.

Benzer şekilde işlemi tekrarlayarak, $2 \leq t \leq 3$ için çözüm arayalım.

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + (t - 2), \\ y(2) = 2, \end{cases}$$

ise

$$y(t) = t + \frac{(t - 2)^2}{2} + c,$$

elde edilir. Bu denklemden başlangıç değerini yerine yazarsak, $c = 0$ olarak bulunur. Bu durumda $2 \leq t \leq 3$ için çözüm $y(t) = 1 + (t - 1) + \frac{(t - 2)^2}{2}$ olarak belirlenir.

Aynı işlem tekrarlanırsa, $3 \leq t \leq 4$ için çözüm;

$$y(t) = 1 + (t - 1) + \frac{(t - 2)^2}{2} + \frac{(t - 3)^3}{3!},$$

olarak bulunur. Böylece, (2.2.4) başlangıç değer probleminin çözümü, $\forall N \geq 1$ ve $N \geq t \geq N + 1$ için çözüm $y(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(t - j)^j}{j!}$ olarak bulunur.

2.2.2 Laplace Transformu ile Çözümün Bulunması

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünde $y(t - \tau)$ yerine (2.2.5) eşitliği ile verilen Taylor serisinde $t = 0$ için elde edilen MacLaurin serisinin ilk bir kaç terimini yazarak çözüm aramak mümkündür.

$$y(t - \tau) = y(t) + y'(t)(t - \tau) + \frac{y''(t)}{2!}(t - \tau)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t)}{n!}(t - \tau)^n, \quad (2.2.5)$$

$t = 0$ için $y(t - \tau) = y(0) - \tau y'(0) + \tau^2 \frac{y''(0)}{2!} + \dots + (-1)^n \tau^n \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ elde edilir. Ancak bu durumda $y'(t) = \mu \cdot y(t) + \alpha \cdot y(t - \tau)$ denkleminin çözümleri oldukça farklı davranış sergiler.

Örnek 2.2.2 $y'(t) = -3y(t) - 2y(t - 1)$ gecikmeli diferansiyel denklemi için $t \rightarrow \infty$ iken tüm çözümler sınırlıdır. Ancak gecikmeli terim $y(t - 1)$ yerine Maclaurin açılımı kullanarak $y(t) - y'(t)$ yazarsak, elde edilen adi diferansiyel denklemin çözümü $y(t) = ce^{5t}$ biçiminde bulunur ki bu çözüm üstel büyüme ifade eder.

Örnek 2.2.2 ile verilen denklemin çözümünden de anlaşılacağı gibi gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünde seri açılımı kullanmak hatalı sonuçların elde edilmesine neden olur. Bu nedenle gecikme miktarı sabit olan, sabit katsayılı lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmede Laplace Dönüşümü kullanmak daha elverişlidir.

Tanım 2.2.1 $f(t)$, reel değerli bir fonksiyon olsun ve $t > 0$ için tanımlansın.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.2.6)$$

ile tanımlanan $F(s)$ fonksiyonu s değişkeninin tüm değerleri için tanımlı ise (2.2.6) ile tanımlı $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1 $f(t)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

(i) $\exists a > 0$ için, $\int_0^{\infty} f(t)e^{-at} dt$ mutlak yakınsak

(ii) $f(t)$, bir u komşuluğunda sınırlı değişim gösterir.

Bu durumda $b > a$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T F(b + it_1) u dt_1 &= \frac{f(u^-) + f(u^+)}{2}, \quad u > 0, \\ &= \frac{f(0^+)}{2}, \quad u = 0. \end{aligned}$$

Şimdi gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünde yardımcı olması amacıyla, kompleks değerli fonksiyonların Laplace Transformu için kompleks ters dönüşüm formülünü vereceğiz.

Tanım 2.2.2 (Bromwich integral formülü)

Eğer $f(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ise

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} f(t)e^{st} ds, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) denklemi Laplace transformu için kompleks ters dönüşüm formülü olarak bilinir ve kompleks düzlemde $t = \gamma$ doğrusu üzerinde uygulanır. Burada $t = x + iy$ ile verilir ve γ sayısı, eğer $t = \gamma$ doğrusu üzerinde kutup noktaları mevcutsa tüm kutup noktalarının sağında, aksi halde keyfi olarak seçilir.

Teorem 2.2.1 ve kompleks ters dönüşümün formülünden dolayı, $t \geq 0$ için $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve sonlu bir aralık içinde sınırlı iken,

$$f(t) = \int_{(\gamma)} F(s)e^{st} dt, \quad (2.2.8)$$

elde edilir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü ile çözümlerini anlayabilmek için, (2.2.4) ile verilen basit bir gecikmeli diferansiyel denklemi inceleyelim. (2.2.4) denkleminde eşitliğin yer iki yanını e^{-st} ile çarpıp 1'den ∞ 'a kadar integrallersek,

$$\int_1^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = \int_1^{\infty} y(t-1)e^{-st} dt, \quad (2.2.9)$$

denklemini elde ederiz. (2.2.9) eşitliğinin sol tarafına kısmi integrasyon uygulayalım.

$$y'(t)dt = dv \Rightarrow y(t) = v,$$

ve

$$e^{-st} = u \Rightarrow -s.e^{-st} = du,$$

için,

$$\int_1^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = y(t)e^{-st} \Big|_{t=1}^{\infty} + s \int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt,$$

bulunur. $t \rightarrow \infty$ iken $y(t) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\int_1^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = -y(1)e^{-s} + s \int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt, \quad (2.2.10)$$

elde edilir. Şimdi (2.2.9) eşitliğinin sağ tarafına $(t-1) \rightarrow t$ değişken dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} y(t-1)e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} y(t)e^{-s(t+1)} dt \\ &= e^{-s} \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \\ &= e^{-s} \left[\int_0^1 y(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \right], \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

elde ederiz. Buradan (2.2.10) ve (2.2.11) eşitlikleri kullanılarak,

$$-y(1)e^{-s} + s \int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt = e^{-s} \left[\int_0^1 y(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \right],$$

bulunur. Burada $s - e^{-s} \neq 0$ olduğunu varsayarsak,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} y(t)e^{-st} dt &= \frac{-y(1)e^{-s} + e^{-s} \int_0^1 y(t)e^{-st} dt}{s - e^{-s}} \\ &= \mathcal{L}\{y(t)\} = F(s), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integralin tek tekil noktası, $s - e^{-s} = 0$ karakteristik fonksiyonu ile belirtilen kutup noktalarında oluşur. Genel olarak karakteristik fonksiyonun kökleri tespit edildiğinde kompleks ters dönüşüm formülü $y(t)$ üzerine uygulanabilir. Teorem 2.2.1'den dolayı, $t \geq 0$ için, $y(t)$ sürekli ve sonlu bir aralık üzerinde sınırlı iken,

$$y(t) = \int_{(\gamma)} \frac{-y(1)e^{-s} + e^{-s} \int_0^1 y(t)e^{-st} dt}{s - e^{-s}} e^{st} ds, \quad t > 1,$$

bulunur. Böylece (2.2.4) denkleminin çözümünün $y(t)$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığı üzerindeki başlangıç değerleri ile kompleks ters dönüşüm formülü yardımıyla çözülebileceğini göstermiş olduk.

2.2.3 Lambert W Fonksiyonu ile Çözümün Bulunması

Gecikmeli diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek zorluğ, çoğu zaman karakteristik denklemin transendental yapıda olmasından kaynaklanır. Bu nedenle sabit katsayılı, homojen lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelerken, Lambert tarafından tanımlanan W fonksiyonunu (Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey, & Knuth, 1996) kullanacağız.

Tanım 2.2.3 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = ze^z$ ile tanımlanan kompleks değerli fonksiyonun ters fonksiyonu $W(z)$ Lambert W fonksiyonudur ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $W(z)e^{W(z)} = z$ eşitliğini sağlar.

Lambert W fonksiyonu,

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n, \quad (2.2.1)$$

ve

$$W_k(z) = \ln_k(z) - \ln(\ln_k(z)) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \frac{[\ln(\ln_k(z))]^j}{\ln_k(z)^{i+j}}, \quad (2.2.2)$$

eşitlikleri yardımıyla seriye açılarak bulunabilir (ayrıntı için bkz Corless et al. (1996)). Burada

$$\ln_k(z) = \ln(z) + 2\pi ik,$$

ve

$$c_{ij} = \frac{1}{j!}(-1)^i \binom{i+j}{i+1}$$

eşitlikleriyle verilir.

Şimdi

$$\begin{cases} y'(t) + \alpha y(t - \tau) + \beta y(t) = 0, & \tau > 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \in [0, \tau], \end{cases} \quad (2.2.3)$$

denklemini için çözüm arayalım. (2.2.3) ile verilen denklemin özel çözümlerinin, c sabit olmak üzere, $y(t) = ce^{st}$ formundadır ve bu durumda bu özel çözüm (2.2.3) denklemini sağlar.

$$\begin{aligned} cse^{st} + \alpha ce^{s(t-\tau)} + \beta ce^{st} &= 0 \\ \Rightarrow e^{st}(s + \alpha e^{-s\tau} + \beta) &= 0 \\ \Rightarrow (s + \beta)e^{s\tau} + \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Elde edilen

$$(s + \beta)e^{s\tau} = -\alpha, \quad (2.2.4)$$

denklemini (2.2.3) denkleminin karakteristik denklemi olarak bulunur ve görüldüğü gibi bu denklem transendentaldir. Karakteristik denklemin köklerini bulursak, (2.2.3) denkleminin özel çözümlerini elde etmiş oluruz. O halde karakteristik denklemini biraz düzenleyelim. (2.2.4) eşitliğinin her iki yanını $\tau e^{\beta\tau}$ ile çarparsak

$$\tau(s + \beta)e^{(s+\beta)\tau} = -\alpha\tau e^{\beta\tau}, \quad (2.2.5)$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı zamanda Tanım 2.2.3 yardımıyla,

$$W(-\alpha\tau e^{\beta\tau})e^{W(-\alpha\tau e^{\beta\tau})} = -\alpha\tau e^{\beta\tau}, \quad (2.2.6)$$

yazabiliriz. (2.2.5) ve (2.2.6) denklemleri kullanılarak,

$$\tau(s + \beta) = W(-\alpha\tau e^{\beta\tau}),$$

olduğu görülebilir ve buradan da karakteristik denklemin kökü

$$s = \frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau e^{\beta\tau}) - \beta,$$

olarak bulunur. Burada W fonksiyonunun değeri (2.2.1) ve (2.2.2) denklemleri kullanılarak elde edilir. Elde edilen köklerin hepsi $y(t)$ fonksiyonu için bir özel çözüm sağladığından çözüm fonksiyonu, $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{\left[\frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau e^{\beta\tau}) - \beta\right]t}$ olarak bulunur. Elde edilen çözümde c_k katsayıları $y(t) = \phi(t)$ başlangıç fonksiyonu yardımıyla üretilir.

En basit haliyle, $\beta = 0$ iken, $y'(t) + \alpha y(t - \tau) = 0$ denklemi için karakteristik denklemin kökleri

$$s = \frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau),$$

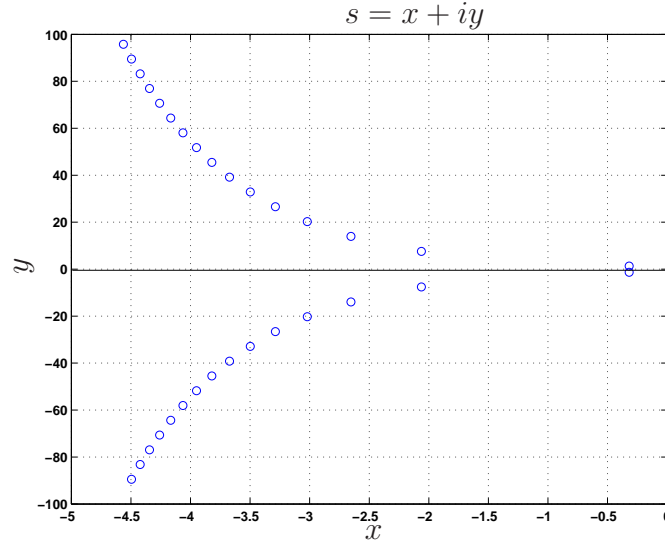
biçimindedir. Bu denklemin sonsuz adet kompleks kökü vardır ve bu köklerin her biri ayrı bir özel çözümdür. $\alpha = 1$, $\tau = 1$ için denklemin ilk 30 kökü Şekil 2.1 ile verilmiştir.

2.3 Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemleri

Bu kısımda

$$\mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t - \tau) + \mathbf{B}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}, \quad \tau > 0, \quad (2.3.1)$$

denklemi ile verilen birinci dereceden (skaler), lineer, homojen gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerini inceleyeceğiz. (2.3.1) ile verilen denklem sisteminde, \mathbf{A} ve \mathbf{B} , $n \times n$ tipinde, t değişkenine bağlı reel değerli fonksiyonların matrisleri ve $\tau > 0$ olmak üzere reel değerli bir sabittir.



Şekil 2.1: $\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ için $s = \frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau)$ karakteristik denkleminin 30 kökü

Şimdi (2.3.1) denklem sisteminde \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrislerini sabit olarak kabul edip,

$$\mathbf{y}'(t) + \mathbf{A}\mathbf{y}(t - \tau) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}, \quad \tau > 0 \quad (2.3.2)$$

sisteminin karakteristik denklemini bulalım. (2.3.2) için $\mathbf{y} = e^{st}$ bir özel çözüm olduğundan, bu eşitliği sağlar. O halde,

$$\begin{aligned} se^{st} + \mathbf{A}e^{s(t-\tau)} + \mathbf{B}e^{st} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow s\mathbf{I} + \mathbf{A}e^{-s\tau} + \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow s\mathbf{I} &= -\mathbf{A}e^{-s\tau} - \mathbf{B} \\ \Rightarrow s\mathbf{I}e^{s\tau} &= -\mathbf{A} - \mathbf{B}e^{s\tau} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını τ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I})\tau e^{s\tau} &= (-\mathbf{A})\tau - \mathbf{B}\tau e^{s\tau} \\ \Rightarrow (s\tau)\mathbf{I}e^{(s\tau)\mathbf{I}} &= (-\mathbf{A})\tau - \mathbf{B}\tau e^{s\tau\mathbf{I}} \\ \Rightarrow (s\tau)\mathbf{I}e^{(s\tau)\mathbf{I}} + \mathbf{B}\tau e^{s\tau\mathbf{I}} &= (-\mathbf{A})\tau \\ \Rightarrow (s\mathbf{I} + \mathbf{B})\tau e^{(s\tau)\mathbf{I}} &= (-\mathbf{A})\tau \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanını $e^{\mathbf{B}\tau}$ ile çarparsak,

$$(\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau e^{(\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau} = (-\mathbf{A})\tau e^{\mathbf{B}\tau},$$

yazabiliriz. Lambert W fonksiyonu tanımı gereğince,

$$W((\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau) e^{W((\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau)} = (\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau,$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (\mathbf{sI} + \mathbf{B})\tau &= W(-\mathbf{A}\tau e^{\mathbf{B}\tau}) \\ \Rightarrow \mathbf{sI} &= \frac{1}{\tau} W(-\mathbf{A}\tau e^{\mathbf{B}\tau}) - \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Özel olarak, $B = 0$ için,

$$\mathbf{sI} = \frac{1}{\tau} W(-\mathbf{A}\tau) \tag{2.3.4}$$

bulunur. (2.3.3) denklemiyle verilen karakteristik denklemin kökleri elde edilen $\frac{1}{\tau} W(-\mathbf{A}\tau e^{\mathbf{B}\tau}) - \mathbf{B}$ matrisinin özdeğerleridir ve her biri (2.3.2) sistemi için bir özel çözüm oluşturur. Bu durumda (2.3.2) sisteminin genel çözümü

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k e^{\left[\frac{1}{\tau} W(-\mathbf{A}\tau e^{\mathbf{B}\tau}) - \mathbf{B} \right] t},$$

olarak belirlenir. Bu denklemdaki \mathbf{c}_k katsayılar matrisi $n \times 1$ tipindedir ve başlangıç fonksiyonu yardımıyla hesaplanır.

Örnek 2.3.1

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_2(t-2), \\ y_2' &= y_1(t-1) - y_3(t-3), \\ y_3' &= -y_2(t-2), \end{cases} \tag{2.3.5}$$

gecikmeli diferansiyel denklem sistemini çözelim.

Çözüm :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$y'(t) = \sum_{j=1}^3 A_j y(t - \tau_j),$$

yazabiliriz. Bu denklem sisteminin özel çözümleri $\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}e^{st}$ biçimindedir ve sıfırdan farklı çözümlerin olabilmesi için $\det(sI - \sum_{j=1}^3 A_j y(t - \tau_j)) = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} s & -2e^{-s} & 0 \\ -e^{-s} & s & e^{-2s} \\ 0 & e^{-3s} & s \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow s(s^2 - e^{5s}) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 = e^{5s},$$

denklemi MATLAB yardımıyla çözdürüldüğünde, $s_1 = -\frac{2}{5}W\left(-\frac{5}{2}\right)$ ve

$s_2 = -\frac{2}{5}W\left(\frac{5}{2}\right)$ kökleri bulunur. Bu durumda, s_1 için genel çözüm, (2.2.1) ve (2.2.2) denklemleri ile aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} y(t) &= \dots + c_{-1}e^{-\frac{2}{5}W_{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)t} + c_0e^{-\frac{2}{5}W_0\left(-\frac{5}{2}\right)t} \\ &\quad + c_1e^{-\frac{2}{5}W_1\left(-\frac{5}{2}\right)t} + \dots \\ &= \dots + c_{-1}e^{-\frac{2}{5}(0.3341 - 1.7585i)t} + c_0e^{-\frac{2}{5}(0.3341 - 1.7585i)t} \\ &\quad + c_1e^{-\frac{2}{5}(-1.1367 + 7.7076i)t} + \dots \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde s_2 için genel çözüm,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \dots + c_{-1}e^{-\frac{2}{5}W_{-1}\left(\frac{5}{2}\right)t} + c_0e^{-\frac{2}{5}W_0\left(\frac{5}{2}\right)t} \\
 &\quad + c_1e^{-\frac{2}{5}W_1\left(\frac{5}{2}\right)t} + \dots \\
 &= \dots + c_{-1}e^{-\frac{2}{5}(-0.6141 - 4.5791i)t} + c_0e^{-\frac{2}{5}0.9586t} \\
 &\quad + c_1e^{-\frac{2}{5}(-0.6141 + 4.5791i)t} + \dots
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

2.4 Integro-diferansiyel Denklemler

Bu kısımda genel olarak;

$$y'(t) = \mathcal{F}\left(t, y(t), \int_{p(t)}^t K(t, s, y(s))ds\right), \quad t \geq 0, \quad (2.4.1)$$

tipindeki integro-diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz. Bu denklemde integral kısmın alt sınırı $p(t) = -\infty, 0, t - \tau$ olabilir. $p(t) = 0$ ise (2.4.1) denkleminin çözümü için $y(0) = y_0$ başlangıç değerine ihtiyaç duyulur. $p(t) = -\infty$ ise (2.4.1) denkleminin çözümü için $-\infty < t \leq 0$ aralığında $y(0) = \varphi(t)$ başlangıç fonksiyonunun tanımlı olması gerekir. Benzer şekilde, $p(t) = t - \tau$ ise çözüm için $t \in [-\tau, 0]$ için $y(t) = \varphi(t)$ başlangıç fonksiyonu tanımlanmalıdır.

(2.4.1) formundaki denklemler, genelde integral kısmı yeni bir değişkene atanarak, adi veya gecikmeli diferansiyel denklemlere dönüştürülebilir.

Örnek 2.4.1 (Volterra,1931)

$$y'(t) = y(t) \cdot \left(\alpha - \beta y(t) - \int_0^t K(t-s)y(s)ds \right), \quad t \geq 0,$$

$$y(0) = y_0,$$

denklemini ele alalım ve çekirdek fonksiyonunu $K(t) = c$ sabit olarak kabul edelim.

$$u(t) = \int_0^t y(s)ds$$

$$\Rightarrow u'(t) = y(t)$$

$$\Rightarrow u''(t) = u'(t)(\alpha - \beta u'(t) - c.u(t)),$$

biçiminde basit bir dönüşüm yardımıyla integro-diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz.

Aynı yöntemi $K(t, s, y(s)) = \sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s, y(s))$ çekirdek fonksiyonu ile (2.4.1) formundaki integro-diferansiyel denkleme uygulayabiliriz.

$$u_i(t) = \int_{t-\tau}^t b_i(s, y(s))ds,$$

dönüşümü ile (2.4.1) denklemi,

$$\begin{cases} y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), \sum_{i=1}^n a_i(t)u_i(t) \right) \\ u'_i(t) = b_i(t, y(t)) - b_i(t-\tau, y(t-\tau)), i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

ile verilen gecikmeli diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

Örnek 2.4.2 $y'(t) = f(t) + \lambda \int_{t-\tau}^t K(t-s)y(s)ds$ integro-diferansiyel denkleminde $f(t) = 1$, $\tau = 1$, $\lambda = 1$ ve çekirdek fonksiyonunu $K(t-s) = 1$ alarak çözüm arayalım. Bu durumda denklem $y'(t) = 1 + \int_{t-1}^t y(s)ds$ şekline dönüşür.

$u(t) = \int_{t-1}^t y(s)ds$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} u'(t) &= y(t) + y(t-1) - \int_{t-1}^t ds \\ &= y(t) + y(t-1) - 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} u''(t) &= y'(t) + y'(t-1) \\ &= u(t) + u(t-1) + 2, \end{aligned}$$

şeklinde yazıp integro-diferansiyel denklemi gecikmeli diferansiyel denkleme dönüştürmüştür. oluruz.

Böylece Örnek 2.4.1 ve Örnek 2.4.2 ile integro-diferansiyel denklemlerin adi veya gecikmeli diferansiyel denklemlere dönüştürülebileceğini göstermiş olduk.

Özel olarak,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,s)y(s)ds, & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,s)y(s)ds, & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

tipindeki integro-diferansiyel denklemler için çekirdek fonksiyonu

$K(t,s) = k(t-s)$ biçiminde konvolüsyon tipte ve $\int_0^\infty |k(s)|ds < \infty$ ise uygun başlangıç değerleri ile Laplace transformu uygulanarak analitik çözüm bulunabilir.

Örnek 2.4.3 Filiz (2000a)

$$(a) \begin{cases} y'(t) = \lambda \int_0^t y(s)ds, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

integro-diferansiyel denkleminin analitik çözümü Laplace transformu alınarak

$y(t) = \cosh(\sqrt{\lambda}t)$ olarak bulunur. Ayrıca integro-diferansiyel denklemin diferansiyeli alındığında, eşitlik $y''(t) = \lambda y(t)$ biçiminde 2. mertebeden adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$(b) \begin{cases} , y''(t) = e^{2t} - \int_0^t e^{2(t-s)} y(s) ds, & t > 0, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

tipindeki ikinci mertebeden lineer integro-diferansiyel denklemi düşünelim. Bu denkleme Laplace transformu uygularsak, $y(t) = t.e^t - e^t + 1$ analitik çözümünü elde edilir.

Görüldüğü gibi integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için Laplace transformu teorik olarak bir araçtır. Ancak pratikte karşımıza çıkan integro-diferansiyel denklemler daha karışık olduğundan bu yöntem her zaman için kullanışlı olmayabilir.

Bu bölümde gecikme terimi içeren diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için bazı yaklaşımlara değindik. Literatürde bu çözümlerin varlığı ve salınımlarının incelenmesi ile ilgili pek çok çalışma bulmak mümkündür (Baker, Paul, & Willé, 1995). Gecikmeli diferansiyel denklemler pek çok sistemin modellenmesinde kullanıldığı için çözümlerinin elde edilmesi önemlidir. Bununla birlikte gecikmeli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için kullanılan araçlar, çözümlerin kapalı formlarının haricinde, mevcut problemlerin ancak sınırlı bir alt kümesi için uygulanmaya elverişlidirler. Bu nedenle, pratikte yaklaşık çözüm elde etme önem kazanır. Bir sonraki bölümde, bazı gecikmeli diferansiyel denklem tipleri için nümerik çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz ve farklı yöntemler için elde ettiğimiz sonuçları birbiriyle karşılaştıracacağız.

Bölüm 3

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kullanılan, Euler (1768), Runge (1895) ve Heun (1900) tarafından önerilmiş yöntemleri, gecikmeli diferansiyel denklemler için uyarlayacağız. Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur (Hairer, Nørsett, & Wanner, 2000).

Çözümlerimizde adım aralıklarımız $h_n > 0$ olmak üzere, $n = 0, 1, \dots, N$ için $t_{n+1} = t_0 + n * h_n$ noktalarında çözüm hesaplayacağız. Burada t_n noktasındaki gerçek çözüm $y(t_n) = y_n$ için, $\tilde{y}(t_n) = \tilde{y}_n$ yaklaşık çözümünü belirtecektir.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm metotlarının bazı temel özelliklerini örneklemek ve adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan nümerik metotlar ile aralarındaki farkı göstermek için sabit $\tau = 1$ gecikme mik-

tarına sahip,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-1)), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. (3.0.1) denklemini nümerik olarak çözmek için en doğal yöntem; gecikme miktarı $\tau = 1$ 'e eşit veya daha küçük adım aralıkları oluşturulması ve her bir adım aralığı üzerinde (3.0.1) denkleminde elde edilen adi diferansiyel denklemin t 'ye göre integre edilmesidir. (3.0.1) denkleminde bir adi diferansiyel denklem elde edebilmek için, değeri ya $\phi(t-1)$ başlangıç fonksiyonu ile ya da uygulanan metot yardımıyla bir önceki adımda elde edilen yaklaşık değer ile hesaplanan $y(t-1)$ gecikme miktarı, (3.0.1) denkleminde çıkarılır. Böylece $(n+1)$. adımda,

$$\begin{cases} \tilde{y}'_{n+1}(t) = f(t, \tilde{y}_{n+1}(t), z(t-1)), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n, \end{cases} \quad (3.0.2)$$

elde edilir. (3.1.3) denkleminde

$$z(s) = \begin{cases} \phi(s), & s \leq 0, \\ \eta(s), & 0 \leq s \leq t_n, \end{cases} \quad (3.0.3)$$

olarak verilir.

Bu yaklaşımın özelliği; adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan metotlarda sadece düğüm noktalarında $f(t, y)$ fonksiyonun yaklaşık değerlerine ihtiyaç duyulurken, (3.1.3) ve (3.3.1) denklemini çözmek için kullanılan bir nümerik metotta, düğüm noktaları haricinde bazı $t-1$ noktalarında $\eta(t)$ yaklaşık değerine ihtiyaç duyulur. Ortaya çıkan bu sorunu gidermek için, yani bahsedilen değerleri elde edebilmek için, interpolasyona ihtiyaç duyacağız. Bu da gösterir ki; gecikmeli bir diferansiyel denklemin nümerik çözümünün istenilen düzeyde olabilmesi için,

$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$ denklemi ve $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonuna bağlı olarak uygulanacak yöntemin seçimi çok önemlidir.

3.1 Euler Metodu

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için gerçekleştirilen ilk yaklaşım, 1950'li yılların öncesine dayanan ve adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kullanılan bir metodu baz alır. Bu metod Euler yöntemi olarak adlandırılır ve bilinen en basit yaklaşımdır. Euler yönteminde,

$f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ olmak üzere,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi için, Euler metodu, $\forall t_n \in \Delta$ için, ya $t_n - \tau(t_n) < t_0$ veya $t_n - \tau(t_n) \in \Delta$ olacak şekilde bir $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ parçalanışı mevcutsa uygulanabilir. Bu durumda Δ parçalanışı üzerinde, bazı $q < n$ tam sayıları için adım adım

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_{n+1}f(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_q) \quad (\text{Açık Euler}), \quad (3.1.2)$$

işlemi yürütülür.

El'sgolt's(1964) tarafından tanıtılan bu yaklaşımın kullanımı, Δ parçalanışı üzerine konulan sınırlamalardan dolayı pratik değildir. Δ parçalanışı üzerine böyle bir sınırlama konulmadığında, bazı $t_n \in \Delta$ noktaları için $t_n - \tau(t_n)$ noktalarının parçalanış içine düşmediğini görürüz ve bu da bazı $q < n$ tamsayıları için \tilde{y}_q değerlerini hesaplayamamız anlamına gelir. Bu nedenle $[t_0, t_f]$ kapalı

aralığı üzerinde, kesin küçük adım aralıkları h ile bir Δ parçalanışı oluşturmak için izlenebilecek en iyi strateji, t_0 noktasından başlayarak bu aralık üzerinde süreksizliği sağlayan tüm noktaları belirleyip, bunları Δ içerisine eklemektir. Daha sonra t_f noktasından geriye doğru istenilen maksimum sayıda adım kadar geriye gidilir. Bu işlem Δ parçalanışı üzerinde herhangi bir t_n noktası için $t_n - \tau(t_n) > t_0$ değerinin oluşmasını sağlar. Böylece maksimum adım aralığı h için bile, Δ uygun yakınsamayı sağlayacak sonlu sayıda eleman içerir.

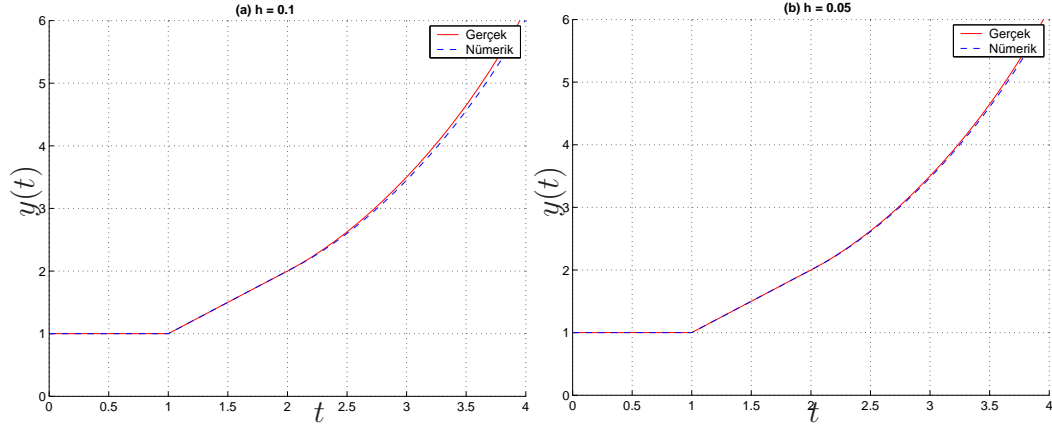
Eğer (3.1.1) denklemi ile verilen gecikmeli diferansiyel denklemde, gecikme miktarı τ sabit ise bu durumda bazı m tam sayıları için adım aralığı $h = \frac{\tau}{m}$ sabit olarak belirlenebilir. Bu durumda Euler metodu (3.1.3) denklemi ile verilen forma dönüşür.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-m}), & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{y}(t_n) = \phi(t_n), & -m \leq n \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Bölüm 2’de (2.2.4) denklemi ile verilen gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümünü, $\forall N \geq 1$ ve $N \geq t \geq N + 1$ için $y(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(t-j)^j}{j!}$ olarak bulmuştuk. Bu gecikmeli diferansiyel denklemin $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ sabit adım uzunlukları ile $[0, 4]$ aralığı üzerindeki nümerik çözümleri ise Tablo (3.3) ile verilmiştir. Euler yöntemini gecikmeli diferansiyel denklemlere uyarlayan El’sgolt’s(1964) bu yöntemin yakınsaklığı üzerine bir araştırma yapmamıştır. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için ele alacağımız metotların yakınsaklığını bir sonraki kısımda inceleyeceğiz.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1-m}), & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{y}(t_n) = \phi(t_n), & -m \leq n \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

(3.1.5) denklemi ise kapalı Euler metodu olarak bilinir. Denklemden \tilde{y}_{n+1} argümanı



Şekil 3.1: (a) $h = 0.1$ ve (b) $h = 0.05$ ve $t \in [0, 4]$ için (2.2.4) denkleminin Açık Euler yöntemi ile çözümleri

yerine açık Euler metodu yardımı ile $\tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-m})$ yazarak,

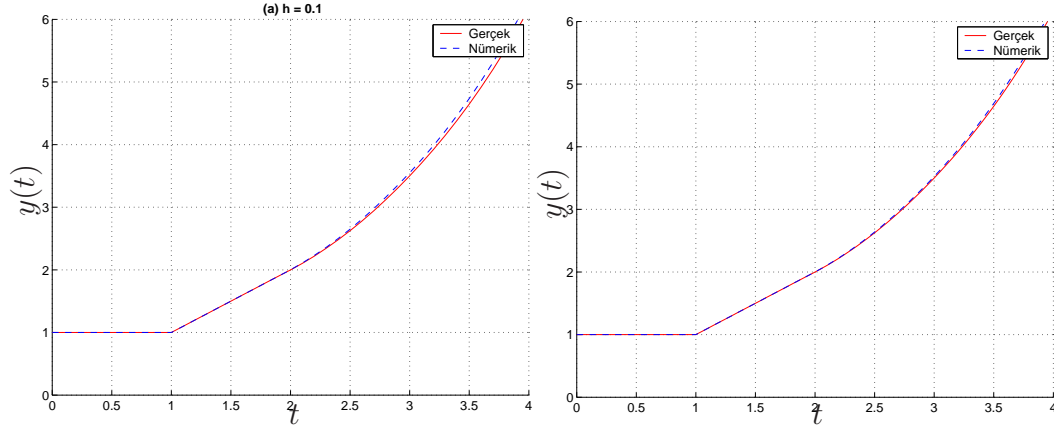
$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_{n+1}, \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-m}), \tilde{y}_{n+1-m}), & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{y}(t_n) = \phi(t_n), & -m \leq n \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

denklemini elde ederiz. Şekil 3.2, (2.2.4) gecikmeli diferansiyel denkleminin kapalı Euler yöntemi ile çözümlerini göstermektedir.

3.2 Trapez Yöntemi

Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kullanılan Trapez yöntemini, gecikmeli diferansiyel denklemlere uyarlamak için (3.1.2) ve (3.1.5) eşitliklerini taraf tarafa toplayabiliriz. Gösterimi basitleştirmek için

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-m}), \\ k_2 &= f(t_{n+1}, \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-m}), \tilde{y}_{n+1-m}), \end{aligned}$$



Şekil 3.2: (a) $h = 0.1$ ve (b) $h = 0.05$ ve $t \in [0, 4]$ için (2.2.4) denkleminin Kapalı Euler yöntemi ile çözümleri

olarak kabul edelim. Bu durumda Trapez metodu

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h \left[\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right], & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{y}(t_n) = \phi(t_n), & -m \leq n \leq 0, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

eşitliği ile verilir.

Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde Açık, Kapalı Euler ile Trapez yöntemini bir arada veren yöntem, θ -yöntemi olarak bilinir ve (3.2.2) denklemi ile verilir.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h[(1 - \theta)k_1 + \theta k_2], & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{y}(t_n) = \phi(t_n), & -m \leq n \leq 0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) denkleminde $\theta = 0$ için Açık Euler yöntemi, $\theta = 1$ için Kapalı Euler yöntemi ve $\theta = 0.5$ için Trapez yöntemi elde edilir.

3.3 Runge-Kutta Yöntemleri

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümü için,

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f(t, \tilde{y}_{n+1}(t), z(t - \tau(t, \tilde{y}_{n+1}(t))))), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ \tilde{y}_{n+1}(t) = \phi(t_n), \end{cases} \quad (3.3.2)$$

ve

$$z(s) = \begin{cases} \phi(s), & s \leq t_0, \\ \eta(s), & t_0 \leq s \leq t_n, \\ \tilde{y}_{n+1}(s), & t_n \leq s \leq t_{n+1}, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

yaklaşımını ele alalım. (3.3.1) denkleminde $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ve

$\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ fonksiyonları tanımlı oldukları aralık üzerinde sürekli ve diferansiyellenebilir olsun. Aynı zamanda f fonksiyonunun tüm argümanlarına göre kısmi türevlerinin $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ üzerinde düzgün sınırlı olsun. İşlemlerimizi basitleştirmek için $\tau > 0$ gecikme miktarını sabit kabul edelim. Bu varsayımlar altında, (3.3.1) denklemi ile verilen $y : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ için her bir $[(n-1)\tau, n\tau]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) aralığında sürekli ve diferansiyellenebilir bir çözümünü Runge-Kutta yöntemleri ile bulmaya çalışacağız.

Adi diferansiyel denklemler için klasik Runge-Kutta(RK) metotları Butcher tablosu (Bkz Hairer et al. (2000)) ile elde edilir.

Butcher tablosunda $i, j = 1, 2, \dots, s$ için, a_{ij}, b_j, c_i reel sayılar olmak üzere, $1 \leq i \leq s$ için, $t_{n+1}^i = t_n + c_i h_{n+1}$, $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{j=1}^s b_j = 1$ olarak verilir ve $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ile ifade edilir. $j \geq i$ için $a_{ij} = 0$ ise elde edilen Runge-Kutta

$$\frac{c_i \mid a_{ij}}{\mid b_j} \equiv \frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}}{\mid \mathbf{b}}$$

Çizelge 3.1: Butcher Tablosu

metodları açık, aksi halde kapalı olur. Butcher tablosunun oluşturulmasından sonra $y' = f(t, y(t)), y(t_0 = y_0)$ biçimindeki bir adi diferansiyel denklem için, s-basamaklı bir Runge-Kutta formülü

$$\begin{cases} K_{n+1}^i = f\left(t_{n+1}^i, \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j\right), \\ \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

denklem sistemi ile elde edilir.

RK metotları gecikmeli diferansiyel denklemlere aşağıdaki gibi uyarlanabilir. $i, j = 1, 2, \dots, s$ için $b_i(0) = 0$, $b_i(1) = b_i$ ve $b_i(\theta)$ katsayıları uygun seçilmiş polinomlar olmak üzere,

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n+1}^i, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (3.3.5)$$

için,

$$\begin{cases} K_{n+1}^i = f(t_{n+1}^i, u_{n+1}^i, \eta(t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, u_{n+1}^i))), \\ u_{n+1}^i = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j, \end{cases} \quad (3.3.6)$$

denklem sistemi gecikmeli diferansiyel denklemler için s-basamaklı Runge-Kutta metodunun genel formudur ve RK metotlarının sürekli bir uzantısı olarak adlandırılır (Bellen & Zennaro, 2003). (3.3.6) denkleminde $1 \leq i \leq s$ için u_{n+1}^i değerlerini hesaplama, metodun iç basamakları olarak adlandırılır ve $\tilde{y}(t_{n+1}^i) = \tilde{y}(t_n + c_i h_{n+1})$ için yaklaşık değer olarak görülebilir. Burada c_i katsayıları Butcher tablosundaki keyfi reellerdir.

Denklemdede $1 \leq i \leq s$ için $\eta(s)$ ise $\tilde{y}(t_n + c_i h_{n+1} - \tau)$ için yaklaşık değerdir. $t_n + c_i h_{n+1} - \tau$ noktasında interpolasyon ile yaklaşık değer hesaplanmasını sağlamak amacıyla, In't Hout (2001) tarafından bir interpolasyon yöntemi verilmiştir. Literatürde $t_n + c_i h_{n+1} - \tau$ noktasında yaklaşık \tilde{y} değerinin hesaplanabilmesi için, Barwell (1975), Al-Mutib (1977), Zennaro (1988), Baker and Paul (1994), Karoui (1992) ve Hayashi (1996) tarafından farklı interpolasyon yöntemlerinin geliştirildiği görülebilir (İsmail, Al-Khasawneh, & Suleiman, 2003; Bellen & Zennaro, 2003).

(3.3.5) denkleminde, özel olarak $\theta = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= \eta(t_{n+1}) \\ &= \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i K_{n+1}^i,\end{aligned}$$

düğüm noktaları elde edilir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler için tüm RK metotlarını sadece u_{n+1}^i değerlerini kullanarak oluşturmak mümkün değildir. Eğer bazı i değerleri için $z(s)$ nin $t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, u_{n+1}^i)$ argümanı $[t_n, t_{n+1}]$ aralığı içine düşüyorsa, (3.3.5) denkleminde verilen θ değeri,

$$\theta = \theta_{n+1}^i = c_i - \frac{\tau(t_{n+1}^i, u_{n+1}^i)}{h_{n+1}},$$

ile hesaplanır ve metodun iç basamakları,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+1}^i &= \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s b_j(\theta_{n+1}^i) K_{n+1}^j \\ &= \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s b_j \left(c_i - \frac{\tau(t_{n+1}^i, u_{n+1}^i)}{h_{n+1}} \right) K_{n+1}^j,\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

haline dönüşür ve böylece RK metodu

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{n+1}^i = f(t_{n+1}^j, u_{n+1}^j, \tilde{u}_{n+1}^j), \\ u_{n+1}^i = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} K_{n+1}^j \\ t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{k=1}^s a_{ik} K_{n+1}^k) \leq t_n \quad \text{ise,} \\ \tilde{u}_{n+1}^i = \eta \left(t_{n+1}^i - \tau(t_{n+1}^i, \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{k=1}^s a_{ik} K_{n+1}^k) \right), \\ \text{aksi halde,} \\ \tilde{u}_{n+1}^i = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s b_j \left(c_i - \frac{\tau(t_{n+1}^i, \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{k=1}^s a_{ik} K_{n+1}^k)}{h_{n+1}} \right) K_{n+1}^j, \end{array} \right. \quad (3.3.8)$$

halini alır. Bu durumda kullanılan Butcher tablosu alt üçgen matrisi olsa bile, gecikmeli diferansiyel denklemler için uygulanan RK-metodu kapalı forma dönüşür. Bu problem eğer h adım aralığı büyükse sabit gecikme miktarına sahip diferansiyel denklemlerde bile oluşabilir.

Literatürdeki bilinen metotların ve mevcut yazılımların çoğu bu yaklaşımı baz alır. (3.3.8) denkleminde de görüldüğü gibi bütün RK metotlarını ifade edebilmek için sadece u_i^{n+1} değerlerinin elde edilmesi yetmez, ek olarak \tilde{u}_i^{n+1} değerleri de hesaplanmalıdır. Bu durumda $\eta(t)$ değeri (3.3.9) denkleminde verildiği gibi, $\tilde{y}_n (= \eta(t_n))$ ve $i = 1, \dots, s$ için, $c_i \neq 0$ olmak üzere, s adet $\tilde{u}_{n+1}^i (= \eta(t_n + c_i h_{n+1}))$ değerleri kullanılarak Lagrange interpolasyonu yardımıyla hesaplanabilir.

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \ell_0(\theta) \tilde{y}_0 + \sum_{i=1}^s \ell_i(\theta) u_{n+1}^i, \quad (3.3.9)$$

Bu denklemde $c_0 = 0$ ve $i = 1, \dots, s$ için c_i katsayılarına bağlı olarak $\ell_j(\theta)$ ($j = 0, \dots, s$) değerleri Lagrange polinom katsayılarıdır.

Tanım 3.3.1 (3.3.1) gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümü için kullanılan

bir nümerik metot, $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ ve $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - \tilde{y}_n\| = O(h^p),$$

ise p 'inci mertebeden discrete globaldir.

Tanım 3.3.2 (3.3.1) gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümü için kullanılan

bir nümerik metot, $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ ve $q \geq 1$ olmak üzere,

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_N} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^q),$$

ise q 'ncu mertebeden düzgün globaldir.

Teorem 3.3.1 (3.3.1) gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümü için kullanılan

bir nümerik metot p 'inci mertebeden discrete ve q 'ncu mertebeden düzgün ise, bu

metot $q' = \min \{p, q + 1\}$ inci mertebeden discrete global ve düzgün globaldir, yani

$h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ olmak üzere,

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - \tilde{y}_n\| = O(h^{q'}),$$

ve

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_N} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'}),$$

ise metod $q' = \min \{p, q + 1\}$ inci mertebeden discrete global ve düzgün global yakınsama gösterir.

3.3.1 RK4 Metodu

Bu kısımda, Runge-Kutta formüllerinin gecikmeli diferansiyellere uyarlanmasını örneklemek amacıyla, klasik olarak bilinen $p = 4$ 'üncü mertebeden discrete global Runge-Kutta 4 formüllerini vereceğiz.

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Çizelge 3.2: Runge-Kutta 4 metodu için Butcher Tablosu

(3.3.1) tablosu ve

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(\theta) = \left(\frac{2}{3}\theta^2 - \frac{3}{2}\theta + 1 \right) \theta \\ b_2(\theta) = \left(-\frac{2}{3}\theta + 1 \right) \theta^2 \\ b_3(\theta) = \left(-\frac{2}{3}\theta + 1 \right) \theta^2 \\ b_4(\theta) = \left(\frac{2}{3}\theta - \frac{1}{2} \right) \theta^2, \end{array} \right.$$

polinomları için,

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^4 b_i(\theta) K_{n+1}^i, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

elde edilir. Bu durumda Tablo 3.3.1 ve (3.3.8) denklem sisteminden görülebileceği gibi, $i = 1$ için, $a_{1j} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} u_n^i &= \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^4 a_{ij} K_{n+1}^j \\ &= \tilde{y}_n \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$K_{n+1}^1 = f(t_n, \tilde{y}_n, \eta(t_n - \tau(t_n, \tilde{y}_n))),$$

bulunur.

$i = 2$ için, $t_n + \frac{1}{2}h_{n+1} - \tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^1) \leq t_n$ ise,

$$\tilde{u}_{n+1}^2 = \eta(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1} - \tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^1))$$

aksi halde

$$\tilde{u}_{n+1}^2 = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^4 b_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^1)}{h_{n+1}} \right) K_{n+1}^i,$$

olmak üzere

$$K_{n+1}^2 = f(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^1, \tilde{u}_{n+1}^2)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $i = 3$ için, $t_n + \frac{1}{2}h_{n+1} - \tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^2) \leq t_n$

ise,

$$\tilde{u}_{n+1}^3 = \eta(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1} - \tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^2))$$

aksi halde

$$\tilde{u}_{n+1}^3 = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^4 b_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}h_{n+1}K_{n+1}^2)}{h_{n+1}} \right) K_{n+1}^i$$

olmak üzere

$$K_{n+1}^3 = f(t_n + \frac{1}{2}h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^2, \tilde{u}_{n+1}^3)$$

olarak bulunur.

$i = 4$ için, $t_n + h_{n+1} - \tau(t_n + h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^3) \leq t_n$ ise,

$$\tilde{u}_{n+1}^4 = \eta(t_n + h_{n+1} - \tau(t_n + h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^3))$$

aksi halde

$$\tilde{u}_{n+1}^4 = \tilde{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^4 b_i \left(1 - \frac{\tau(t_n + h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^3)}{h_{n+1}} \right) K_{n+1}^i$$

olmak üzere

$$K_{n+1}^4 = f(t_n + h_{n+1}, \tilde{y}_n + h_{n+1}K_{n+1}^3, \tilde{u}_{n+1}^4),$$

elde edilir. Çizelge 3.4'de (2.2.4) denkleminin 4. mertebeden Lagrange interpolasyonu ile 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri

verilmiştir. Çizelgeden görüldüğü gibi, (2.2.4) denkleminin nümerik çözümleri için uygulanan metot istenilen sonuçları vermemektedir, çünkü metot belirtilen koşullar için kararlı değildir. Runge-Kutta metotlarının kararlılık analizi Bölüm IV'de verilmiştir.

3.4 Gecikme Terimi İçeren İntegro-diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

Bölüm 2.4'de lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin tanımlarını vermiştik. Bu kısımda (3.4.1) formundaki gecikmeli lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerini örnekleyeceğiz.

$$\begin{cases} y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), \int_{t-\tau}^t K(t, s, y(s)) ds \right), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) denklemi için $t \in [0, T]$, $T < \infty$ olduğunu varsayacağız.

$$\begin{cases} y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), \int_0^t K(t, s, y(s)) ds \right), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

(3.4.1) formundaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümleri için çalışmalar mevcuttur (bkz Erdem (2004)).

Örnek 3.4.1

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{e}y(t-1) + 2 \int_{t-1}^t e^{-(t-s)}y(s)ds, & t \geq 0, \\ y(t) = e^t, & t \leq 0, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Çizelge 3.3: (2.2.4) Gecikmeli diferansiyel denkleminin nümerik çözümleri

t	y	Açık Euler				Kapalı Euler			
		$h = 0.1$		$h = 0.05$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
		\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata
1.0	1.000000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000
1.5	1.500000	1.500000	4.440892e-016	1.500000	4.440892e-016	1.500000	4.440892e-016	1.500000	4.440892e-016
2.0	2.000000	2.000000	8.881784e-016	2.000000	8.881784e-016	2.000000	8.881784e-016	2.000000	8.881784e-016
2.5	2.625000	2.600000	2.500000e-002	2.612500	1.250000e-002	2.650000	2.500000e-002	2.637500	1.250000e-002
3.0	3.500000	3.450000	5.000000e-002	3.475000	2.500000e-002	3.550000	5.000000e-002	3.525000	2.500000e-002
3.5	4.645833	4.560000	8.583333e-002	4.602500	4.333333e-002	4.735000	8.916667e-002	4.690000	4.416667e-002
4.0	6.166667	6.020000	1.466667e-001	6.092500	7.416667e-002	6.320000	1.533333e-001	6.242500	7.583333e-002
t	y	Trapezler				DDE23			
		$h = 0.1$		$h = 0.05$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
		\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata
1.0	1.000000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.5	1.500000	1.500000	4.440892e-016	1.500000	4.440892e-016	1.500000e+000	0.000000e+000	1.500000e+000	0.000000e+000
2.0	2.000000	2.000000	8.881784e-016	2.000000	8.881784e-016	2.000000e+000	0.000000e+000	2.000000e+000	0.000000e+000
2.5	2.625000	2.625000	1.332268e-015	2.625000	8.881784e-016	2.625000e+000	0.000000e+000	2.625000e+000	0.000000e+000
3.0	3.500000	3.500000	2.220446e-015	3.500000	8.881784e-016	3.500000e+000	4.440892e-016	3.500000e+000	4.440892e-016
3.5	4.645833	4.646250	4.166667e-004	4.645938	1.041667e-004	4.645833e+000	8.881784e-016	4.645833e+000	8.881784e-016
4.0	6.166667	6.167500	8.333333e-004	6.166875	2.083333e-004	6.166667e+000	0.000000e+000	6.166667e+000	0.000000e+000

Çizelge 3.4: (2.2.4) Gecikmeli diferansiyel denkleminin Runge Kutta ile nümerik çözümleri

t	y	RK2				RK4			
		$h = 0.1$		$h = 0.05$		$h = 0.1$		$h = 0.05$	
		\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata	\tilde{y}	hata
1.0	1.000000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000
1.5	1.500000	1.500000	4.440892e-016	1.500000	4.440892e-016	1.000000	5.000000e-001	1.000000	5.000000e-001
2.0	2.000000	2.000000	8.881784e-016	2.000000	8.881784e-016	1.166667	8.333333e-001	1.166667	8.333333e-001
2.5	2.625000	2.625000	1.332268e-015	2.625000	8.881784e-016	1.333333	1.291667e+000	1.333333	1.291667e+000
3.0	3.500000	3.500000	2.220446e-015	3.500000	8.881784e-016	1.725000	1.775000e+000	1.723611	1.776389e+000
3.5	4.645833	4.646250	4.166667e-004	4.645938	1.041667e-004	2.116667	2.529167e+000	2.113889	2.531944e+000
4.0	6.166667	6.167500	8.333333e-004	6.166875	2.083333e-004	2.689444	3.477222e+000	2.682662	3.484005e+000

Çizelge 3.5: (3.4.3) denkleminin θ -metodu ile nümerik çözümünden kaynaklanan hatalar $|\tilde{y}_i - y_i|$

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.2	3.2220e-04	8.0395e-05	2.0089e-05
0.4	9.8485e-04	2.4566e-04	6.1380e-05
0.6	2.0579e-03	5.1319e-04	1.2822e-04
0.8	3.6471e-03	9.0932e-04	2.2718e-04
1.0	5.8992e-03	1.4706e-03	3.6738e-04
1.2	8.9700e-03	2.2356e-03	5.5847e-04
1.4	1.3079e-02	3.2591e-03	8.1412e-04
1.6	1.8557e-02	4.6234e-03	1.1548e-03
1.8	2.5820e-02	6.4316e-03	1.6064e-03
2.0	3.5394e-02	8.8148e-03	2.2016e-03

(3.4.3) denkleminin analitik çözümü $y(t) = e^t$ olur. Denklem θ -metodu ile nümerik çözümünden elde edilen hatalar Tablo 3.4 ile verilmiştir. Metodun yakınsama mertebesinin iki olduğu tablodan açıkça görülmektedir.

Gecikme terimi içeren fonksiyonel diferansiyel denklemler ile nümerik modelleme teknikleri üzerinde hala çalışılan bir alandır (Meinardus & Nürnberger, 1984; Baker, Bocharov, Filiz, Ford, Paul, Rihan, Tang, Thomas, Tian, & Willé, 1998b; Baker, Bocharov, Filiz, Ford, Paul, Rihan, Tang, Thomas, Tian, & Wille, 1998a). Filiz (2000a), Lotka-Volterra sistemleri üzerinde çalışmış ve aynı zamanda gecikme terimi içeren Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümleri ile kararlılıklarını incelemiştir (Filiz, 2000a,b; Baker, Bocharov, Filiz, Ford, Paul, Rihan, Tang, Thomas, Tian, & Wille, 2001; Filiz, 2004).

Bölüm 4

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kararlılık analizi üzerinde durulacaktır. Literatürde gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin ve salınımlarını hakkında çalışmalar mevcuttur (Gopalsamy, 1992; Kaplan & Yorke, 1974). Bölüm 1’de gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin belli koşullar altında periyodik salınıma sahip olduğu, belli koşullar altında ise kaotik sonuçlar doğurduğu gözlemlenmişti (bkz Şekil 1.1, Şekil 1.2 ve Şekil 1.3).

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılık analizinde ise iki farklı yaklaşım söz konusudur. İlk yaklaşım, gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerini kararlı kılacak şekilde $f(t, y(t), y(t - \tau))$ fonksiyonu üzerine konulacak koşulların bulunmasıyla ilgilidir. İkinci yaklaşım ise, istenilen kararlılık düzeyini sağlayacak şekilde $f(t, y(t), y(t - \tau))$ fonksiyonu üzerine konulan koşulların zayıflatılması çalışmasıdır. Bu konularda geniş bir araştırma söz konusu olmasına rağmen, bu alan henüz tam anlamıyla açıklığa kavuşturulmuş değildir (Bellen & Zen-

naro, 2003). Ancak bu bölümde verilecek bazı tanımlar, uygulanan nümerik metotların sınıflandırılması için yardımcı olacaktır. Bu amaçla, (4.0.1) ile verilen test denklemini kullanarak adi diferansiyel denklemler için A-kararlılık tanımını genelleştireceğiz.

$$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau). \quad (4.0.1)$$

Kararlılık kavramı, gecikmeden bağımsız kararlılık (stability for all delays) ve gecikmeye bağımlı kararlılık (stability for fixed delays) olarak ele alınır. Gecikmeden bağımsız kararlı problemlerin sınıfı, gecikmeye bağımlı kararlı problemlerin sınıfından daha küçüktür. Aynı zamanda bu sınıfı karakterize etmek daha kolaydır. Karşıt olarak, gecikmeye bağımlı kararlı problemlerin sınıfını karakterize etmek ve kararlı nümerik metotlar bulmak daha zordur.

Nümerik metotların amaçlarından biri de, $[t_0, t_f]$ aralığı üzerinde tanımlı bir $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ parçalanışı üzerinde, mümkün olan en büyük adım uzunluğu ile (4.0.2) denkleminin çözümünde oluşan hata büyümesinin kontrol altına alınmasıdır. Yani nümerik metotların kararlılık analizi yapılırken, sadece hatanın kaynağı değil, aynı zamanda $t_i \rightarrow \infty$ iken global hatanın davranışı da incelenir. Bunun nedeni, $e^h = y(t_i) - \tilde{y}(t_i)$ ile verilen global hatanın davranışının, gecikmeli diferansiyel denklemin çözümünün davranışına bağlı olmasıdır.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0. \end{cases} \quad (4.0.2)$$

Tanım 4.0.1 *h adım uzunluğu için, $t_i \rightarrow \infty$ iken $\tilde{y}^h(t_i) \rightarrow 0$ koşulu sağlanıyorsa, (4.0.1) test denklemi ile verilen sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklemin çözümü için kullanılan nümerik metot mutlak kararlıdır denir.*

Eğer bir nümerik metodun mutlak kararlılığı h adım uzunluğundan bağımsız

ise, adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için kullanılan metotların A-kararlılık tanımını gecikmeli diferansiyel denklemlere uyarlayabiliriz.

Tanım 4.0.2 *Herhangi bir $h > 0$ için, (4.0.1) test denkleminin $t_i \rightarrow \infty$ iken $\tilde{y}^h(t_i) \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan nümerik çözümleri için kullanılan nümerik metot DA-kararlıdır denir.*

DA-kararlılık tanımı, $t_i \rightarrow \infty$ iken $\tilde{y}^h(t_i) \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan çözümler için (4.0.1) denklemindeki λ ve μ katsayıları üzerindeki gerek ve yeter koşulların bilinmesine bağlıdır. $mh = 1$, $m \in Z^+$ olduğunu varsayarsak, $\lambda = 0$ ve μ kompleks değerleri için DA-kararlılık tanımını aşağıdaki gibi uyarlayabiliriz.

Tanım 4.0.3 $\lambda = 0$ ve $\mu = r.e^{i\theta}$ olsun. $mh = 1$, $m \in Z^+$ koşulunu sağlayan her h için $t_i \rightarrow \infty$ iken $\tilde{y}^h(t_i) \rightarrow 0$ ise (4.0.1) test denkleminin çözümü için nümerik metot Q-kararlıdır denir.

Tanım 4.0.4 $Re(\lambda) < -|\mu|$ koşulu altında, $mh = 1$, $m \in Z^+$ koşulunu sağlayan her h için $t_i \rightarrow \infty$ iken $\tilde{y}^h(t_i) \rightarrow 0$ ise (4.0.1) test denkleminin çözümü için nümerik metot P-kararlıdır denir.

$$y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau),$$

denkleminde genellikle bir şey kaybetmeden kolaylık sağlaması amacıyla $\tau = 1$ seçelim. Bu durumda (4.0.1) denkleminin $\gamma = \alpha + i\beta$ olmak üzere, $y(t) = e^{\gamma t}$ formundaki çözümlerini arayalım. $\mu \neq 0$ için,

$$\gamma - \lambda - \mu e^{-\gamma} = 0, \quad (4.0.3)$$

karakteristik denkleminde, (4.0.1) denkleminin sonsuz çözüme sahip olduğu rahatlıkla görülebilir. Gerçekten λ sabit olduğundan, $|\gamma|$ değeri çok büyükse, $\mu e^{-\gamma}$ değeri de çok büyük olur. Öyleyse

$$\gamma \approx \mu e^{-\gamma} = 0, \quad (4.0.4)$$

olduğu söylenebilir. (4.4.2) denklemi $\gamma = \alpha + i\beta$ kompleks sayısının sanal eksene yakın olmasını gerektirir. Bundan dolayı $|\gamma| \approx |\beta|$ ve böylece $|\beta| \approx |\mu|e^{-\alpha}$ elde edilir. O halde (4.4.1) karakteristik denkleminin kökleri $-\alpha = \log |\beta| - \log |\mu|$ eğrisi üzerinde olacaktır. Aynı zamanda (4.4.2) denkleminden $\beta > 0$ için $\mu e^{-i\beta}$ değerinin argümanının $\frac{\pi}{2}$ olduğunu görebiliriz. Böylece $k = 1, 2, \dots$ için,

$$\beta \approx \arg \mu - \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

olur.

Yukarıda incelediğimiz gibi (4.0.1) denkleminin çözümleri, γ değerinin sanal eksene yakın olduğunu gösterdiğinden, θ reel olmak üzere, $\gamma = i\theta$ için (λ, μ) katsayılarının durumlarını inceleyelim. γ 'nın bu değerini karakteristik denklemde yerine yazacak olursak, $\theta = 0$ ise,

$$\lambda = -\mu,$$

ve $\theta \neq 0$ ise,

$$\lambda = i\theta - \mu e^{-i\theta},$$

koşullarını elde ederiz. Bu koşulları düzenlersek,

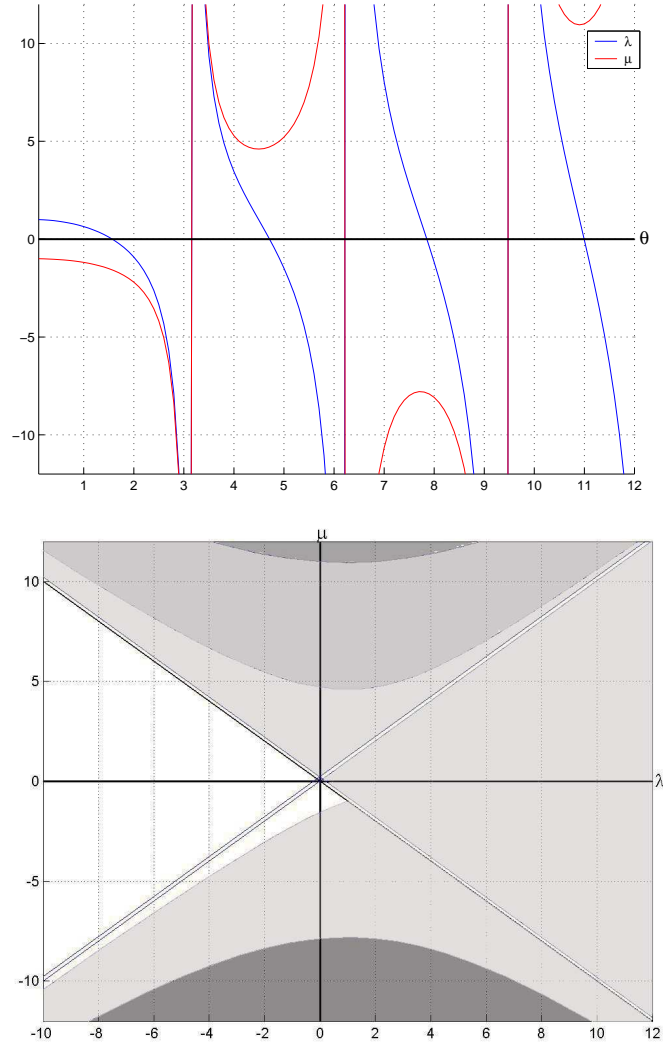
$$\lambda = \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta},$$

ve

$$\mu = -\frac{\theta}{\sin \theta},$$

koşullarını elde ederiz. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ seçersek, $\lambda = 0$ olur ve bu durumda $y'(t) = \mu y(t - 1)$ gecikmeli diferansiyel denklemi $-\frac{\pi}{2} \leq \mu \leq 0$ için kararlıdır.

Şekil 4.1 $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ gecikmeli diferansiyel denkleminin kararlılık bölgesini verir.



Şekil 4.1: $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denkleminin kararlılık bölgesi.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin asimptotik kararlılık bölgelerinin (S_τ) belirlenmesi üzerinde El'sgol'ts, Norkin, Baker, Ford, Hayes, Guglielmi ve Harier tarafından reel ve kompleks katsayılar için çalışma gerçekleştirmişlerdir (Bellen & Zennaro, 2003). $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için (4.0.1) denkleminin asimptotik kararlılık bölgesi özetle,

$$S_\tau = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda < -\mu, \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} < \frac{1}{\tau} \arccos \left(-\frac{\lambda}{\mu} \right) \right\},$$

ile verilir. Böylece sabit gecikme miktarına sahip $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t-\tau)$ denklemi için,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in S_\tau,$$

ile asimptotik kararlılık bölgesi verilir. $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ için asimptotik kararlılık bölgesi

$$S_\tau = \{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \mid \Re(\lambda) < -|\mu| \text{ veya } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda + \mu \neq 0 \},$$

ile verilir ve

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in S_\tau,$$

elde edilir (Bellen & Zennaro, 2003).

Bundan sonraki kısımlarda (4.0.1) test denklemi üzerinde uygulanacak olan nümerik metotların kararlılık analizi üzerinde durulacaktır.

4.1 Açık Euler Yöntemi için Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.0.1) test denklemi üzerinde, $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf_n$ formülü ile verilen Açık Euler yönteminin kararlılık analizi üzerinde duracağız. Gösterim kolaylığı açısından $\tau = 1$ seçeceğiz ve buna bağlı olarak sabit adım uzunluğu $h = \frac{\tau}{m}$,

$m \in \mathbb{N}^+$ olarak seçilecektir. (4.0.1) test denklemi üzerinde, Açık Euler yöntemini uygularsak,

$$\tilde{y}_{n+1} - \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right) \tilde{y}_n - \frac{\mu}{m} \tilde{y}_{n-m} = 0, \quad (4.1.1)$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Şimdi mümkün olan en büyük h adım uzunluğu için, yani $m = 1$ ve dolayısıyla $h = \tau$ için karakteristik denklemi inceleyelim. $m = 1$ için (4.1.1) ile verilen karakteristik denklem,

$$\tilde{y}_{n+1} - (1 + \lambda)\tilde{y}_n - \mu\tilde{y}_{n-1} = 0,$$

formuna dönüşür. Bu denklemi $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1 - \lambda$ ve $\gamma_2 = -\mu$ için yeniden düzenlersek,

$$\gamma_0\tilde{y}_{n+1} + \gamma_1\tilde{y}_n + \gamma_2\tilde{y}_{n-1} = 0, \quad (4.1.2)$$

karakteristik denklemini elde etmiş oluruz. (4.1.2) ile verilen karakteristik denklemi kısaca $\pi(r, \lambda, \mu) = \gamma_0 r^2 + \gamma_1 r + \gamma_2 = 0$ ile gösterecek olursak, maksimum adım uzunluğu h için (4.0.1) denkleminin kararlı olabilmesi $|r| = |e^{i\theta}| \leq 1$ koşulunun sağlanmasına bağlıdır. $r = e^{i\theta}$ için karakteristik denklemimiz $\gamma_0 e^{2i\theta} + \gamma_1 e^{i\theta} + \gamma_2 = 0$ haline dönüşür. Bu da

$$\gamma_0 \cos 2\theta + \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 = 0,$$

ve

$$\gamma_0 \sin 2\theta + \gamma_1 \sin \theta = 0,$$

eşitliklerinin sağlanması anlamına gelir.

$$\gamma_0 \sin 2\theta + \gamma_1 \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \text{ veya } 2\gamma_0 \cos \theta + \gamma_1 = 0,$$

$\sin \theta = 0 \Rightarrow |r| = |e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow r = \pm 1$ bulunur. Öyle ise karakteristik denklem, $r = 1$ için,

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad (4.1.3)$$

ve $r = -1$ için,

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad (4.1.4)$$

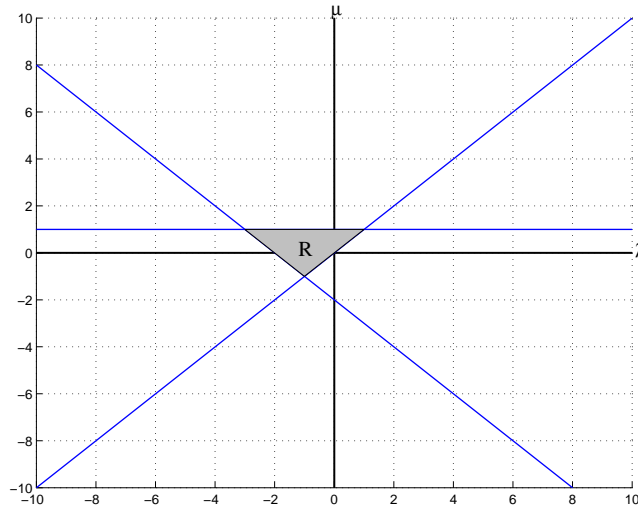
şekline dönüşür. $2\gamma_0 \cos \theta + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\gamma_1}{2\gamma_0}$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu değeri $\gamma_0 \cos 2\theta + \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 = 0$ denkleminde yazarsak, $\gamma_0(\gamma_2 - \gamma_0) = 0$ bulunur. $\gamma_0 \neq 0$ olduğundan,

$$\gamma_0 = \gamma_2, \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1 - \lambda$ ve $\gamma_2 = -\mu$ değerleri için, (4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.5) koşulları

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ \lambda - \mu = -2, \\ \mu = -1, \end{cases} \quad (4.1.6)$$

koşullarına indirgenir. Elde edilen bu koşullarla Euler yönteminin kararlılık bölgesi Şekil 4.2 ile verilmiştir. Benzer biçimde $m = 2$, yani $h = \frac{1}{2}$, için



Şekil 4.2: $\tau = 1$ ve $m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Açık Euler yönteminin kararlılık bölgesi.

$$\tilde{y}_{n+1} - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{y}_n - \frac{\mu}{2} \tilde{y}_{n-2} = 0,$$

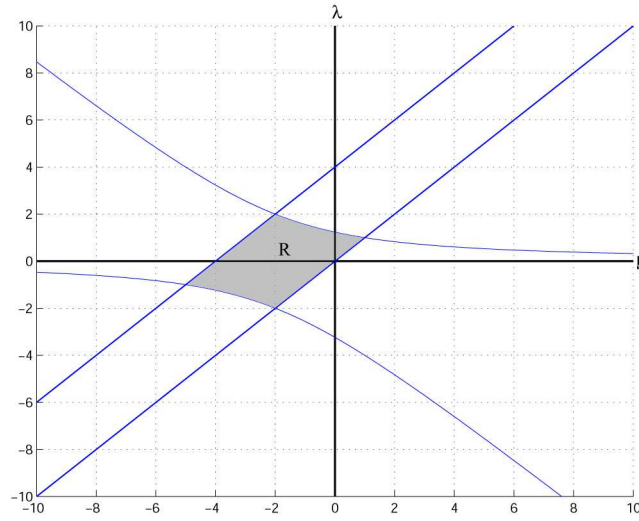
karakteristik denklemini elde ederiz. Bu denklemi $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1 - \frac{\lambda}{2}$ ve $\gamma_2 = -\frac{\mu}{2}$ için yeniden düzenlersek,

$$\gamma_0 \tilde{y}_{n+1} + \gamma_1 \tilde{y}_n + \gamma_2 \tilde{y}_{n-2} = 0, \quad (4.1.7)$$

karakteristik denklemini elde etmiş oluruz. (4.1.7) ile verilen karakteristik denklemi kısaca $\pi(r, \lambda, \mu) = \gamma_0 r^3 + \gamma_1 r^2 + \gamma_2 = 0$ ile gösterip $m = 1$ için ele aldığımız yöntemi tekrarlırsak,

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0, \\ \lambda - \mu = -4, \\ \lambda + 2\mu \pm \sqrt{(\lambda + 2)^2 + 4^2} + 2 = 0, \end{cases} \quad (4.1.8)$$

koşullarını elde ederiz. Böylece Şekil 4.3'de gösterildiği gibi Açık Euler için kararlılık bölgesini elde ederiz.



Şekil 4.3: $\tau = 1$ ve $m = 2$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Açık Euler yönteminin kararlılık bölgesi.

4.2 Kapalı Euler Yöntemi için Kararlılık Analizi

$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf_{n+1}$ formülü ile verilen Kapalı Euler yönteminin kararlılık analizi için aşağıdaki yolu izleyebiliriz. $m = 1$ alarak, ve gecikme miktarı τ 'dan bağımsız olarak,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + \tau(\lambda\tilde{y}_{n+1} - \mu\tilde{y}_n), \\ \tilde{y}_{n+1} &= \left(\frac{1 - \mu\tau}{1 - \lambda\tau}\right)\tilde{y}_n,\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $n = 0, 1, 2, \dots$ için;

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \left(\frac{1 - \mu\tau}{1 - \lambda\tau}\right)\tilde{y}_0, \\ \tilde{y}_2 &= \left(\frac{1 - \mu\tau}{1 - \lambda\tau}\right)^2\tilde{y}_0, \\ &\vdots \\ \tilde{y}_n &= \left(\frac{1 - \mu\tau}{1 - \lambda\tau}\right)^n\tilde{y}_0,\end{aligned}$$

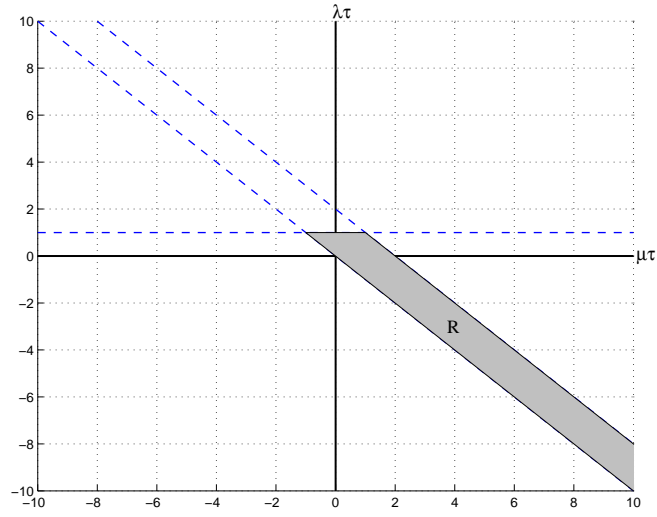
geometrik dizisini elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ iken, dizinin yakınsaklığı $\left|\frac{1 - \mu\tau}{1 - \lambda\tau}\right| < 1$ olması koşuluna bağlıdır. Bu koşulu

$$\lambda\tau < 1 \Rightarrow 0 < \mu\tau + \lambda\tau < 2,$$

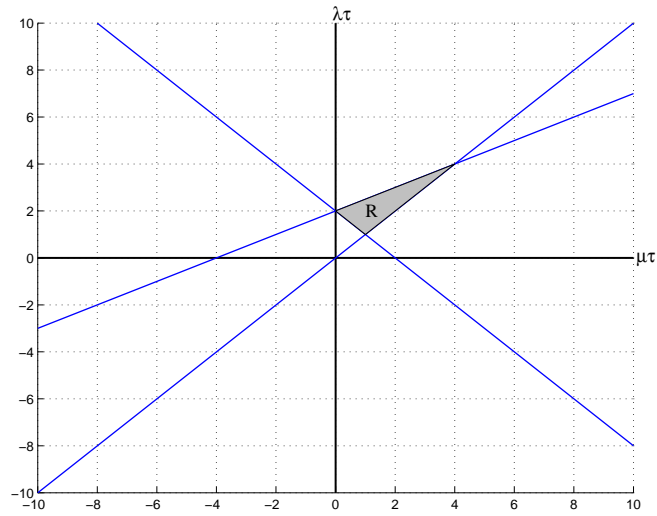
$$\lambda\tau > 1 \Rightarrow \mu\tau + \lambda\tau < 0,$$

$$\lambda\tau > 1 \Rightarrow \mu\tau + \lambda\tau > 2,$$

koşullarına indirgeyebiliriz. Bu durumda (4.0.1) test denklemi için; $m = 1$ alındığında, gecikme miktarı τ 'dan bağımsız olarak metodun kararlılık bölgesi Şekil 4.4 ile verilmiştir. Elde ettiğimiz sonuçları nümerik olarak test etmek için $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ seçersek Çizelge 4.1 de görüldüğü gibi metodun kararsızlık durumu ortaya çıkar. $m = 2$ içinse yöntemin kararlılık bölgesi Şekil 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.4: $m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Kapalı Euler yönteminin kararlılık bölgesi.



Şekil 4.5: $m = 2$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Kapalı Euler yönteminin kararlılık bölgesi.

Çizelge 4.1: Kapalı Euler metodu ile $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ için (4.0.1) denkleminin $\phi(t) = 1$ başlangıç fonksiyonu ile $0 \leq t \leq 4$ aralığındaki nümerik çözümleri.

t	$y(t)$	$\tilde{y}(t)$	$ y(t) - \tilde{y}(t) $
0.00	1.000000	1.000000	0.000000e+000
1.00	1.000000	1.000000	0.000000e+000
2.00	3.000000	5.000000	2.000000e+000
3.00	9.000000	25.000000	1.600000e+001
4.00	21.333333	125.000000	1.036667e+002

4.3 Trapez Yöntemi için Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.0.1) denkleminin kararlılık analizini trapez metodu için vereceğiz. Gösterim kolaylığı açısından $\tau = 1$ seçeceğiz ve buna bağlı olarak sabit adım uzunluğu $h = \frac{\tau}{m}$, $m \in \mathbb{N}^+$ olarak seçilecektir. Bu durumda (4.0.1) test denklemi üzerinde, Trapez yöntemini \tilde{y}_{n+1} ve \tilde{y}_n değerlerini elde etmek için uygularsak,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h \left[\frac{f_n}{2} + \frac{f_{n+1}}{2} \right] \\ &= \tilde{y}_n + h \left[\frac{\lambda \tilde{y}_n + \mu \tilde{y}_{n-m}}{2} + \frac{\lambda \tilde{y}_{n+1} + \mu \tilde{y}_{n-m+1}}{2} \right], \\ \tilde{y}_n &= \tilde{y}_{n-1} + h \left[\frac{\lambda \tilde{y}_{n-1} + \mu \tilde{y}_{n-m-1}}{2} + \frac{\lambda \tilde{y}_n + \mu \tilde{y}_{n-m}}{2} \right],\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Şimdi bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2m}\right) \tilde{y}_{n+1} - 2\tilde{y}_n + \left(1 + \frac{\lambda}{2m}\right) \tilde{y}_{n-1} - \frac{\mu}{2m} \tilde{y}_{n-m+1} + \frac{\mu}{2m} \tilde{y}_{n-m} = 0, \quad (4.3.1)$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Şimdi mümkün olan en büyük h adım uzunluğu için, yani $m = 1$ ve dolayısıyla $h = \tau$ için karakteristik denklemi inceleyelim. $m = 1$ için (4.3.1) ile verilen karakteristik denklem,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{y}_{n+1} - 2\tilde{y}_n + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \tilde{y}_{n-1} - \frac{\mu}{2} \tilde{y}_n + \frac{\mu}{2} \tilde{y}_{n-1} = 0,$$

formuna dönüşür. Bu denklemi $\gamma_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, $\gamma_1 = -\left(2 + \frac{\mu}{2}\right)$ ve $\gamma_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}\right)$ için yeniden düzenlersek,

$$\gamma_0 \tilde{y}_{n+1} + \gamma_1 \tilde{y}_n + \gamma_2 \tilde{y}_{n-1} = 0, \quad (4.3.2)$$

karakteristik denklemini elde etmiş oluruz. (4.3.2) ile verilen karakteristik denklemi kısaca $\pi(r, \lambda, \mu) = \gamma_0 r^2 + \gamma_1 r + \gamma_2 = 0$ ile gösterecek olursak, maksimum adım uzunluğu h için (4.0.1) denkleminin kararlı olabilmesi $|r| = |e^{i\theta}| \leq 1$ koşulunun sağlanmasına bağlıdır. $r = e^{i\theta}$ için karakteristik denklemimiz $\gamma_0 e^{2i\theta} + \gamma_1 e^{i\theta} + \gamma_2 = 0$ haline dönüşür. Bu da

$$\gamma_0 \cos 2\theta + \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 = 0,$$

ve

$$\gamma_0 \sin 2\theta + \gamma_1 \sin \theta = 0,$$

eşitliklerinin sağlanması anlamına gelir.

$$\gamma_0 \sin 2\theta + \gamma_1 \sin \theta = 0, \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \text{ veya } 2\gamma_0 \cos \theta + \gamma_1 = 0$$

$\sin \theta = 0 \Rightarrow |r| = |e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow r = \pm 1$ bulunur. Öyle ise karakteristik denklem, $r = 1$ için,

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad (4.3.3)$$

ve $r = -1$ için,

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad (4.3.4)$$

şekline dönüşür.

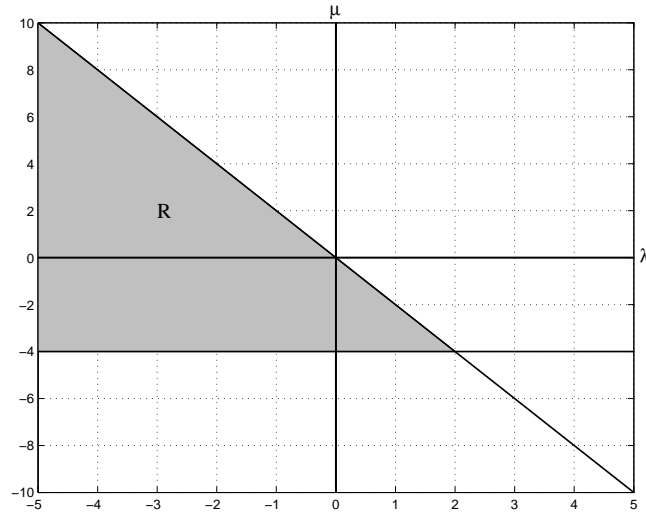
$2\gamma_0 \cos \theta + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\gamma_1}{2\gamma_0}$ elde edilir. Elde ettiğimiz bu değeri $\gamma_0 \cos 2\theta + \gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 = 0$ denkleminde yazarsak, $\gamma_0(\gamma_2 - \gamma_0) = 0$ bulunur. $\gamma_0 \neq 0$ olduğundan,

$$\gamma_0 = \gamma_2, \quad (4.3.5)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\gamma_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, $\gamma_1 = -\left(2 + \frac{\mu}{2}\right)$ ve $\gamma_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}\right)$ değerleri için, (4.3.3), (4.3.4) ve (4.3.5) koşulları

$$\begin{cases} \mu = -4, \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = 0, \end{cases} \quad (4.3.6)$$

koşullarına indirgenir. Şekil 4.6 Trapez yöntemi için kararlılık bölgesini göstermektedir.



Şekil 4.6: $\tau = 1$ ve $m = 1$ için (4.0.1) test denklemi üzerinde Trapez yönteminin kararlılık bölgesi.

4.4 Runge-Kutta Yöntemleri için Kararlılık Analizi

Bölüm 3.3'de Runge-Kutta Metotlarının gecikmeli diferansiyel denklemlere nasıl uyarlandığını incelemiştik. Runge-Kutta yöntemlerinin (4.0.1) test denklemi üzerinde, kararlılık analizi yapılırken, önceki yöntemlerden farklı olarak uygulanan interpolasyonun yöntem üzerinde etkisi olacaktır. Kararlılık analizi için,

$Y_n = (\tilde{y}_n, u_1^n, \dots, u_v^n)^T$ ve $Z_n = (z_1^n, z_2^n, \dots, z_v^n)^T$ olarak tanımlansın. Bölüm 3.3'de tanımlandığı gibi,

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{j=1}^v b_j f(t_n + c_j h, u_j^n, z_j^n), \quad (4.4.1)$$

ve

$$\tilde{u}_i^n = \tilde{y}_n + h_n \sum_{j=1}^v a_{ij} f(t_n + c_j h, u_j^n, z_j^n), \quad (4.4.2)$$

denklemleri için gecikme terimi, $1 \leq i \leq v$, $t_n + c_i h - \tau > 0$, $m \leq s$ olduğunda,

$$z_i^n = \tilde{y}_i(t_n + c_i h - \tau),$$

ve $r, s \in Z$ olmak üzere,

$$\tilde{y}_i(t_n + c_i h - \tau) = u_i(t_j + c_i h + \varepsilon h) = \sum_{k=r}^s \ell_k(\varepsilon) u_i^{j+k}, \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

yaklaşık değeri ile verilir. Burada interpolasyon değerinin

$$\ell_j(\varepsilon) = \prod_{k=-r, k \neq j}^s \left(\frac{\varepsilon - k}{j - k} \right)$$

olduğunu düşünelim. (4.0.1) test denklemi ile verilen gecikmeli diferansiyel denklemi, uygulanan interpolasyonu da hesaba katarak Runge-Kutta metodu ile çözmek istersek, $n \geq m + 1$ için, $\alpha = \lambda h$, $\beta = \mu h$ ve $m \geq s$ olmak üzere,

$$\mathbf{Q}_1(\alpha) \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Y}_n + \beta \sum_{j=-r}^s \ell_j(\varepsilon) \mathbf{P}_0 Y_{n-m+j}, \quad (4.4.3)$$

karakteristik denklemini elde edilir. (4.4.3) denkleminde,

$$\mathbf{Q}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \mathbf{b}^T \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{I} - \alpha \mathbf{A} \\ 0 & \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}^T \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{A} \\ 0 & \end{bmatrix}, \quad (4.4.4)$$

olarak verilir (İsmail, Al-Khasawneh, & Suleiman, 2003). (4.4.3) denkleminde \mathbf{Y} yerine ζ yazılırsa,

$$S(\alpha, \beta, \zeta) = \det \left[\mathbf{Q}_1(\alpha) \zeta^{n+1} - \mathbf{Q}_0 \zeta^n - \beta \sum_{k=-r}^s \ell_k(\varepsilon) \mathbf{P}_0 \zeta^{n-m+k} \right], \quad (4.4.5)$$

kararlılık polinomu elde edilir. (4.4.3) denkleminde, $\lambda = 0$ alınırsa, denklem

$$\begin{cases} y'(t) = \mu y(t - \tau), & t > 0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0 \end{cases} \quad (4.4.6)$$

haline dönüşür. Buradan $\lambda = 0$ olduğundan $\alpha = 0$ elde edilir ve

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

matrisi tanımlanabilir. Kararlılık polinomu ise

$$S(\beta, \gamma) = \det \left[\mathbf{Q}_2 \zeta^{n+1} - \mathbf{Q}_0 \zeta^n - \beta \sum_{k=-r}^s \ell_k(\varepsilon) \mathbf{P}_0 \zeta^{n-m+k} \right] \quad (4.4.7)$$

In't Hout interpolasyonunu kullanarak kararlılık analizini gösterebilmek için, Alexander (1977) tarafından verilen 2.mertebeden ve 2 basamaklı Runge-Kutta metodu

metodunu kullanalım. Metot $\gamma = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & & \gamma \\ 1 & 1 - \gamma & \gamma \\ \hline & 1 - \gamma & \gamma \end{array}$$

ile verilir. Kararlılık polinomunda, gecikme terimini elde etmek için, $k = -1, 0, 1$, $r = 1$, $s = 1$ değerleri ile 2.mertebeden interpolasyon polinomu oluşturmak yeterlidir. Bu durumda $\ell_{-1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon}{2}$, $\ell_0(\varepsilon) = -(\varepsilon^2 - 1)$ ve $\ell_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2}$ katsayılar olmak üzere interpolasyon polinomu $L = \ell_{-1}(\varepsilon)\zeta^{n-m-1} + \ell_0(\varepsilon)\zeta^{n-m} + \ell_1(\varepsilon)\zeta^{n-m+1}$ ile verilir. Öyleyse kararlılık polinomu,

$$S(\alpha, \beta, \varepsilon) = (1 - 2\gamma\alpha + \gamma^2\alpha^2)\zeta^{2n+2} + (2\gamma\alpha - \alpha - 1)\zeta^{2n+1} + (2\gamma^2\alpha\beta - 2\gamma\beta L)\zeta^{n+1} \\ + (2\gamma\beta L - \beta L)\zeta^n + (\gamma^2 L^2 \beta^2),$$

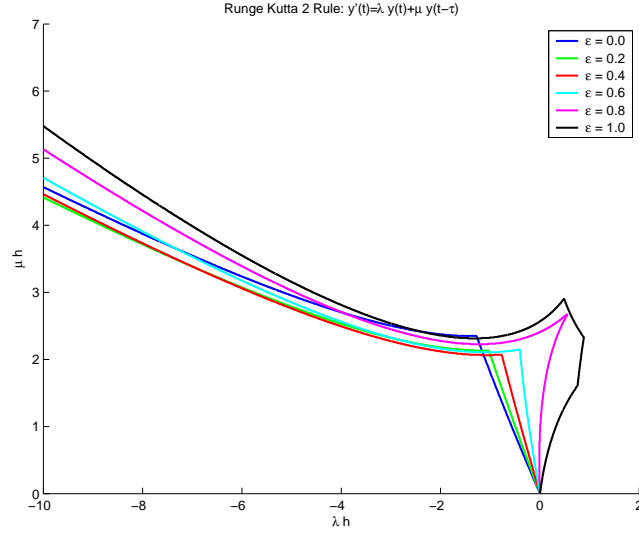
olur. $m = 1$ için, kararlılık polinomu

$$S(\alpha, \beta, \varepsilon) = (1 - 2\gamma\alpha + \gamma^2\alpha^2)\zeta^6 + [(2\gamma\alpha - \alpha - 1) + 2\gamma\beta(\gamma\alpha - 1)\ell_1(\varepsilon)]\zeta^5 \\ + [2\beta\gamma(\gamma\alpha - 1)\ell_0(\varepsilon) + \beta(2\gamma - 1)\ell_0(\varepsilon) + (\gamma\beta\ell_1(\varepsilon))^2]\zeta^4 \\ + [2\beta\gamma(\gamma\alpha - 1)\ell_{-1}(\varepsilon) + \beta(2\gamma - 1)\ell_0(\varepsilon) + 2\gamma^2\beta^2\ell_0(\varepsilon)\ell_1(\varepsilon)]\zeta^3 \\ + [\beta(2\gamma - 1)\ell_{-1}(\varepsilon) + \gamma^2\beta^2(2\ell_{-1}(\varepsilon))\ell_1(\varepsilon) + (\ell_0(\varepsilon))^2]\zeta^2 \\ + 2\gamma^2\beta^2\ell_{-1}(\varepsilon)\ell_0(\varepsilon)\zeta + (\gamma\beta\ell_{-1}(\varepsilon))^2,$$

haline dönüşür. Elde edilen kararlılık polinomu Schur polinomu olarak bilinir. Kararlılık polinomunun kökleri $\zeta_\ell = Re(\zeta_\ell) + iIm(\zeta_\ell)$ formunda olsun. Bu durumda $r = \max_\ell |\zeta_\ell| = \max_\ell \sqrt{(Re(\zeta_\ell))^2 + (Im(\zeta_\ell))^2}$ maksimum köklerin değerini verir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, uygulanan metodun P-kararlılık bölgesi $|r| \leq 1$ olacak şekilde (α, β) değerlerinin kümesidir. Şekil 4.7, 2. mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlılık grafiğidir. Benzer biçimde RK4 metodu için Schur polinomu elde etmeye çalışalım. $s = 2$, $r = 2$ değerleri ile $k = -2, -1, 0, 1, 2$ için, 4. mertebeden Lagrange interpolasyon polinomunun katsayıları

$$\ell_{-2}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^4}{6} - \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{2\varepsilon^2}{3} + \frac{2\varepsilon}{3}, \quad \ell_{-1}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^4}{24} + \frac{\varepsilon^3}{12} - \frac{\varepsilon^2}{24} - \frac{\varepsilon}{12}, \\ \ell_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^5}{120} - \frac{\varepsilon^3}{24} + \frac{\varepsilon}{30}, \quad \ell_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^5}{720} - \frac{\varepsilon^3}{144} + \frac{\varepsilon}{180}, \quad \ell_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^5}{2520} - \frac{\varepsilon^3}{504} + \frac{\varepsilon}{630}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.7: $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denklemi için Runge-Kutta yönteminin kararlılık grafiği.

Tablo 3.3.1 gözönüne alındığında $m = 1$ ve $Q_1(\alpha)$, Q_0 ve P_0 matrisleri için Schur polinomu,

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, \beta, \epsilon) = & \left[-8/243\beta^4\epsilon^5 - 19/1944\beta^4\epsilon^{10} + 37/972\beta^4\epsilon^8 - 2/243\beta^4\epsilon^4 - 1/31104\beta^4\epsilon^{16} \right. \\
 & + 5/243\beta^4\epsilon^9 + 5/2592\beta^4\epsilon^{13} + 5/15552\beta^4\epsilon^{14} - 1/31104\beta^4\epsilon^{12} - 10/243\beta^4\epsilon^6 \\
 & \left. - 5/486\beta^4\epsilon^{11} - 1/7776\beta^4\epsilon^{15} \right] \zeta^{5n-12} + \left[1/243\beta^4\epsilon^4 - 29/15552\beta^4\epsilon^{13} \right. \\
 & + 11/972\beta^4\epsilon^6 + 7/486\beta^4\epsilon^5 - 55/31104\beta^4\epsilon^{12} + 1/31104\beta^4\epsilon^{16} \\
 & + 209/31104\beta^4\epsilon^{11} - 35/7776\beta^4\epsilon^9 - 103/3888\beta^4\epsilon^8 + 67/5184\beta^4\epsilon^{10} \\
 & \left. - 1/7776\beta^4\epsilon^{14} + 5/31104\beta^4\epsilon^{15} - 29/1944\beta^4\epsilon^7 \right] \zeta^{5n-11} + \left[3763/311040\beta^4\epsilon^8 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+3947/1244160\beta^4\varepsilon^{12} - 47/19440\beta^4\varepsilon^4 - 89/248832\beta^4\varepsilon^{14} + 25/1944\beta^4\varepsilon^7 \\ &-12787/1244160\beta^4\varepsilon^{10} + 1/155520\beta^4\varepsilon^{17} - 649/622080\beta^4\varepsilon^{11} - 47/6480\beta^4\varepsilon^5 \\ &-1673/311040\beta^4\varepsilon^9 + 1/138240\beta^4\varepsilon^{16}] \zeta^{5n-10} + [23407/7464960\beta^4\varepsilon^9 \\ &-7/1866240\beta^4\varepsilon^{17} - 7/497664\beta^4\varepsilon^{16} + 19/46656\beta^4\varepsilon^4 + 317/7464960\beta^4\varepsilon^{15} \\ &-11/1492992\beta^4\varepsilon^{13} - 7601/7464960\beta^4\varepsilon^{11} - 2827/933120\beta^4\varepsilon^7 + 2995/1492992\beta^4\varepsilon^{10} \\ &+1709/7464960\beta^4\varepsilon^{14} - 2569/3732480\beta^4\varepsilon^8 - 8497/7464960\beta^4\varepsilon^{12} - 187/233280\beta^4\varepsilon^6 \\ &+137/155520\beta^4\varepsilon^5] \zeta^{5n-9} + [5/81\beta^3\varepsilon^6 - 1/9\beta^3\varepsilon^5 - 4/81\beta^3\varepsilon^3 + 11/108\beta^3\varepsilon^7 \\ &+1/108\beta^3\varepsilon^8 - 1/144\beta^3\varepsilon^{10} + 1/432\beta^3\varepsilon^{11} - 1/144\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 35/1296\alpha\beta^3\varepsilon^9 \\ &+5/81\alpha\beta^3\varepsilon^6 + 1/432\alpha\beta^3\varepsilon^{11} - 1/2073600\beta^4\varepsilon^{18} + 1/1296\alpha\beta^3\varepsilon^{12} + 11/108\alpha\beta^3\varepsilon^7 \\ &+1/108\alpha\beta^3\varepsilon^8 - 35/1296\beta^3\varepsilon^9 - 60311/209018880\beta^4\varepsilon^{10} - 4/27\beta^3\varepsilon^4 - 4/81\alpha\beta^3\varepsilon^3 \\ &+109733/418037760\beta^4\varepsilon^{12} + 1/1296\beta^3\varepsilon^{12} - 46541/261273600\beta^4\varepsilon^4 - 1/9\alpha\beta^3\varepsilon^5 \\ &+40777/65318400\beta^4\varepsilon^{11} - 93469/1045094400\beta^4\varepsilon^{14} - 144589/130636800\beta^4\varepsilon^9 \\ &-42433/261273600\beta^4\varepsilon^{13} + 1171/74649600\beta^4\varepsilon^{15} + 5483/464486400\beta^4\varepsilon^{16} \\ &-16687/43545600\beta^4\varepsilon^5 + 529187/522547200\beta^4\varepsilon^7 + 141089/522547200\beta^4\varepsilon^6 \\ &+51379/4180377600\beta^4\varepsilon^8 - 67/261273600\beta^4\varepsilon^{17} - 4/27\alpha\beta^3\varepsilon^4] \zeta^{5n-8} \\ &+ [7/576\beta^3\varepsilon^8 - 1/1728\beta^3\varepsilon^{12} + 1/54\beta^3\varepsilon^3 + 5/108\beta^3\varepsilon^4 + 1/432\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 1/432\alpha\beta^3\varepsilon^{11} \\ &+17/864\alpha\beta^3\varepsilon^9 + 7/576\alpha\beta^3\varepsilon^8 - 13/288\alpha\beta^3\varepsilon^7 - 13/216\alpha\beta^3\varepsilon^6 + 5/108\alpha\beta^3\varepsilon^4 \\ &+1/108\alpha\beta^3\varepsilon^5 + 1/54\alpha\beta^3\varepsilon^3 + 17/864\beta^3\varepsilon^9 + 1/432\beta^3\varepsilon^{10} - 13/216\beta^3\varepsilon^6 - 1/432\beta^3\varepsilon^{11} \\ &-1/1728\alpha\beta^3\varepsilon^{12} - 487/21772800\beta^4\varepsilon^6 + 361/21772800\beta^4\varepsilon^5 + 361/174182400\beta^4\varepsilon^{14} \\ &-2063/43545600\beta^4\varepsilon^7 + 211/58060800\beta^4\varepsilon^{12} - 2417/58060800\beta^4\varepsilon^{11} + 1/108\beta^3\varepsilon^5 \\ &+1669/87091200\beta^4\varepsilon^{13} + 103/10886400\beta^4\varepsilon^4 - 13/288\beta^3\varepsilon^7 - 793/58060800\beta^4\varepsilon^{10} \\ &-1/1088640\beta^4\varepsilon^{16} + 1/12441600\beta^4\varepsilon^{18} + 19/69672960\beta^4\varepsilon^{17} - 697/174182400\beta^4\varepsilon^{15} \\ &+19853/348364800\beta^4\varepsilon^9 + 3779/174182400\beta^4\varepsilon^8] \zeta^{5n-7} + [3047/108864000\beta^4\varepsilon^6 \\ &+26909/2612736000\beta^4\varepsilon^{12} + 4153/96768000\beta^4\varepsilon^{11} - 155851/10450944000\beta^4\varepsilon^{10} \\ &-892091/10450944000\beta^4\varepsilon^9 + 5459/2612736000\beta^4\varepsilon^{15} - 7/720\alpha\beta^3\varepsilon^3 - 1/8640\alpha\beta^3\varepsilon^{13} \\ &-7/360\beta^3\varepsilon^4 + 1/62208000\beta^4\varepsilon^{19} + 17/2160\beta^3\varepsilon^5 + 103/2880\alpha\beta^3\varepsilon^6 + 313/34560\alpha\beta^3\varepsilon^7 \\ &+19/5760\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 1/11520\alpha\beta^3\varepsilon^{12} - 53/5760\beta^3\varepsilon^9 + 313/34560\beta^3\varepsilon^7 - 1/8640\beta^3\varepsilon^{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -5/256\alpha\beta^3\varepsilon^8 + 103/2880\beta^3\varepsilon^6 - 53/5760\alpha\beta^3\varepsilon^9 + 19/5760\beta^3\varepsilon^{10} + 17/2160\alpha\beta^3\varepsilon^5 \\ & -7/360\alpha\beta^3\varepsilon^4 - 1/11520\beta^3\varepsilon^{12} + 73/34560\alpha\beta^3\varepsilon^{11} + 104309/1306368000\beta^4\varepsilon^7 \\ & -38183/5225472000\beta^4\varepsilon^8 - 2569/93312000\beta^4\varepsilon^5 - 10867/5225472000\beta^4\varepsilon^{14} \\ & +449/5225472000\beta^4\varepsilon^{16} + 73/34560\beta^3\varepsilon^{11} - 73/5184000\beta^4\varepsilon^4 - 7/720\beta^3\varepsilon^3 - 5/256\beta^3\varepsilon^8 \\ & +73/10450944000\beta^4\varepsilon^{18} - 61217/5225472000\beta^4\varepsilon^{13} - 2747/10450944000\beta^4\varepsilon^{17}] \zeta^{5n-6} \\ & + [37/51840\alpha\beta^3\varepsilon^3 + 1/248832000\beta^4\varepsilon^{19} - 23/7680\beta^3\varepsilon^5\alpha - 19/43545600\beta^4\varepsilon^6 \\ & +131/746496000\beta^4\varepsilon^{15} - 13/217728000\beta^4\varepsilon^{17} + 697/522547200\beta^4\varepsilon^{14} - 23/7680\beta^3\varepsilon^5 \\ & -1073/373248000\beta^4\varepsilon^{11} + 47/103680\alpha\beta^3\varepsilon^4 - 7/23040\alpha\beta^3\varepsilon^{11} + 1/25920\alpha\beta^3\varepsilon^{13} \\ & +17/138240\alpha\beta^3\varepsilon^{12} - 143/326592000\beta^4\varepsilon^5 - 7/207360(\alpha + 1)\beta^3\varepsilon^9 - 7/23040\beta^3\varepsilon^{11} \\ & +1/25920\beta^3\varepsilon^{13} + 527/138240\beta^3\varepsilon^8 - 557/414720\beta^3\varepsilon^{10} + 17/138240\beta^3\varepsilon^{12} \\ & +107/41472\beta^3\varepsilon^7 - 1/5103000\beta^4\varepsilon^4 + 107/41472\alpha\beta^3\varepsilon^7 + 17389/5225472000\beta^4\varepsilon^9\varepsilon^8 \\ & +37/51840\beta^3\varepsilon^3 - 61/93312000\beta^4\varepsilon^7 - 557/414720\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 15517/5225472000\beta^4\varepsilon^{12} \\ & +2711/5225472000\beta^4\varepsilon^{13} - 397/1741824000\beta^4\varepsilon^{16} + 1/83607552\beta^4\varepsilon^{18} - 421/138240\beta^3\varepsilon^6 \\ & -421/138240\alpha\beta^3\varepsilon^6 + 527/138240\beta^3\varepsilon^8\alpha + 4099/2090188800\beta^4\varepsilon^{10} + 683/1306368000\beta^4 \\ & +47/103680\beta^3\varepsilon^4] \zeta^{5n-5} + [-111187/24385536000\beta^4\varepsilon^9 + 50021/18289152000\beta^4\varepsilon^6 \\ & +13/4838400\beta^3\varepsilon^{13} - 2/9\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 1/9\alpha\beta^2\varepsilon^4 - 4/9\alpha\beta^2\varepsilon^3 - 4/9\beta^2\varepsilon^3 + 7/72\alpha\beta^2\varepsilon^6 \\ & -1/36\alpha\beta^2\varepsilon^7 - 1/72\beta^2\varepsilon^8 + 7/72\beta^2\varepsilon^6 + 2/9\beta^2\varepsilon^5 + 2/9\beta^2\varepsilon^5\alpha - 1/72\alpha^2\beta^2\varepsilon^7 - 1/144\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 \\ & -1/18\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 + 1/172800\alpha\beta^3\varepsilon^{14} - 1/9\beta^2\varepsilon^4 - 1/72\beta^2\varepsilon^8\alpha - 1/36\beta^2\varepsilon^7 + 7/144\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 \\ & +966107/292626432000\beta^4\varepsilon^{10} - 3953/4572288000\beta^4\varepsilon^5 - 17201/22861440000\beta^4\varepsilon^4 \\ & -501197/121927680000\beta^4\varepsilon^8 + 16963/48771072000\beta^4\varepsilon^{14} + 869/1814400\beta^3\varepsilon^{10} - 1/9\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 \\ & +763/518400\beta^3\varepsilon^6 + 1/9\alpha^2\beta^2\varepsilon^5 - 1085737/731566080000\beta^4\varepsilon^{12} + 869/1814400\alpha\beta^3\varepsilon^{10} \\ & +1/172800\beta^3\varepsilon^{14} - 229/201600\alpha\beta^3\varepsilon^8 + 779/292626432000\beta^4\varepsilon^{18} - 167/1814400\beta^3\varepsilon^{12} \\ & +5557/14515200\beta^3\varepsilon^9 - 229/201600\beta^3\varepsilon^8 - 143/179200\beta^3\varepsilon^7 - 1021/14515200\beta^3\varepsilon^{11} \\ & -14501/365783040000\beta^4\varepsilon^{16} - 28771/18289152000\beta^4\varepsilon^{13} + 571/1524096000\beta^4\varepsilon^{15} \\ & -3107/73156608000\beta^4\varepsilon^{17} + 260377/73156608000\beta^4\varepsilon^{11} - 2/9\alpha^2\beta^2\varepsilon^3 - 481/907200\beta^3\varepsilon^3 \\ & +28387/9144576000\beta^4\varepsilon^7 - 1/4976640000\beta^4\varepsilon^{20} - 661/907200\beta^3\varepsilon^4 + 919/907200\beta^3\varepsilon^5\alpha \\ & +763/518400\beta^3\varepsilon^6\alpha - 143/179200\beta^3\varepsilon^7\alpha + 5557/14515200\beta^3\varepsilon^9\alpha - 1021/14515200\beta^3\varepsilon^{11}\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +13/4838400\beta^3\varepsilon^{13}\alpha - 167/1814400\beta^3\varepsilon^{12}\alpha + 17/10450944000\beta^4\varepsilon^{19} + 919/907200\beta^3\varepsilon^5 \\
& - 661/907200\beta^3\varepsilon^4\alpha - 2/9\beta^2\varepsilon^2 - 481/907200\alpha\beta^3\varepsilon^3] \zeta^{5n-4} + [8501/16460236800\beta^4\varepsilon^{10} \\
& - 1697/20575296000\beta^4\varepsilon^5 - 85129/137168640000\beta^4\varepsilon^8 - 1/120960\beta^3\varepsilon^3 \\
& + 233/131681894400\beta^4\varepsilon^{18} + 2873/43893964800\beta^4\varepsilon^{14} - 1/96\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 + 1/36\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 \\
& + 1/24\alpha^2\beta^2\varepsilon^3 - 56213/109734912000\beta^4\varepsilon^9 - 13/188116992000\beta^4\varepsilon^{19} \\
& - 103307/658409472000\beta^4\varepsilon^{13} - 1111/658409472000\beta^4\varepsilon^{17} + 74581/188116992000\beta^4\varepsilon^{11} \\
& - 1/24\beta^2\varepsilon^4 + 1/12\beta^2\varepsilon^3 + 1/18\beta^2\varepsilon^2 + 1/144\beta^2\varepsilon^8\alpha - 5/48\beta^2\varepsilon^5 + 1/144\beta^2\varepsilon^8 - 1/48\beta^2\varepsilon^6 \\
& + 1/48\beta^2\varepsilon^7 - 5/48\alpha\beta^2\varepsilon^5 - 1/48\alpha\beta^2\varepsilon^6 + 1/48\alpha\beta^2\varepsilon^7 - 5/96\alpha^2\beta^2\varepsilon^5 + 1/18\alpha\beta^2\varepsilon^2 \\
& + 1/96\alpha^2\beta^2\varepsilon^7 + 1/288\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 1/24\alpha\beta^2\varepsilon^4 + 1/12\alpha\beta^2\varepsilon^3 + 1/2073600\beta^3\varepsilon^{14} \\
& - 1/48\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 - 1/120960\alpha\beta^3\varepsilon^3 + 17/29030400\alpha\beta^3\varepsilon^{13} - 79/5806080\alpha\beta^3\varepsilon^{11} \\
& + 73/1075200\alpha\beta^3\varepsilon^9 + 23/1814400\alpha\beta^3\varepsilon^4 - 373/14515200\alpha\beta^3\varepsilon^8 - 23/2419200\alpha\beta^3\varepsilon^6 \\
& + 1/2073600\alpha\beta^3\varepsilon^{14} - 37/4838400\alpha\beta^3\varepsilon^{12} + 431/14515200\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 613/5806080\alpha\beta^3\varepsilon^7 \\
& + 107/1814400\alpha\beta^3\varepsilon^5 + 1597/54867456000\beta^4\varepsilon^{15} - 1/7464960000\beta^4\varepsilon^{20} \\
& + 26981/82301184000\beta^4\varepsilon^7 - 392543/1646023680000\beta^4\varepsilon^{12} + 157/411505920\beta^4\varepsilon^6 \\
& - 40781/3292047360000\beta^4\varepsilon^{16} - 79/5806080\beta^3\varepsilon^{11} - 23/2419200\beta^3\varepsilon^6 + 17/29030400\beta^3\varepsilon^{13} \\
& + 73/1075200\beta^3\varepsilon^9 + 107/1814400\beta^3\varepsilon^5 - 2407/25719120000\beta^4\varepsilon^4 + 431/14515200\beta^3\varepsilon^{10} \\
& - 37/4838400\beta^3\varepsilon^{12} - 613/5806080\beta^3\varepsilon^7 - 373/14515200\beta^3\varepsilon^8 + 23/1814400\beta^3\varepsilon^4] \zeta^{5n-3} \\
& + [-56857/526727577600\beta^4\varepsilon^{12} - 569/13608000\beta^3\varepsilon^3 - 1493/188116992000\beta^4\varepsilon^{16} \\
& + 59/52672757760\beta^4\varepsilon^{18} - 1/13934592000\beta^4\varepsilon^{20} + 151/1360800\alpha\beta^3\varepsilon^5 + 1/1920\alpha\beta^2\varepsilon^8 \\
& - 731/108864000\beta^3\varepsilon^{11}\alpha - 827/20575296000\beta^4\varepsilon^4 - 41/2880\beta^2\varepsilon^6 + 1/1920\beta^2\varepsilon^8 \\
& + 1627/7524679680\beta^4\varepsilon^{10} + 31/877879296\beta^4\varepsilon^{14} - 37/1440\beta^2\varepsilon^2 - 1/10368000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} \\
& - 37/1440\beta^2\varepsilon^3 + 1/720\alpha\beta^2\varepsilon^9 - 41/5760\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 + 1/720\beta^2\varepsilon^9 + 227/5760\alpha\beta^2\varepsilon^4 \\
& - 41/2880\alpha\beta^2\varepsilon^6 + 227/11520\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 - 37/1440\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 23/2880\alpha^2\beta^2\varepsilon^7 + 1/1440\alpha^2\beta^2\varepsilon^9 \\
& - 37/2880\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 - 37/2880\alpha^2\beta^2\varepsilon^3 - 23/1440\alpha\beta^2\varepsilon^7 + 227/5760\beta^2\varepsilon^4 - 23/1440\beta^2\varepsilon^7 \\
& + 1/3840\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 4699/43545600\beta^3\varepsilon^8 + 527/3292047360\beta^4\varepsilon^6 - 59/1360800\alpha\beta^3\varepsilon^4 \\
& + 3211/438939648000\beta^4\varepsilon^{15} - 4489/94058496000\beta^4\varepsilon^{13} + 361159/2633637888000\beta^4\varepsilon^{11} \\
& + 29/1440\alpha^2\beta^2\varepsilon^5 + 37/43545600\beta^3\varepsilon^{13} - 1/10368000\beta^3\varepsilon^{15} - 569/13608000\alpha\beta^3\varepsilon^3
\end{aligned}$$

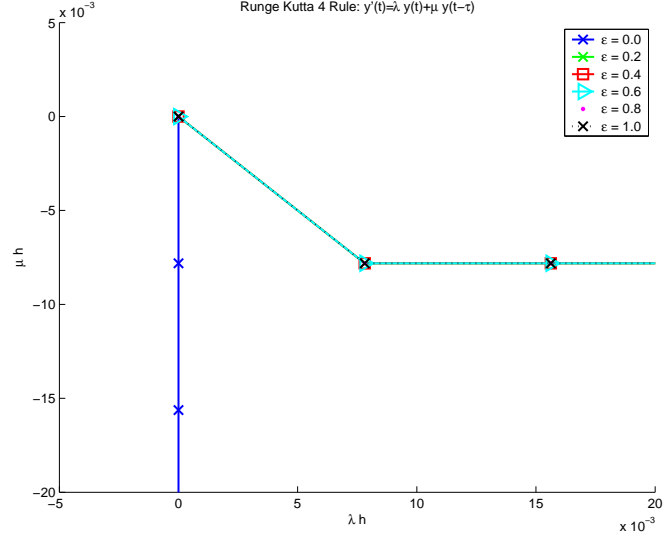
$$\begin{aligned}
& +151/1360800\beta^3\varepsilon^5 - 59/1360800\beta^3\varepsilon^4 - 22163/217728000\alpha\beta^3\varepsilon^7 + 29/720\alpha\beta^2\varepsilon^5 \\
& -1451/41150592000\beta^4\varepsilon^5 - 97/2633637888000\beta^4\varepsilon^{19} - 731/108864000\beta^3\varepsilon^{11} \\
& -42659/219469824000\beta^4\varepsilon^9 + 1/4354560\beta^3\varepsilon^{14} + 3131/23514624000\beta^4\varepsilon^7 \\
& -28157/109734912000\beta^4\varepsilon^8 + 29/720\beta^2\varepsilon^5 + 253/2177280\beta^3\varepsilon^6 \\
& -67/329204736000\beta^4\varepsilon^{17} + 1681/43545600\alpha\beta^3\varepsilon^9 + 37/43545600\alpha\beta^3\varepsilon^{13} \\
& +89/2177280\alpha\beta^3\varepsilon^{10} - 263/43545600\alpha\beta^3\varepsilon^{12} + 1/4354560\alpha\beta^3\varepsilon^{14} \\
& +1681/43545600\beta^3\varepsilon^9 - 22163/217728000\beta^3\varepsilon^7 - 263/43545600\beta^3\varepsilon^{12} \\
& +253/2177280\alpha\beta^3\varepsilon^6 + 89/2177280\beta^3\varepsilon^{10} - 4699/43545600\alpha\beta^3\varepsilon^8 \\
& -37/1440\alpha\beta^2\varepsilon^3] \zeta^{5n-2} + [7087/658409472000\beta^4\varepsilon^{14} + 1/2177280\beta^3\varepsilon^{13} \\
& -1/200930625\beta^4\varepsilon^4 + 127/5878656000\beta^4\varepsilon^6 + 26683/658409472000\beta^4\varepsilon^{10} \\
& -43/1881169920000\beta^4\varepsilon^{20} + 1/2571912000\beta^4\varepsilon^{18} - 342061/13168189440000\beta^4\varepsilon^{12} \\
& -643/438939648000\beta^4\varepsilon^{11} + 391/109734912000\beta^4\varepsilon^{13} - 127/73156608000\beta^4\varepsilon^{15} \\
& +19/54867456000\beta^4\varepsilon^{17} - 11/438939648000\beta^4\varepsilon^{19} - 163/58060800\beta^3\varepsilon^8 \\
& +1/161280\beta^3\varepsilon^6 - 1/20736000\beta^3\varepsilon^{15} - 157/36578304000\beta^4\varepsilon^9 - 1/20736000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} \\
& -11/3628800\alpha\beta^3\varepsilon^4 - 11/11612160\alpha\beta^3\varepsilon^{10} + 13/19353600\alpha\beta^3\varepsilon^{12} - 1/11612160\alpha\beta^3\varepsilon^{14} \\
& -1/1080\alpha\beta^2\varepsilon^2 + 1/2177280\alpha\beta^3\varepsilon^{13} - 1/432\beta^2\varepsilon^3 - 1/11612160\beta^3\varepsilon^{14} + 1/161280\beta^3\varepsilon^6\alpha \\
& +17/2177280\beta^3\varepsilon^5\alpha + 13/19353600\beta^3\varepsilon^{12} - 11/11612160\beta^3\varepsilon^{10} - 1/2160\beta^2\varepsilon^8 \\
& -1/1440\beta^2\varepsilon^4 - 1/2160\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 - 341/217728000\alpha\beta^3\varepsilon^{11} + 1/311040\alpha\beta^3\varepsilon^9 \\
& -2873/435456000\alpha\beta^3\varepsilon^7 - 11/3628800\beta^3\varepsilon^4 - 1/1080\beta^2\varepsilon^2 - 163/58060800\alpha\beta^3\varepsilon^8 \\
& +1/960\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 - 1/864\alpha^2\beta^2\varepsilon^3 - 1/17280\alpha^2\beta^2\varepsilon^9 - 18143/6584094720000\beta^4\varepsilon^{16} \\
& -32551/823011840000\beta^4\varepsilon^8 - 1/4320\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 89/27216000\beta^3\varepsilon^3\alpha + 1/311040\beta^3\varepsilon^9 \\
& +1/480\beta^2\varepsilon^6 + 151/27433728000\beta^4\varepsilon^7 + 17/2177280\beta^3\varepsilon^5 - 1/8640\alpha\beta^2\varepsilon^9 \\
& -89/27216000\beta^3\varepsilon^3 - 341/217728000\beta^3\varepsilon^{11} + 1/480\alpha\beta^2\varepsilon^6 - 1/2160\alpha\beta^2\varepsilon^8 \\
& +7/2880\alpha\beta^2\varepsilon^5 + 7/5760\alpha^2\beta^2\varepsilon^5 - 1/432\alpha\beta^2\varepsilon^3 + 7/2880\beta^2\varepsilon^5 - 1/8640\beta^2\varepsilon^9 \\
& + -1/1440\alpha\beta^2\varepsilon^4 - 2873/435456000\beta^3\varepsilon^7 - 1/2880\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 - 13/6858432000\beta^4\varepsilon^5] \zeta^{5n-1} \\
& + [-21415687/2212255825920000\beta^4\varepsilon^{12} - 12247/8641624320000\beta^4\varepsilon^4 \\
& -143/95256000\alpha\beta^3\varepsilon^3 + 1/36\alpha^3\beta\varepsilon^4 - 991301/1106127912960000\beta^4\varepsilon^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12631/110612791296000\beta^4\epsilon^{18} - 1/3\alpha^2\beta\epsilon - 1/3\alpha^2\beta\epsilon^2 - 1/9\alpha^3\beta\epsilon^2 \\
& +11731/1728324864000\beta^4\epsilon^6 - 1/28800\beta^2\epsilon^{10} + 1/12\alpha^2\beta\epsilon^4 + 1/6\alpha\beta\epsilon^4 - 2/3\alpha\beta\epsilon \\
& +1/6\beta\epsilon^4 + 1/6\beta\epsilon^3 - 2/3\beta\epsilon - 59/384072192000\beta^4\epsilon^9 + 13/12700800\beta^3\epsilon^6 \\
& -1/57600\alpha^2\beta^2\epsilon^{10} - 59/101606400\beta^3\epsilon^8 + 23/576108288000\beta^4\epsilon^{17} \\
& -13/4608866304000\beta^4\epsilon^{19} + 557/1152216576000\beta^4\epsilon^{13} - 23/109734912000\beta^4\epsilon^{15} \\
& -1829/4608866304000\beta^4\epsilon^{11} + 1/241920\alpha^2\beta^2\epsilon^9 - 1/8064\alpha^2\beta^2\epsilon^7 + 43/80640\alpha^2\beta^2\epsilon^5 \\
& +1/6720\alpha^2\beta^2\epsilon^8 - 211/403200\alpha^2\beta^2\epsilon^6 + 13/13440\alpha^2\beta^2\epsilon^4 - 59/101606400\alpha\beta^3\epsilon^8 \\
& -9901/1524096000\alpha\beta^3\epsilon^7 + 379/76204800\alpha\beta^3\epsilon^5 + 359/1219276800\alpha\beta^3\epsilon^{13} \\
& -1373/870912000\alpha\beta^3\epsilon^{11} + 1759/406425600\alpha\beta^3\epsilon^9 - 1/2116800\alpha\beta^3\epsilon^4 \\
& -19/870912000\alpha\beta^3\epsilon^{15} + 1/6\alpha\beta\epsilon^3 + 1/14515200\alpha\beta^3\epsilon^{12} - 5/12096\alpha^2\beta^2\epsilon^3 \\
& -1/101606400\beta^3\epsilon^{14} - 29/50400\alpha^2\beta^2\epsilon^2 - 1/33868800\beta^3\epsilon^{10} + 113/288054144000\beta^4\epsilon^7 \\
& -19/870912000\beta^3\epsilon^{15} - 2/3\beta\epsilon^2 - 5/6048\beta^2\epsilon^3 - 1/2116800\beta^3\epsilon^4 - 11/72013536000\beta^4\epsilon^5 \\
& +1/120960\beta^2\epsilon^9 - 1/4032\beta^2\epsilon^7 - 1/4032\alpha\beta^2\epsilon^7 + 1/120960\alpha\beta^2\epsilon^9 - 1/9\alpha^3\beta\epsilon \\
& +60421/15801827328000\beta^4\epsilon^{14} - 1921/316036546560000\beta^4\epsilon^{20} + 13/12700800\alpha\beta^3\epsilon^6 \\
& +1/12\alpha^2\beta\epsilon^3 - 211/201600\alpha\beta^2\epsilon^6 + 1/36\alpha^3\beta\epsilon^3 - 2/3\alpha\beta\epsilon^2 - 1/28800\alpha\beta^2\epsilon^{10} \\
& -1/101606400\alpha\beta^3\epsilon^{14} + 1/14515200\beta^3\epsilon^{12} - 29/25200\beta^2\epsilon^2 + 43/40320\beta^2\epsilon^5 \\
& +411847/27653197824000\beta^4\epsilon^{10} + 359/1219276800\beta^3\epsilon^{13} - 1373/870912000\beta^3\epsilon^{11} \\
& -1/33868800\alpha\beta^3\epsilon^{10} + 1759/406425600\beta^3\epsilon^9 + 1/3360\beta^2\epsilon^8 - 211/201600\beta^2\epsilon^6 \\
& -143/95256000\beta^3\epsilon^3 + 13/6720\beta^2\epsilon^4 + 43/40320\alpha\beta^2\epsilon^5 + 1/3360\alpha\beta^2\epsilon^8 + 13/6720\alpha\beta^2\epsilon^4 \\
& -5/6048\alpha\beta^2\epsilon^3 - 29/25200\alpha\beta^2\epsilon^2 + 379/76204800\beta^3\epsilon^5 - 9901/1524096000\beta^3\epsilon^7] \zeta^{5n} \\
& + [61/54010152000\beta^4\epsilon^6 - 593/2304433152000\beta^4\epsilon^{11} - 241/1080203040000\beta^4\epsilon^4 \\
& +101/1463132160\alpha\beta^3\epsilon^{13} - 7/12\beta\epsilon - 1/5443200\beta^3\epsilon^6 + 83/576108288000\beta^4\epsilon^{13} \\
& -1/304819200\beta^3\epsilon^{14} + 1/3919104000\beta^4\epsilon^9 - 43/304819200\beta^3\epsilon^{10} - 1/144\alpha^3\beta\epsilon^4 \\
& -1/2304433152000\beta^4\epsilon^{19} - 1/5443200\beta^3\epsilon^6\alpha + 73/304819200\beta^3\epsilon^8\alpha \\
& -43/304819200\beta^3\epsilon^{10}\alpha + 11/304819200\beta^3\epsilon^{12}\alpha - 1/304819200\beta^3\epsilon^{14}\alpha \\
& +1/19051200\beta^3\epsilon^4\alpha - 19/144027072000\beta^4\epsilon^7 - 1/72\alpha^3\beta\epsilon^3 + 1/144\alpha^3\beta\epsilon^2 + 1/72\alpha^3\beta\epsilon \\
& +1/36006768000\beta^4\epsilon^5 + 73/304819200\beta^3\epsilon^8 + 1/19051200\beta^3\epsilon^4 + 1/144027072000\beta^4\epsilon^{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+11/304819200\beta^3\varepsilon^{12} + 1/24\alpha^2\beta\varepsilon + 1/48\alpha^2\beta\varepsilon^2 - 1/24\alpha^2\beta\varepsilon^3 - 1/60480\alpha\beta^2\varepsilon^9 \\ &+1/15120\beta^2\varepsilon^3 - 1/24\alpha\beta\varepsilon^4 - 1/12\alpha\beta\varepsilon^3 + 1/24\alpha\beta\varepsilon^2 + 1/12\alpha\beta\varepsilon - 1/120960\alpha^2\beta^2\varepsilon^9 \\ &-1/13440\alpha^2\beta^2\varepsilon^5 + 1/30240\alpha^2\beta^2\varepsilon^3 + 1/15120\alpha\beta^2\varepsilon^3 - 1/6720\alpha\beta^2\varepsilon^5 + 1/10080\alpha\beta^2\varepsilon^7 \\ &+1/12096\alpha\beta^2\varepsilon^8 - 1/86400\alpha\beta^2\varepsilon^{10} - 1/18900\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 37/201600\alpha\beta^2\varepsilon^6 \\ &-373/1714608000\beta^3\varepsilon^3 - 1/172800\alpha^2\beta^2\varepsilon^{10} + 1/24192\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 37/403200\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 \\ &-1/18900\beta^2\varepsilon^2 - 17/384072192000\beta^4\varepsilon^{15} - 1/60480\beta^2\varepsilon^9 - 1/6720\beta^2\varepsilon^5 + 1/10080\beta^2\varepsilon^7 \\ &+1/6048\beta^2\varepsilon^4 + 1/12096\beta^2\varepsilon^8 - 37/201600\beta^2\varepsilon^6 - 1/86400\beta^2\varepsilon^{10} \\ &-13397/36578304000\beta^3\varepsilon^{11} + 101/1463132160\beta^3\varepsilon^{13} - 79/15676416000\beta^3\varepsilon^{15} \\ &+289/13826598912000\beta^4\varepsilon^{18} - 498541/276531978240000\beta^4\varepsilon^{12} \\ &+4679/1728324864000\beta^4\varepsilon^{10} - 43/39504568320000\beta^4\varepsilon^{20} + 9913/13826598912000\beta^4\varepsilon^{14} \\ &+4181/4389396480\alpha\beta^3\varepsilon^9 + 11/13063680\alpha\beta^3\varepsilon^5 - 11657/9144576000\alpha\beta^3\varepsilon^7 \\ &-79/15676416000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} - 11657/9144576000\beta^3\varepsilon^7 + 11/13063680\beta^3\varepsilon^5 + 1/12\beta\varepsilon^3 \\ &-2939/1234517760000\beta^4\varepsilon^8 + 4181/4389396480\beta^3\varepsilon^9 - 23063/138265989120000\beta^4\varepsilon^{16} \\ &-5/8\beta\varepsilon^2 + 1/6048\alpha\beta^2\varepsilon^4 - 1/37800\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 + 1/20160\alpha^2\beta^2\varepsilon^7 + 1/8\beta\varepsilon^4 - 1/48\alpha^2\beta\varepsilon^4 \\ &+1/12096\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 - 373/1714608000\alpha\beta^3\varepsilon^3 - 13397/36578304000\alpha\beta^3\varepsilon^{11}] \zeta^{5n+1} \\ &+ [-341/2419200\beta^2\varepsilon^6 + 1/20\beta\varepsilon + 1/48\alpha^2\beta\varepsilon^3 + 1/24\beta\varepsilon^2 + 19/74649600\alpha\beta^3\varepsilon^9 \\ &-1/24\beta\varepsilon^3 - 1/720\alpha^3\beta\varepsilon^5 + 1/144\alpha^3\beta\varepsilon^3 - 1/180\alpha^3\beta\varepsilon - 83/192036096000\beta^4\varepsilon^8 \\ &+37/76814438400\beta^4\varepsilon^{10} - 1/24004512000\beta^4\varepsilon^4 + 1/24\alpha\beta\varepsilon^3 - 1/30\alpha\beta\varepsilon - 1/120\alpha\beta\varepsilon^5 \\ &-1/120\beta\varepsilon^5 - 1/240\alpha^2\beta\varepsilon^5 + 31/181440\alpha\beta^2\varepsilon^4 - 19/285768000\alpha\beta^3\varepsilon^3 \\ &-19/18289152000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} - 551/6096384000\alpha\beta^3\varepsilon^{11} - 31/7257600\alpha\beta^2\varepsilon^{10} \\ &+19/76204800\beta^3\varepsilon^5 + 1/4800902400\beta^4\varepsilon^6 - 31/453600\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 551/1524096000\beta^3\varepsilon^7 \\ &-31/14515200\alpha^2\beta^2\varepsilon^{10} + 19/74649600\beta^3\varepsilon^9 - 19/285768000\beta^3\varepsilon^3 \\ &-83/3072577536000\beta^4\varepsilon^{16} + 1/307257753600\beta^4\varepsilon^{18} - 1/6145155072000\beta^4\varepsilon^{20} \\ &-1921/6145155072000\beta^4\varepsilon^{12} + 37/307257753600\beta^4\varepsilon^{14} + 31/725760\beta^2\varepsilon^8 - 1/24\beta\varepsilon^4 \\ &+31/362880\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 + 31/725760\alpha\beta^2\varepsilon^8 - 341/4838400\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 - 1/60\alpha^2\beta\varepsilon \\ &-31/7257600\beta^2\varepsilon^{10} + 19/76204800\alpha\beta^3\varepsilon^5 - 341/2419200\alpha\beta^2\varepsilon^6 - 31/907200\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 \\ &+31/1451520\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 + 31/181440\beta^2\varepsilon^4 - 31/453600\beta^2\varepsilon^2 - 19/18289152000\beta^3\varepsilon^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -551/6096384000\beta^3\varepsilon^{11} + 19/1219276800\beta^3\varepsilon^{13} + 19/1219276800\alpha\beta^3\varepsilon^{13} \\ & -551/1524096000\alpha\beta^3\varepsilon^7] \zeta^{5n+2} + [-1/720\alpha\beta\varepsilon^5 - 7/720\beta\varepsilon^5 - 1/1814400\beta^2\varepsilon^{10} \\ & +1/181440\beta^2\varepsilon^8 - 83/2160406080000\beta^4\varepsilon^8 + 7/144\beta\varepsilon^3 - 7/180\beta\varepsilon - 11/604800\alpha\beta^2\varepsilon^6 \\ & -1/270050760000\beta^4\varepsilon^4 - 29/762048000\alpha\beta^3\varepsilon^7 + 1/37324800\alpha\beta^3\varepsilon^9 \\ & -29/3048192000\alpha\beta^3\varepsilon^{11} + 1/609638400\alpha\beta^3\varepsilon^{13} - 1/9144576000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} + 1/45360\alpha\beta^2\varepsilon^4 \\ & -1/226800\alpha^2\beta^2\varepsilon^2 - 1/113400\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 1/1814400\alpha\beta^2\varepsilon^{10} - 1/142884000\alpha\beta^3\varepsilon^3 \\ & -1/1080\alpha^3\beta\varepsilon - 1/1440\alpha^2\beta\varepsilon^5 - 11/604800\beta^2\varepsilon^6 + 1/181440\alpha\beta^2\varepsilon^8 \\ & -1/69132994560000\beta^4\varepsilon^{20} + 1/609638400\beta^3\varepsilon^{13} - 1/9144576000\beta^3\varepsilon^{15} \\ & +37/3456649728000\beta^4\varepsilon^{14} - 83/34566497280000\beta^4\varepsilon^{16} - 29/762048000\beta^3\varepsilon^7 \\ & -1921/69132994560000\beta^4\varepsilon^{12} - 29/3048192000\beta^3\varepsilon^{11} + 37/864162432000\beta^4\varepsilon^{10} \\ & +1/3456649728000\beta^4\varepsilon^{18} + 1/288\alpha^2\beta\varepsilon^3 - 1/360\alpha^2\beta\varepsilon + 1/864\alpha^3\beta\varepsilon^3 + 1/144\alpha\beta\varepsilon^3 \\ & -1/180\alpha\beta\varepsilon + 1/45360\beta^2\varepsilon^4 - 1/113400\beta^2\varepsilon^2 + 1/37324800\beta^3\varepsilon^9 + 1/38102400\beta^3\varepsilon^5 \\ & -1/142884000\beta^3\varepsilon^3 + 1/54010152000\beta^4\varepsilon^6 - 1/3628800\alpha^2\beta^2\varepsilon^{10} - 1/4320\alpha^3\beta\varepsilon^5 \\ & +1/38102400\alpha\beta^3\varepsilon^5 + 1/362880\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 11/1209600\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 + 1/90720\alpha^2\beta^2\varepsilon^4] \zeta^{5n+3} \\ & + [-a - 1/560\beta\varepsilon^5 + 1/112\beta\varepsilon^3 - 1/140\beta\varepsilon - 1/25401600\alpha^2\beta^2\varepsilon^{10} + 1/635040\alpha^2\beta^2\varepsilon^4 \\ & -11/8467200\alpha^2\beta^2\varepsilon^6 + 1/2540160\alpha^2\beta^2\varepsilon^8 - 1/1500282000\alpha\beta^3\varepsilon^3 + 1/317520\alpha\beta^2\varepsilon^4 \\ & +1/400075200\alpha\beta^3\varepsilon^5 - 29/8001504000\alpha\beta^3\varepsilon^7 + 1/391910400\alpha\beta^3\varepsilon^9 - 1/24\alpha^4 \\ & +1/6401203200\alpha\beta^3\varepsilon^{13} - 1/96018048000\alpha\beta^3\varepsilon^{15} - 11/4233600\alpha\beta^2\varepsilon^6 + 1/1270080\alpha\beta^2\varepsilon^8 \\ & -1/12700800\alpha\beta^2\varepsilon^{10} - 1/630\alpha\beta\varepsilon - 1/1260\alpha^2\beta\varepsilon - 1/3780\alpha^3\beta\varepsilon - 1/15120\alpha^3\beta\varepsilon^5 \\ & +1/400075200\beta^3\varepsilon^5 + 1/1008\alpha^2\beta\varepsilon^3 - 1 - 1/2\alpha^2 - 1/2520\alpha\beta\varepsilon^5 + 1/317520\beta^2\varepsilon^4 \\ & +1/1270080\beta^2\varepsilon^8 - 1/6\alpha^3 - 29/32006016000\alpha\beta^3\varepsilon^{11} - 1/5040\alpha^2\beta\varepsilon^5 - 1/12700800\beta^2\varepsilon^{10} \\ & -11/4233600\beta^2\varepsilon^6 - 29/32006016000\beta^3\varepsilon^{11} + 1/3024\alpha^3\beta\varepsilon^3 + 1/504\alpha\beta\varepsilon^3 \\ & -1/793800\beta^2\varepsilon^2 - 1/3780710640000\beta^4\varepsilon^4 - 1/793800\alpha\beta^2\varepsilon^2 - 83/30245685120000\beta^4\varepsilon^8 \\ & -1/1500282000\beta^3\varepsilon^3 + 1/756142128000\beta^4\varepsilon^6 + 1/6401203200\beta^3\varepsilon^{13} \\ & -1/96018048000\beta^3\varepsilon^{15} - 29/8001504000\beta^3\varepsilon^7 - 1921/967861923840000\beta^4\varepsilon^{12} \\ & +37/48393096192000\beta^4\varepsilon^{14} - 83/483930961920000\beta^4\varepsilon^{16} + 1/48393096192000\beta^4\varepsilon^{18} \\ & -1/967861923840000\beta^4\varepsilon^{20} + 37/12098274048000\beta^4\varepsilon^{10} + 1/391910400\beta^3\varepsilon^9 \\ & -1/1587600\alpha^2\beta^2\varepsilon^2] \zeta^{5n+4} + [1 - 1/2520\beta\varepsilon^5 + 1/504\beta\varepsilon^3 - 1/630\beta\varepsilon] \zeta^{5n+5} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şekil 4.8, 4. mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlılığını gösteren grafikdir ve Çizelge 4.2, RK4 yöntemi kullanılarak (4.0.1) denklemin kararlı bir çözüm verebilmesi için geçerli katsayıları gösterir.



Şekil 4.8: $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ denklemini için Runge-Kutta yönteminin kararlılık grafiği.

Çizelge 4.2: $y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - 1)$ gecikmeli diferansiyel denkleminin RK4 yöntemi ile kararlı çözümleri için katsayı değerleri

$\varepsilon = 0.0$		$\varepsilon = 0.5$		$\varepsilon = 1.0$	
λh	μh	λh	μh	λh	μh
0.00	0.000000	0.0000	0.000000	0.0000	0.000000
0.00	-1.562500	1.5625	-0.007813	1.5625	-0.007813
0.00	-3.125000	3.1250	-0.007813	3.1250	-0.007813
0.00	-4.687500	4.6875	-0.007813	4.6875	-0.007813
0.00	-6.250000	6.2500	-0.007813	6.2500	-0.007813
0.00	-7.812500	7.8125	-0.007813	7.8125	-0.007813
0.00	-9.375000	9.3750	-0.007813	9.3750	-0.007813
0.00	-10.937500	10.9375	-0.007813	10.9375	-0.007813
0.00	-12.500000	12.5000	-0.007813	12.5000	-0.007813
0.00	-14.062500	14.0625	-0.007813	14.0625	-0.007813

ÖZET

Gecikmeli diferansiyel denklemler ile matematiksel modelleme; tıp, popülasyon dinamiği, biyoloji, ekonomi, kontrol sistemleri, fizik gibi fen ve mühendislik alanlarında geniş yer almaktadır. Gecikmeli diferansiyel denklemler ile modelleme yapılması 1940'lı yılların sonunda, Lord Cherwell'in asal sayıların dağılımı üzerindeki çalışması ve Minorsky'nin II. Dünya savaşı sırasında gemilerin dengede kalmasını sağlamak üzere gerçekleştirdiği modelleme ile başlamıştır. Lord Cherwell'in yapmış olduğu modelleme Wright (1946)'ın dikkatini çeker. Wright durumu, "Lord Cherwell'in, asal sayıların dağılımı probleminde tanıttığı denkleme denk bir denklem dikkatimi çekti. Bu ilginç problemle beni tanıştırdığı için kendisine teşekkürlerimi sunarım" diyerek özetler. Böylece gecikmeli diferansiyel denklemlerin teorisi üzerine çalışmalar başlamış olur.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin genel teorisi Wright, Bellmann, Cooke, Hale, Driver, El'sgol'ts, Norkin ve Kuang tarafından detaylı biçimde incelenmiştir. Nümerik çözümleri için önerilen metotlar ise adi diferansiyel denklemleri baz alır. Bu metotların gecikmeli diferansiyel denklemlere uyarlanması asıl sorun gecikme teriminden kaynaklanır. Literatürde çözümler için iki farklı yaklaşım yer almaktadır. İlki, Bellmann tarafından verilen Adımlar yöntemi, ikincisi ise gecikme teriminin yaklaşık değerinin interpolasyon ile bulunmasıdır. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılık analizi üzerinde çok geniş bir araştırma söz konusu olmasına rağmen bu alan henüz tam olarak açıklığa kavuşturulmuş değildir.

Bu tezde gecikmeli diferansiyel denklemler için nümerik çözüm metotları incelenmiş ve kararlılık analizleri yapılmıştır.

SUMMARY

The mathematical modelling using delay differential equations takes place, widely, in the application area of medical science, population dynamics, biology, economy, control systems, physics and more fields of science and engineering. The modeling using delay differential equations (DDEs) have been started in the late of 1940's with the problem of distribution of prime numbers introduced by Lord Cherwell and the modelling, made by Minorsky, to ensure the equilibration of ships in the II. World War. The modelling of Lord Cherwell, drew Wright's attention. Wright said that, "Lord Cherwell drew my attention to an equation, which he had encountered in his application of probability methods to the problem of the distribution of primes. My thanks are due to him for thus introducing me to an interesting problem." Thus, the studies about delay differential equations theory has been originated.

The general theory of DDEs is widely developed by Wright, Bellmann, Cooke, Hale, Driver, El'sgol'ts, Norkin and Kuang. The numerical methods of DDEs are based on ordinary differential equations. However, the main difficulty in the adopting the methods for DDEs occurs because of the delay term. In the literature two different approaches exist to solve delay differential equations, numerically. The first is the method of steps introduced by Bellmann. Secondly, the approximate value of the delay term is calculated with an interpolation. Although the stability analysis of the DDEs have been widely studied, this area is uncovered entirely.

In the thesis, the numerical methods for solving DDEs and the numerical stability analysis have been examined.

Teşekkür

Bu çalışmayı yöneten ve yüksek lisans çalışmalarım boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ'e ve tezimdeki düzeltmeler konusunda yardımcı olan arkadaşlarım Araş. Gör. Yılmaz ERDEM ve Araş. Gör. Ümit TOTUR'a katkılarından dolayı en içten teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca tüm öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olup maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Kaynakça

- Asl F.M., & Ulsoy A.G. (2003), Analysis of a system of linear delay differential equations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125, 215–223.
- Baker C., Bocharov G., Filiz A., Ford N., Paul C., Rihan F., Tang A., Thomas R., Tian H., & Wille D. (1998a), Numerical modelling by retarded functional differential equations. *HERMIS*, 2(2), 25–52, iSSN 1108-7609.
- Baker C., Bocharov G., Filiz A., Ford N., Paul C., Rihan F., Tang A., Thomas R., Tian H., & Wille D. (2001), Numerical modelling by delay and volterra functional differential equations. *HERMIS*, 2(2), 29–52, iSSN 1108-7609.
- Baker C., Bocharov G., & Rihan A. (1999), A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences. Numerical Analysis Report 343, Manchester Centre for Computational Mathematics, Department of Mathematics, Manchester.
- Baker C.T.H., Bocharov G.A., Filiz A., Ford N.J., Paul C.A.H., Rihan F.A., Tang A., Thomas R.M., Tian H., & Willé D.R. (1998b), Numerical modelling by retarded functional differential equations. In *MCCM Tech. Rep., 335*, Manchester, ISSN 1360-1725.

- Baker C.T.H., Paul C.A.H., & Willé D.R. (1995), A bibliography on the numerical solutions of delay differential equations. Numerical Analysis Report 269, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics.
- Bellen A., & Zennaro M. (2003), *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation Series, Oxford Science Publication.
- Bellman R., & Cooke K.L. (1963), *Differential-Difference Equations*. Mathematics in Science and Engineering 6, London: Academic Press Inc.
- Boucekkine R., Licandro O., & Paul C. (1996), Differential-difference equations in economics: On the numerical solutions of vintage capital growth models.
- Caberlin M.D. (2002), *Stiff Ordinary and Delay Differential Equations in Biological Systems*. Phd. thesis, McGill University, Department of Mathematics and Statistics, Montreal.
- Corless R., Gonnet G.H., Hare D., Jeffrey D., & Knuth D. (1996), On the lambert ω function. *Advanced Computational Mathematics*, (5), 329 – 359.
- Driver R.D. (1977), *Ordinary and Delay Differential Equations*. No. 20 in Applied Mathematic Series, Springer-Verlag: Kluwer.
- Erdem Y. (2004), Lotka-volterra sistemleri ve sayısal Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi.
- Filiz A. (2000a), *Numerical Solutions of Some Volterra Equations*. Ph.D. thesis, Manchester University.

- Filiz A. (2000b), Lotka-Volterra sistemleri ve uygulamaları. In *Doç. Dr. Eyüp Sabri TÜRKER Anısına Matematik Sempozyumu*, pp. 92–102, Adapazarı.
- Filiz A. (2004), Lotka-volterra sistemleri ve nümerik çözümleri üzerine. XVII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu - TÜRKİYE.
- Gopalsamy K. (1992), *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Dordrecht: Kluwer.
- Hairer E., Nørsett S.P., & Wanner G. (2000), *Solving Ordinary Differential Equations I*. No. 8 in Springer Series in Computational Mathematics, Springer, second, corrected printing ed.
- In't Hout K.J. (2001), Convergence of runge-kutta methods for delay differential equations. *BIT*, 41(2), 322 – 344.
- Kaplan J.K., & Yorke J.A. (1974), Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (48), 317–324.
- Kuang Y. (1993), *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, vol. Boston. Academic Press.
- Meinardus G., & Nürnberger G. (1984), Approximation theory and numerical methods for delay differential equations. *International Symposium at the University of Mannheim, Germany*.
- Paul C.A.H. (1991), Developing a delay differential equation solver. Numerical Analysis Report 204, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics.

- Paul C.A.H. (1995), A user-guide to archi an explicit runge-kutta code for solving delay and neutral differential equations. Numerical Analysis Report 283, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics.
- Paul C.A.H. (2000), Designing efficient software for solving delay differential equation. Numerical Analysis Report 368, University of Manchester/UMIST, Manchester Centre for Computational Mathematics.
- Shampine L., & Thompson S. (2000a), Solving ddes in matlab.
- Shampine L., & Thompson S. (2000b), Solving delay differential equations with dde23.
- İsmail F., Al-Khasawneh R.A., & Suleiman M. (2003), Comparison of interpolations used in solving delay differential equations by runge-kutta method. *Intern. J. of Computer Math.*, 80(7), 921–930.
- Villasana M., & Radunskaya A. (2003), A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of Mathematical Biology*, 47, 270–294.
- Wright E.M. (1946), A non-linear difference-differential equation. *Quart J. Math.*, (17), 245 – 252.

Öz Geçmiş

1976 yılında Elazığ'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Elazığ'da tamamladı. 1997 yılında Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Bilgisayar Ağırlıklı Matematik lisans öğretim programından mezun oldu. 1999 - 2002 yılları arasında özel bir öğretim kurumunda öğretmen olarak çalıştı. 2002 yılında Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevi devam etmektedir.