T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-009

SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE İLGİLİ MODÜLLER

Mine UYSAL

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mine UYSAL tarafından hazırlanan " Sonlu Üreteçli Modüller ve İlgili Modüller" başlıklı tez, 19.01.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ	Uşak Üniversitesi Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

19.01.2018

Mine UYSAL

ÖZET

SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE İLGİLİ MODÜLLER

Mine UYSAL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2018, 37 sayfa

Bu tezde, sonlu üreteçli modüllerin temel tanım ve özellikleri verilerek karakterizasyonu çalışılmıştır. İlk üç bölümde sonlu üreteçli modüllerin bazı temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde radikal ve zincir şartları ile sonlu üreteçli modüllerin ilgisi incelenmiştir. Son bölümde sonlu üreteçli modüllerin ileri karakterizasyonları çalışılmış ve bazı uygulamaları verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Sonlu üreteçli modül, Noether modül, Radikal, small altmodül, essential altmodül, Noether halka

ABSTRACT

FINITELY GENERATED MODULES AND RELATED MODULES

Mine UYSAL

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2018, 37 pages

In this thesis, characterization of the finitely generated modules is practised with giving is basic definitions and properties. In the first three section, basic properties of finitely generated modules has been given. In the forth and fifth sections relations of finitely generated modules with radical and chain conditions are demonstrated. In the last section, advance characterization of finitely generated modules has been studied and some applications of them are given.

Key Words: Finitely generated module, Noether module, Radical, small submodule, esesential submodule, Noether ring

ÖNSÖZ

Tez çalışma dönemim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik ve bilimsel bakış açısısı geliştirmeme zemin hazırlayan saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), ayrıca bu dönemde yorumlarıyla sağlamış olduğu bilimsel katkılarından dolayı saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü başkanı) yürekten teşekkür ederim. Tüm yaşamım boyunca desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük payı olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mine UYSAL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{U}$	: Sol R-modüllerin sınıfı
$_RM$	: M sol R-modül
$_R\mathcal{M}$	: Sol R-modüllerin kategorisi
$A \leq B$	: A, B nin altmodülü
$A \lneqq B$	: A, B nin öz altmodülü
$A \ll B$	: A, B nin small altmodülü
A/B	: A nın B ye bölüm modülü
$\bigoplus A$	: A modüllerinin direkt toplamı
$\prod A$	: A modüllerinin direkt çarpımı
$\sum A$	: A modüllerinin toplamı
$U^{(A)}$	: U ların direk toplamı
$Hom_R(A,B)$	: A dan B ye olan R-homomorfizmalarının sınıfı
$End(_MR)$	: M modülünün endomorfizma halkası
$RadM$	: M modülünün radikali
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$l_R(a)$	: Bir M modülünde a elemanının R de sol sıfırlayanı
$Ann_R(M)$	: Bir M modülünün R de sıfırlayanı
$T(M)$	: M modülünün torsion altmodülü
$n(u)$	: Bir u elemanın mertebesi
$Ker(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$Im(f)$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$Tr_R(A)$	: A nın İzi (trace)
$Rej_M(\mathcal{U})$	: $\mathcal{U}$ nın M de rejecti
$Gen(U)$	: U ile üretilmiş modüllerin sınıfı
$FGen(U)$	: U ile sonlu üretilmiş modüllerin sınıfı
$\mathcal{L}(M)$	: M nin bütün altmodüllerinin kafesi (lattice)

1. GİRİŞ

Vektör uzaylarında önemli olan fakat kategorik olmayan üreteç kavramının duali yoktur. Ancak modül teoride bu durumun genelleştirilmesi olarak, sonlu üreteçli modüller kategoriktir. Aynı zamanda sonlu üreteçli modüller için dual kavram da söz konusudur. Sonlu üreteçli modüllerin duali olarak sonlu eş-üretilmiş modüller çalışılmaktadır. Bu nedenle modül teoride sonlu üreteçli modülleri çalışmak önemlidir. Bu tezde sonlu üreteçli modüller incelenmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve özellikler verilmiştir [1] ve [2].

Üçüncü bölümde sonlu üreteçli modüllerin tanımı verilerek, sonlu üretilmiş modüllerin karakterizasyonu incelenmiştir [1], [2] ve [3].

Dördüncü bölümde radikal kavramı verilerek sonlu üreteçli modüllerin radikal ile arasındaki bağlantılar çalışılmıştır. Daha sonra sonlu üreteçli modüllerin projektif modül ve trace (iz) arasındaki ilişkisi incelenmiştir [1].

Beşinci bölümde Noether modül tanımı verilerek, bu tanım ile sonlu ürençli modüllerin farklı bir karakterizasyonu incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde bir R halkasının Noether modül ile yapılandırılması çalışılmıştır [1].

Son bölümde sonlu üreteçli modüllerin ileri karakterizasyonlarına ve bazı uygulamalarına yer verilmiştir [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

2. TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde tez için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1. [5] R bir halka olsun. M bir değişmeli toplamsal grup olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} *: & R \times M & \to & M \\ & (r,m) & \mapsto & r*m \end{array}$$

dış işlemi olarak adlandırılan dönüşüm için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise M *ye sol R-modül denir* ve ${}_RM$ ile gösterilir. Her m, m_1, $m_2 \in M$ ve her r, r_1, $r_2 \in R$ için

(1) $r*(m_1+m_2) = r*m_1 + r*m_2$

(2) $(r_1+r_2)*m = r_1*m + r_2*m$

(3) $r_1*(r_2*m) = (r_1 \cdot r_2)*m$

R birimli bir halka ve M bir sol R-modül olsun.

(4) $1 \in R$ ve $m \in M$ için $1*m = m$ ise M ye *birimsel* sol R-modül denir. Benzer şekiklde $*: M \times R \to M$ dış işlemi ile sağ R-modül de tanımlanır.

Tanım 2.1.2. [5] M bir sol R-modül olsun. M nin boş olmayan bir N alt kümesi, kendi başına sol R-modül oluyorsa N ye M nin bir *altmodülü* denir ve $N \leq M$ veya ${}_RN \leq_R M$ biçiminde gösterilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe halkalar birimli ve modüller birimsel sol R-modüller olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.3. [5] Sıfırdan farklı bir M modülünün her A altmodülü için ya $A = 0$ veya $A = M$ ise M ye bir *basit (simple) modül* denir. Yani bir M modülü basit ise $M \neq 0$ dır ve, sıfır ve kendisinden başka altmodülü yoktur.

Tanım 2.1.4. [5] M nin basit altmodüllerinin indislenmiş kümesi $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer $M = \bigoplus\limits_{A} M_\alpha$ ise M ye *yarı basit modül* (semisimple) denir.

Tanım 2.1.5. [5] Bir M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü N olsun. M nin N de içerilen sıfırdan ve N den başka altmodülü yok ise N modülüne M nin bir *minimal altmodülü* denir.

N nin bir minimal altmodül olması için gerek ve yeter koşul basit altmodül olmasıdır.

Tanım 2.1.6. [5] Bir M modülünün bir öz altmodülü N olsun. M modülünün N modülünü kapsayan N modülünden başka hiçbir öz altmodülü yok ise N modülününe M nin bir *maksimal altmodülü* denir.

Tanım 2.1.7. [5] M bir sol R-modül olsun. M nin her U altmodülü için
$A+U=M$ olması durumunda $U=M$ oluyorsa A altmodülüne M de *small (superfluous) altmodül* denir ve $A \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. [5] R bir halka M ve N sol R-modüller olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa f ye bir sol *R-modül homomorfizması* adı verilir.

(1) Her $m_1, m_2 \in M$ için $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$

(2) Her $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$ dir.

f homomorfizması örten ise *epimorfizma*, birebir ise *monomorfizma* , birebir ve örten ise *izomorfizma* adı verilir.

Tanım 2.1.9. [5] M ve N iki sol R-modül olmak üzere bir $\alpha : M \to N$ homomorfizması için $Ker(\alpha) \ll M$ ise α ya *small homomorfizma* denir. Eğer α örten ise α ya *small epimorfizma* denir.

Tanım 2.1.10. [5] M bir sol R-modül ve B, M nin altmodülü olsun. $M = B \oplus C$ olacak şekilde M nin bir C altmodülü var ise B ye M nin *direk toplananı (direct summand) denir*. Ayrıca $M \neq 0$ olsun, M nin sıfırdan ve kendisinden başka direk toplananı yoksa M ye *direk parçalanamaz (direct indecomposable) modül* denir.

Sonuç 2.1.11. [5, Corollary 3.4.11 (2)] *R bir halka, B ve C sol R-modüller olsun. Bir $\beta : B \to C$, R-modül homomorfizması için aşağıdakiler denktir:*

(1) β *bir parçalanabilir epimorfizmadır.*

(2) $\beta\gamma = 1_C$ *olacak şekilde* $\gamma : C \to B$ *homomorfizması vardır.*

Teorem 2.1.12. [5, Theorem 5.3.1] *Bir* ${}_RP$ *modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) Her $\xi : B \to P$ *epimorfizması parçalanabilir (yani* $Ker(\xi)$*, B de direk toplanandır).*

(2) Her $\beta : B \to C$ *epimorfizması ve her* $\psi : P \to C$ *homomorfizması için* $\psi = \beta\lambda$ *olacak şekilde bir* $\lambda : P \to B$ *homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

(3) Her $\beta : B \to C$ *epimorfizması için* $Hom(1_P, \beta) : Hom_R(P, B) \to Hom_R(P, C)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.13. [5] Teorem 2.1.12 de belirtilen denk koşullarından birini sağlayan bir ${}_RP$ modülüne *projektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.14. [4] G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde en küçük n pozitif tam sayısına *a elemanın mertebesi* denir. Eğer G grubu toplamsal bir grup ise o zaman $a \in G$ için $n.a = e$ olacak şekilde en küçük pozitif n tam sayısına *a elemanının mertebesi* denir ve $n(a)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. [4] G bir abel grup olsun. $G_t = \{\ u \in G \mid n(u)\ sonlu\ \}$ kümesi G nin bir alt grubudur. Bu alt gruba G nin bir *torsion altgrubu* denir.

Tanım 2.1.16. [4] G bir abel grup olsun ve $G_t = \{\ u \in G \mid n(u)\ sonlu\ \}$ kümesi verilsin. Eğer $G = G_t$ ise ozaman G abel grubuna *torsion grup* denir.

Tanım 2.1.17. [2] M bir R-modül olsun. Bir $m \in M$ için

$Ann_R(m) = \{\ r \in R \mid rm = 0\ \}$ m nin R deki *sıfırlayanı* denir. Bu kümenin R de bir ideal olduğu açıktır. Bir $m \in M$ elemanı için , eğer m nin sıfırlayanı sıfır ideali değil ise m ye M nin bir *torsion elemanı* denir.

Tanım 2.1.18. [5] R bir değişmeli tamlık bölgesi ve M sol R-modül olsun. $T(M) = \{\ x \in M \mid \ell_R(x) \neq 0\ \}$ kümesi bir altmodüldür. Bu altmodül M nin bir *torsion altmodülü* olarak adlandırılır. Eğer $T(M) = M$ ise M ye *torsion*, $T(M) = 0$ ise M ye *torsion free modül* denir.

Tanım 2.1.19. [5] M bir sol R-modül olsun. $A, B, C \leq M$ ve $B \leq C$ olmak üzere $(A+B) \cap C = (A \cap C) + B$ eşitliğine *Modülarite Kuralı* denir.

Lemma 2.1.20. *(Zorn Lemma) A boş olmayan bir küme ve $\leqslant$ bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. A nın her tam sıralı alt kümesinin bir üst sınırı varsa A kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.*

Tanım 2.1.21. [4] R bir halka, A bir R-modül ve X, A nın bir alt kümesi olsun. Farklı $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ elemanları ve $r_i \in R$ olmak üzere $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n = 0$ olduğunda her i için $r_i = 0$ oluyorsa X alt kümesine *doğrusal (lineer) bağımsızdır* denir. Doğrusal (lineer) bağımsız olmayan kümeye *doğrusal (lineer) bağımlıdır* denir.

Eğer, A bir Y kümesi ile R-modül olarak üretilen üretilmiş ise o zaman Y, *A yı gerer* denir. R birimli bir halka ve A birimsel ise Y nin A yı germesi için gerek ve yeter koşul A nın her elemanı $r_i \in R$ ve $y_i \in Y$ için $r_1y_1 + r_2y_2 + \ldots + r_ny_n$ bir doğrusal (lineer) kombinasyon olarak yazılabilir.

A nın A yı geren bir doğrusal (lineer) bağımsız alt kümesine *A nın tabanı* denir.

Boş küme doğrusal (lineer) bağımsızdır ve sıfır modülünün bir tabanıdır.

Teorem 2.1.22. [4, Theorem 2.1.] *R birimli bir halka olsun. Birimsel bir R-modül F için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1) F nin boş olmayan bir tabanı vardır.

(2) F, her biri sol R-modül olarak R ye izomorf olan devirli R-modüllerin bir ailesinin iç direk toplamıdır.

(3) F, sol R-modül R nin kopyalarının bir direk toplamına R-modül izomorftur.

(4) Aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı bir X kümesi ve bir $\iota : X \to F$

fonksiyonu vardır:

Herhangi bir birimsel R-modül A ve $f : X \to A$ *fonksiyonu verilsin. O zaman* $\bar{f}\iota = f$ *olacak şekilde bir tek* $\bar{f} : F \to A$*, R-modül homomorfizması vardır. Başka bir deyişle* F*, birimsel R-modüller kategorisinde bir free objedir.*

Yukarıdaki teoremin denk şartlarını sağlayan bir R halkası üzerindeki birimsel F modülüne X kümesi üzerinde bir *serbest (free) R-modül* adı verilir.

3. SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar birimli ve modüller birimsel sol R-modüller olarak alınacaktır.

3.1. Sonlu Üreteçli Modüllere Giriş

$\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı ve M bir sol R-modül olsun. $\mathcal{U}$ da bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi var ve

$$\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0$$

tam dizi ise M modülüne $\mathcal{U}$ ile *(sonlu) üretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$, M yi *sonlu üretir* denir. Eger $\mathcal{U} = \{U\}$ tek elemanlı bir küme ise o zaman U, M yi sonlu üretir. Bunun anlamı (sonlu) A kümesi için

$$U^{(A)} \to M \to 0$$

tam dizisi vardır.

Şimdi bir sonraki bölümde kullanacağımız aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.1.1. [1, Proposition 6.8.] *A bir indis kümesi ve $\alpha \in A$ için M_α modüllerinin M_α ailesi için eğer $f = \bigoplus_A f_\alpha$, $f_\alpha : M_\alpha \to N$ homomorfizmalarının direk toplamı ise $Imf = \sum_A Imf_\alpha$ dır.*

Teorem 3.1.2. [1] *Bir sol R-modül M için $X \subseteq M$ olacak şekilde M yi geren X alt kümesi var ise, o zaman*

$$R^{(X)} \to M \to 0$$

epimorfizması vardır. Bununla birlikte R nin, M yi sonlu üretmesi için gerek ve yeter koşul M nin bir sonlu geren kümesinin var olmasıdır.

İspat: $X \subseteq M$, M yi geren küme olsun. Her $x \in X$ için

$$\begin{array}{rrl} \rho_x : & R \to & M \\ & r \mapsto & r.x \end{array}$$

ile tanımli sol R-modül homomorfizması olsun. Burada $\rho = \bigoplus \rho_x$ direk toplam homomorfizması olsun.

$$R^{(X)} \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

tam dizisi vardır. Buradan

$$Im\rho = \sum Im\rho_x = \sum Rx = M \text{ dir}$$

Böylece $\rho : R^{(X)} \to M$ bir epimorfizmadır. O halde $R^{(X)} \to M \to 0$ tam dizisi vardır.

Şimdi R, M yi sonlu üretsin. O zaman hipotezden M yi üreten sonlu bir $X \subseteq M$ alt kümesi vardır. Burada X, M nin geren kümesidir.

Tersine M yi geren sonlu bir $X \subseteq M$ alt kümesi var ise o zaman üst varsayımdan $R^{(X)} \to M \to 0$

epimorfizması vardır. Bu ise R nin , M yi sonlu üretmesi anlamına gelir. $\square$

Örnek 3.1.3. [1] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. $\mathbb{Z}$-modül M nin $\mathbb{Z}$-modül olarak sonlu mertebeden elemanlarının kümesi $T({}_{\mathbb{Z}}M)$ olsun. Böylece ${}_{\mathbb{Z}}M$ torsiondur.

${}_{\mathbb{Z}}M$ torsion ise her $x \in M$ için $n(x) > 0$ doğal sayısı ve $Imf_x = \mathbb{Z}x$ ile tanımlı $f_x : \mathbb{Z}_{n(x)} \to M$ homomorfizması vardır. Burada $f = \bigoplus f_x$ direk toplamı bir $f : \bigoplus Z_{n(x)} \to M$ epimorfizmasıdır.

Bu durumda $\mathbb{Z}_6$=$\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5} \}$ kümesini göz önüne alalım. Bu mertebesi sonlu elemanların kümesi, elemanları $\mathbb{Z}$ de sıfırlayanları sıfırdan farklı olan elemanlardır.

Böylece $T(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$ olur. Yani $\mathbb{Z}_6$ torsion $\mathbb{Z}$-modül olur.

${}_{\mathbb{Z}}M = \mathbb{Z}_6$ yi alırsak, $\overline{x} = \overline{0}$ elemanı için $\overline{0}$ nın mertebesi $n(\overline{0}) = 1 > 0$

$\overline{x} = \overline{1}$ elemanı için $\overline{1}$ nın mertebesi $n(\overline{1}) = 6 > 0$

$\overline{x} = \overline{2}$ elemanı için $\overline{2}$ nın mertebesi $n(\overline{2}) = 3 > 0$

$\overline{x} = \overline{3}$ elemanı için $\overline{3}$ nın mertebesi $n(\overline{3}) = 2 > 0$

$\overline{x} = \overline{4}$ elemanı için $\overline{4}$ nın mertebesi $n(\overline{4}) = 3 > 0$

$\overline{x} = \overline{5}$ elemanı için $\overline{5}$ nın mertebesi $n(\overline{5}) = 6 > 0$

$f_x : \mathbb{Z}_{n(x)} \to M$

$f_{\overline{0}} : \mathbb{Z}_1 \to \mathbb{Z}_6$

$f_{\overline{1}} : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$

$f_{\overline{2}} : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$

$f_{\overline{3}} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6$

$f_{\overline{4}} : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$

$f_{\overline{5}} : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$

Örnek olarak

$$
\begin{aligned}
Imf_{\overline{2}} &= \{f_{\overline{2}}(x) | x \in \mathbb{Z}_3\} \\
&= \{f_{\overline{2}}(\overline{0}), f_{\overline{2}}(\overline{1}), f_{\overline{2}}(\overline{2})\} \\
&= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \\
&= \mathbb{Z}\overline{2} = \{\overline{0}.\overline{2}, \overline{1}.\overline{2}, \overline{2}.\overline{2}\}
\end{aligned}
$$

Eğer M sonlu devirli grupların bir direk toplamının epimorf görüntüsü ise açıkça sonlu merteberden elemanlarla üretilir böylece torsion olur.

Bir abel grup torsiondur ancak ve ancak $\mathcal{U}$=$\{ \mathbb{Z}_n \mid n = 2, 3, ... \}$ ile üretilir. Bu ise torsion abel grubun $\bigoplus_N \mathbb{Z}_n$ tarafından üretilmiş olduğu anlamına gelir.

3.2. Sonlu Üreteçli Modüllerin Karakterizasyonu

Tanım 3.2.1. [1] M bir sol R-modül $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin M yi üreten kümesi olsun.

O zaman sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $\mathcal{F}$, M yi üretiyorsa M ye *sonlu üretilmiştir* denir.

Yani her sonlu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için,

$$\sum \mathcal{A} = M \quad ise \quad \sum \mathcal{F} = M$$

dir.

Önerme 3.2.2. [1] *Bir sol R-modül için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) M sonlu üretilmiştir.

(2) $M = \sum_{\mathcal{A}} Imf_x$ *olacak şekilde her* $f_x : U_\alpha \to M$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ *fonksinyonu için* $M = \sum_{\mathcal{F}} Imf_x$ *olmak üzere sonlu bir* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *vardır.*

(3) Her $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indislenmiş kümesi* $\bigoplus_A U_\alpha \to M \to 0$ *için, sonlu bir* $\mathcal{F} \subseteq A$ *kümesi ve* $\bigoplus_{\mathcal{F}} U_\alpha \to M \to 0$ *epimorfizması vardır.*

(4) M yi üreten her modül M yi sonlu üretir.

(5) M nin bir sonlu geren kümesi vardır.

İspat:

$(1) \Rightarrow (2)$. Açık.

$(3) \Rightarrow (4)$. Tanımdan açık.

$(2) \Rightarrow (3)$. Önerme 3.1.1 gereğince

$fi_\alpha : U_\alpha \to M$ $(\alpha \in A)$ dır.

$f = \bigoplus_A U_\alpha \to M$ epimorfizmadır $\Leftrightarrow \sum_A Im(fi_\alpha) = M$ olduğundan hipotezden

$M = \sum_{\mathcal{F}} Im(fi_\alpha)$ olur.

$(4) \Rightarrow (5)$. Teorem 1.1 in ispatının bir parçasıdır.

$(5) \Rightarrow (2)$. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kümesi M yi üreten bir küme ve $\mathcal{A}$, M nin $M = \sum \mathcal{A}$ olacak şekilde altmodüllerinin bir kümesi olsun.

O zaman her $x_i \in \sum \mathcal{F}_i$ olacak şekilde bir sonlu $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi vardır.

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n$ olsun.

$\mathcal{F}$ sonludur ve $\sum \mathcal{F}$, M nin bir altmodülü olduğundan ve $\sum \mathcal{F} = M$ dir.

Bu ise M nin sonlu üreteçli olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 3.2.3. [1, Proposition 8.10. (1)] *U ve M sol R-modüller olsun. O zaman U nun , M yi (sonlu) üretmesi için gerek ve yeter koşul* $M = \sum_{h \in H} Imh$ *ile tanımlı sonlu bir* $H \subseteq Hom_R(U,M)$ *alt kümesinin var olmasıdır.*

İspat: İspatı Teorem 3.1.2 den kolayca görülür. □

Sonuç 3.2.4. [1, Corollary 8.11. (1)] *U ve M sol R-modüller olmak üzere U nun M yi üretmesi için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her* $f : M \to N$ *homomorfizması için* $fh \neq 0$ *olacak şekilde* $h \in Hom(U,M)$ *var olmasıdır.*

Tanım 3.2.5. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$, sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. $Tr_M(\mathcal{U}) = \sum \{ \, Imh \mid h : U \to M, U \in \mathcal{U} \, \}$ ye $\mathcal{U}$ nun M de izi (trace) denir.

Sonuç 3.2.6. [1, Corollary 8.13.] *M bir sol R- modül ve* $\mathcal{U}$ *sol R-modüllerin bir kümesi olsun. O zaman* $\mathcal{U}$ *sınıfının M yi üretmesi için gerek ve yeter koşul* $Tr_M(\mathcal{U}) = M$ *olmasıdır.*

${}_R\mathcal{M}$ kategorisindeki bir $f : M \to N$ homomorfizması için
$f_* : Hom_R(G,M) \to Hom_R(G,N)$ olmak üzere $f_* = Hom_R(G,f)$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.2.7. [1] *Bir sol R-modül G için aşağıdakiler denktir:*

(1) *G bir üreteçtir.*

(2) ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisindeki her f homomorfizması için* $Hom(G,f) = 0$ *ise* $f = 0$ *dır.*

(3) ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisindeki her* $f :_R M \longrightarrow_R N$ *için eğer*
$f_* : Hom(G,M) \longrightarrow Hom_R(G,N)$ *örten ise, f örtendir.*

(4) *Eğer* ${}_R\mathcal{M}$ *kategorisinde* $Hom(G,M') \xrightarrow{f_*} Hom(G,M) \xrightarrow{g_*} Hom(G,M'')$ *dizisi tam ise ozaman* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *dizisi tamdır.*

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$. Sonuç 3.2.4 in direk sonucudur.

$(1) \Rightarrow (4)$. G bir üreteç olsun. ${}_R\mathcal{M}$ kategorisinde
$Hom_R(G,M') \xrightarrow{f_*} Hom(G,M) \xrightarrow{g_*} Hom(G,M'')$ dizisi tam olacak şekilde
$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ dizisini alalım.

$g_*f_* : Hom(G,M') \to Hom(G,M'')$ dir.

$g_*f_* = Hom(G,gf)$, $Imf_* = Kerg_*$ dır. $g_*f_*(h) = g_*(f_*(h)) = 0$ olduğu için $g_*f_* = 0 = Hom(G,gf)$ olur. Önerme 3.2.7 $(a) \Leftrightarrow (b)$ gereğince $gf = 0$ dır.

O halde $Imf \leq Kerg$ olur.

Şimdi $Kerg \leq Imf$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in Kerg$ olsun. Kabulümüzden G, $Kerg$ yi de üreteceğinden bir $\beta_i : G \to Kerg \leq M$ homomorfizması vardır. O halde $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y_i)$ olacak şekilde $y_i \in G$ vardır. O zaman her i için $g\beta_i = 0$ dır.

Böylece $\beta_i \in Kerg_* = Imf_*$ olur. Böylece her i için $\beta_i = f_*(\alpha_i) = f\alpha_i$ olacak şekilde bir $\alpha_i \in Hom(G,M')$ vardır. Buradan $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y_i) = \sum_{i=1}^{n} f\alpha_i(y_i) \in Imf$ olur. Böylece $Kerg \leq Imf$ bulunur. O halde $Imf = Kerg$ olur. Yani $M' \to M \to M''$ dizisi tam olur.

$(4) \Rightarrow (3)$. Açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sonuç 3.2.6 gereğince her ${}_RM$ modülü için $Tr_M(G) = M$ olduğunu göstereceğiz.

$0 \to Tr_M(G) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\eta} M/Tr_M(G) \to 0$ kısa tam dizisi göz önüne alınırsa:

$0 \to Hom_R(G, Tr_M(G)) \xrightarrow{\iota_*} Hom_R(G,M) \xrightarrow{\eta_*} Hom(G, M/Tr_M(G))$

tam dizisi vardır.

Eğer $\beta \in Hom_R(G,M)$ ise , o zaman $[\eta_*(\beta)](G) = \eta_*(\beta(G)) = 0$ olur. Çünkü $\beta(G) \subseteq Tr_M(G) = Ker\eta$ dır.

Böylece $Im\iota_* = Ker\eta_* = Hom(G,M)$ olur ve ι_* örtendir. (3) koşulundan dolayı ι örten olur. Böylece $Tr_M(G) = Im\iota = M$ olur. Burada $Tr_G = M$ olduğundan Sonuç 3.2.6 den dolayı G, M yi üretir. □

Sonlu üreteçli modüller için ek olarak aşağıdaki özellikleri verebiliriz.

Önerme 3.2.8. [8] *K sonlu üretilmiş sol R-modül ve $\{U_\lambda\}_\Lambda$ sol R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikler vardır.*

(1) Her $f : K \to \bigoplus_\Lambda U_\lambda$ homomorfizması için $f(K) \leq \bigoplus_E U_\lambda$ olacak şekilde sonlu bir $E \leq \Lambda$ vardır.

(2) $Hom_R(K, \bigoplus_{\Lambda} U_\lambda) \cong \bigoplus_{\Lambda} Hom(K, U_\lambda)$ *dır. Yani,* $Hom_R(K, -)$ *direk toplamları korur.*

İspat: (1). Her $k \in K$ için $f(k)$ elemanı $\{U_\lambda\}_\Lambda$ nın sonlu bir kısmi toplamı içinde kalır. Böylece $f(K)$ nın sonlu üretilmiş bir kümesi sonlu bir $\bigoplus_{E} U_\lambda$ direk toplamı içinde kalır. Buradan $f(K) \leq \bigoplus_{E} U_\lambda$ olur.

(2). $\phi : Hom(K, \prod_{\Lambda} U_\lambda) \to \prod_{\Lambda} Hom(K, U_\lambda)$ izomorfizmasının kısıtlanmışı olarak, $\phi' : Hom(K, \bigoplus_{\Lambda} U_\lambda) \to \prod_{\Lambda} Hom(K, U_\lambda)$ monomorfizmasını elde ederiz.

(1) den her $f \in Hom(K, \bigoplus_{\Lambda} U_\lambda)$ için $f \in Hom(K, \bigoplus_{E} U_\lambda)$ olacak şekilde sonlu bir $E \subseteq \Lambda$ alt kümesi vardır. Böylece $\phi'(f) \in \bigoplus_{E} Hom(K, U_\lambda)$ olur. Buradan $Im\phi' = \{ \phi'(f) \mid f \in Hom(K, \bigoplus_{\Lambda} U_\lambda) \} \leq \bigoplus_{E} Hom(K, U_\lambda)$ olmuş oldu. Buradan açık olarak $Im\phi' = Hom(K, \bigoplus_{\Lambda} U_\lambda)$ olur ve ispat tamamlanır. □

Örnek 3.2.9. [1] $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak sonlu üretilmiştir.

Örnek 3.2.10. [5] $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak sonlu üretilmiş değildir.

Örnek 3.2.11. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül olarak sonlu üretilmiştir.

4. RADİKALLER VE SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER

4.1. Sonlu Üreteçli Modüllerin Radikal ile Yapılandırılması

Tanım 4.1.1. [1] Bir sol R-modül M için

$$\begin{aligned} RadM &= \bigcap \{\ K \leq M \ \mid \ K, M \ \ de \ \ maksimal\ \} \\ &= \sum \{\ L \leq M \ \mid \ K \ll M\ \} \end{aligned}$$

tanımlansın. $RadM$, M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle M nin *radikali* denir.

Tanım 4.1.2. [8] R bir halka olsun. $Rad({}_RR)$ ye, R_R nin (Jacobson) radikali denir. $Rad({}_RR)$, R nin iki yanlı idealidir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.3. [1] *M bir sol R-modül olsun. O zaman ,*
M nin sonlu üretilmesi için gerek ve yeter koşul $M/RadM$ nin sonlu üretilmesi ve $M \to M/RadM \to 0$ dizisindeki doğal epimorfizmanın small olmasıdır. (Yani $RadM \ll M$)

İspat: ($\Rightarrow$). M sonlu üretilmiş olsun. $M/RadM$ sonlu üretilmiş olur. $RadM + K = M$ olacak şekilde $K \leq M$ alalım. $K = M$ olduğnu gösterelim. $RadM$, M nin small altmodüllerinin toplamı olduğundan
$RadM = \sum \{\ L \leq M \mid L \ll M\ \}$ dır. Böylece M sonlu üretilmiş olduğundan
$(L_1 + L_2 + ... + L_n) + K = M$ olacak şekilde M nin $L_1, L_2, ..., L_n$ small altmodülleri vardır. Fakat $L_1 + L_2 + ... + L_n$ toplamı M de small olduğundan (small altmodüllerin toplamı small olduğundan) $K = M$ olur.
($\Leftarrow$). $M/RadM$ sonlu üretilmiş ve $RadM \ll M$ olsun. M nin sonlu üretilmiş olduğunu gösterelim. $\sum \mathcal{A} = M$ olacak şekilde $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\sum\ \{\ (A + RadM) \mid A \in \mathcal{A}\ \} = M$ olur. Buradan $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ için
$M = (A_1 + RadM) + (A_2 + RadM) + ... + (A_n + RadM)$

$M = (A_1 + A_2 + ... + A_n) + RadM$ dır. Buradan

$RadM \ll M$ olduğundan $(A_1 + A_2 + ... + A_n) = M$ dir. Böylece M sonlu üretilmiş olur. $\square$

Sonuç 4.1.4. [1] *M sıfırdan farklı bir modül olsun. M sonlu üretilmiş ise M nin bir maksimal altmodülü vardır.*

İspat: M sonlu üretilmiş ise Teorem 4.1.3 gereğince $RadM \ll M$ olur.

$RadM \neq \varnothing$ olduğundan ve $RadM = \bigcap \{\ K \leq M \mid K, M \ de\ maksimal\ \}$

$0 \neq K \leq M$ olacak şekilde M de bir maksimal altmodül vardır. $\square$

Örnek 4.1.5. [8] *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $Rad_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = 0$ dır. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin hiç small altmodülü yoktur.*

Örnek 4.1.6. [8] *${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ için $Rad_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ dır. Ayrıca ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ nun hiç maksimal altmodülü olmadığından $Rad_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = 0$ dır.*

Örnek 4.1.7. [8] *Bir M modülünün herhangi bir $K \leq M$ altmodülü için*

$RadK \neq K \cap RadM$ dir.

Örneğin, $4\mathbb{Z} \leq 2\mathbb{Z}$ *alalım.* $8\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z} \leq 2\mathbb{Z}$ *olur, buradan*

$Rad4\mathbb{Z} = 8\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \cap Rad2\mathbb{Z}$ dır.

Örnek 4.1.8. [5] $i \neq j$ ve $m_i > 0$ için $p_i \neq p_j$ olacak şekilde, $n > 1$ tam sayısını asal sayıların kuvvetlerinin tek türlü ayrışımı ile $n = {p_1}^{m_1} ... {p_k}^{m_k}$ olarak tanımlayalım. $\mathbb{Z}$ nin maksimal idelalleri asal sayılar ile üretilmiş asal ideallerdir. Bu maksimal idealler $n\mathbb{Z}$ yi içerir ve $i = 1, ..., k$ için $p_i\mathbb{Z}$ idelleridir. Buradan $\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{Z} = p_1 ... p_k\mathbb{Z}$ dır. Böylece

$$Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{Z} \right) \Big/ n\mathbb{Z} = p_1 ... p_k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

olur. O zaman $Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ dır ancak ve ancak $n = p_1 ... p_k$ olmasıdır.

Ayrıca $n = 0$ ve $n = 1$ için $Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ dır.

Örnek 4.1.9. [8] *$RadM$ sonlu üretilmiş ise $Rad(RadM) \neq RadM$ dir. Çünkü M sonlu üretilmiş ise $RadM \ll M$ olmasından dolayı, $RadM \neq M$ dir.*

Önerme 4.1.10. [1] *$M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. M nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul M_i $(i = 1, ..., n)$ modüllerinin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

İspat: $(\Leftarrow)$. $(i = 1, ..., n)$ M_i için geren kümelerin birleşimi M için geren küme olduğundan, sonlu üretilmiş durum sağlanır. (Önerme 3.2.2 $(e) \Rightarrow (a)$ gereğince).
$(\Rightarrow)$. M sonlu üretilmiş olsun.
$U_A \to M \to M_i \to 0$ dizisi ile M_i ler sonlu üretilmiş olur. □

4.2. Radikal, Projektif Modül ve İz Bağlantılı Sonlu Üreteçli Modüller

Önerme 4.2.1. [1, Proposition 8.21.] *Sol R-modüllerin her $\mathcal{U}$ sınıfı için $Tr_R(\mathcal{U})$ bir iki yanlı idealdir. Ayrıca bir $_RM$ modülünün üreteç olması için gerek ve yeter koşul $Tr_R(M) = R$ olmasıdır.*

Önerme 4.2.2. [1] *P bir projektif sol R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) P bir üreteçtir.

(2) Her basit sol R-modül T için $Hom_R(P, T) \neq 0$ dır.

(3) P, her basit sol R-modülü üretir.

İspat:

$(1) \Rightarrow (3)$. Açıktır.

$(3) \Rightarrow (2)$. Açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. P projektif modülü (2) koşulunu sağlasın. P modülünün R yi ürettiğini göstermek için Önerme 4.2.1 gereği $Tr_R(M) = R$ olduğunu göstermeliyiz.
$Tr_R(P) \neq R$ olsun. $Tr_R(P)$, bir sol ideal olduğundan $Tr_R(P)$, R nin bir maksimal I sol ideali içinde kapsanır. Buradan R/I basittir. Kabulden sıfırdan farklı bir $\gamma : P \to R/I$ homomorfizması vardır. P projektif olduğu için

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\bar{\gamma}"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ R \arrow[r, "\alpha"] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapacak şekilde $\bar{\gamma} : P \to R$ homomorfizması vardır.

$Im\bar{\gamma} \leq Tr_R(P) \leq I$ olduğundan $Im\bar{\gamma} \leq I$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $Tr_R(P) = R$ elde edilir. $\square$

Sonuç 4.2.3. [5, Corallary 9.1.3 (a)] *M bir R-modül ve $m \in_R M$ olsun. $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır.*

Lemma 4.2.4. [5, Lemma 9.3.1] *Bir R halkasının bir sol A ideali için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1) $A \ll_R R$.

(2) $A \leq Rad(_RR)$.

(3) *Her $a \in A$ için $(1-a)$ nın R de bir sol tersi vardır.*

(4) *Her $a \in A$ için $(1-a)$ nın R de bir tersi vardır.*

Önerme 4.2.5. [5] *$_RP$ projektif ve $S := End(_RP)$ olsun. O zaman $a \in S$ için*

$Sa \ll S \Leftrightarrow a \in Rad(S) \Leftrightarrow Ima \ll P$

İspat: $Sa \ll_s S \Leftrightarrow a \in RadS$ bu Sonuç 4.2.3 ile sağlanır.

$a \in RadS \Leftrightarrow Ima \ll_R P$ olduğunu gösterelim.

$U <_R P$ ile $Ima + U = P$ olsun ve $\nu : P \to P/U$ doğal epimorfizma olduğundan νa dönüşümü bir epimorfizmadır ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $\beta \in S$ vardır.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\nu"] \\ P \arrow[r, "\nu a"] & P/U \end{tikzcd}$$

$\nu = \nu a\beta$ dan $\nu(1-a\beta)$ dır. Böylece $Im(1-a\beta) < U$ olur. $a \in RadS$ için $a\beta \in RadS$ vardır ve Lemma 4.2.4 gereğince $(1-a\beta)$ tersinirdir. Böylece

$P = Im(1 - a\beta) < U < P$ olur. Buradan $U = P$ elde edilir, böylece $Ima \ll_R P$ bulunur.

Şimdi $Ima \ll_R P$ olsun.$aS \ll_s S$ olduğunu gösterelim. O zaman $\Gamma < S_s$ ile $aS + \Gamma =_s S$ olsun. O zaman burada $\sigma \in S$, $\quad \gamma \in S$ ile $a\sigma + \gamma = 1$ vardır. Buradan $Ima + Im\gamma = P$ olur.$Ima \ll P$ olduğu için $Im\gamma = P$ elde edilir.

Buradan γ epimorfizmadır ve aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak δ homomorfizması vardır. Aşağıdaki diyagramdan

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "1_P"] \\ P \arrow[r, "\gamma"] & P \end{tikzcd}$$

$1_P = \gamma\delta$ olur ve $\Gamma = S$ elde edilir. $\square$

Önerme 4.2.6. [1, Proposition 17.10.] *Bir R halkası için $J(R) = J$ olsun. P projektif sol R-modül ise $RadP = JP$ dir.*

Sonuç 4.2.7. [1] *$J = J(R)$ olsun. Eğer P, $J(P)$ yi small olarak içerecek şekilde (yani P sonlu üretilmiş ise) projektif bir sol R-modül ise, o zaman $J(End(_RP)) = Hom_R(P, JP)$ ve $End(_RP)/J(End_RP) \cong End_R(P/JP)$ dir.*

İspat: Önerme 4.2.6 den $RadP = JP$ dir. Kabulden $JP \ll P$ dir. Tanım 4.1.1 den P nin bir altmodülü small olması için gerek ve yeter koşul JP de içerilmesidir. Özel olarak Önerme 4.2.5 den P nin bir a endomorfizmasının $J(End(_RP))$ ye ait olması için gerek ve yeter koşul $Ima \leq JP$ olmasıdır. $J(End(_RP)) = Hom_R(P, JP)$ dir. Şimdi JP, P nin endomorfizması altında stable olduğundan

$$\begin{array}{rrr} \phi(s): & P/JP \rightarrow & P/JP \\ & p + JP \mapsto & ps + JP \end{array}$$

$$\phi : End(_RP) \rightarrow End(_RP/JP)$$

halka homomomorfizmaları tanımlanır. Gerçekten

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_{jp}} & P/JP \\ \Big\downarrow s & & \Big\downarrow \phi(s) \\ P & \xrightarrow{\eta_{jp}} & P/JP \end{array}$$

değişmeli diyagramında P projektif olduğu için ϕ örten homomorfizma olur. Açıkça $Ker\phi = Hom_R(P,JP)$ dir. 1.İzomorfizma Teoreminden $End(_RP)/Ker\phi \cong End(P/JP)$ yani $End(_RP)/Hom(P,JP) \cong End(P,JP)$ dır. Buradan $End(_RP)/J(End(_RP)) \cong End(P/JP)$ olur. □

Tanım 4.2.8. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$, *sol R-modüllerin bir sınıfı olsun.* $Rej_M(\mathcal{U}) = Rej(M,\mathcal{U}) = \bigcap \{\ Kerh \mid h : M \to U,\ U \in \mathcal{U}\ \}$ ye $\mathcal{U}$ *nun M de rejecti* denir .

Ayrıca ε, M nin basit (simple) altmodüllerinin bir sınıfı olmak üzere $Rej(M,\varepsilon) = \bigcap \{\ Kerh \mid h : M \to U,\ U \in \varepsilon\ \}$ biçiminde tanımlanır. Bu durumda $RadM = Rej(M,\varepsilon)$ dır.

Önerme 4.2.9. [1] *Bir R- modül M için*

$$\begin{aligned} Rad(M) = Rej(M,\varepsilon) &= \bigcap \{\ K \leq M \mid K,M \ de \ maksimal\ \} \\ &= \sum \{\ L < M \mid L,M \ de \ small\ \} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $Rej(M,\varepsilon) = \bigcap \{\ Kerh \mid h : M \to U, U \in \varepsilon\ \}$ olsun. İlk eşitlik için $Kerh \leq M$ de maksimal olduğunu göstermeliyiz.

$M/Kerh \cong \mathcal{U}$ dur. $\mathcal{U}$ basit olduğu için $M/Kerh$ basit ve $Kerh$ maksimal olur.

Şimdi ikinci eşitlik için $L \ll M$ olsun. Eğer K, M de bir maksimal altmodül ve L, K da içerilmiyor ise o zaman $K + L = M$ dir, fakat $L \ll M$ olduğundan $K = M$ dir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda M nin her small altmodülü bir maksimal altmodülde kapsanır. Böylece her small altmodül $RadM$ de kapsanır. Yani

$\sum \{ L < M \mid L \ll M \} \leq RadM$ olur.

Diğer yandan $x \in M$ olsun. Eğer $Rx + N = M$ olacak şekilde $N \leq M$ ise ozaman $N = M$ ya da $N \leq K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde M nin bir maksimal K altmodülü vardır. $x \in RadM$ ise yukarıdaki özellik gereğince benzer şekilde $N = RadM$ ya da $N \leq K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde $RadM$ nin bir maksimal altmodülü vardır. O zaman $N = RadM$ den $Rx \ll RadM$ bulunur. O zaman

$RadM = \sum \{ Rx \mid Rx \ll M \} \leq \sum \{ L \leq M \mid L \ll M \}$ olur. Diğer durumda ilk eşitlik durumu elde edilir. □

Önerme 4.2.10. [8] *M bir sol R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:*

(1) Bir $f : M \to N$ *homomorfizması için*

(i) $f(RadM) \leq RadN$ *dır.*

(ii) $Rad(M/RadM) = 0$ *dır.*

(iii) Eğer $Kerf \leq RadM$ *ise* $f(RadM) = Rad(f(M))$ *dir.*

(2) RadM, M nin bir sağ-$End_R(M)$ *altmodülüdür.*

(3) M nin her altmodülü bir maksimal altmodülde içerilirse, o zaman $RadM \ll M$ *dir. (Yani M sonlu üretilmiş ise bu durum vardır.)*

(4) M nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul, $RadM \ll M$ *ve* $M/RadM$ *nin sonlu üretilmiş olmasıdır.*

(5) $M = \bigoplus_{\Lambda} M_i$ *olsun. O zaman* $RadM = \bigoplus_{\Lambda} RadM_i$ *ve* $M/RadM \cong \bigoplus_{\Lambda} M_i/RadM_i$.

(6) $\overline{M} = M/RadM$ *yarı basit ve* $RadM \ll M$ *ise ozaman M nin her öz altmodülü M nin bir maksimal altmodülü içinde kapsanır.*

İspat: (1). $f : M \to N$ homomorfizması için

(i). $RadM = \sum_{A \ll M} A$ için $f(RadM) = f\Big(\sum_{A \ll M} A\Big) = \sum_{f(A) \ll N} f(A) \leq RadN$

(ii). $Rad(M/RadM) = 0$ dır.

İddia (1). M/C nin bir maksimal Δ altmodülü ve $\varphi : M \to M/C$ ile tanımlı $C \leq B$ olacak şekilde M nin $B \leq M$ maksimal altmodüllerinin görüntüsü olarak elde edilir.

İspat $\varphi\varphi^{-1}(\Delta) = \Delta \cap Im\varphi$ $B := \varphi^{-1}(\Delta)$ olsun. O zaman $\varphi(B) = \Delta$ ve $C \leq B \leq M$ dir.

Δ , M/C nin maksimal altmodülü olduğundan $(M/C)/\Delta = (M/C)/(B/C) \cong M/B$ basittir. O halde B, M de maksimaldir.

iddia (2). $\{ B_i \mid i \in I \}$, M nin altmodüllerinin bir ailesi ve her $i \in I$ için $[C \leq B_i]$ ise, o zaman $\bigcap\limits_{i\in I}(B_i/C) = \left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right)\Big/ C$ dir.

İspat $\left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right)\Big/ C \leq \bigcap\limits_{i\in I}(B_i/C)$ olduğu açıktır. Tersine $v + C \in \bigcap(B_i/C)$ olsun. O zaman

$v + C = b_i + C$ olacak şekilde bir $b_i \in B_i$ vardır. Buradan her $i \in I$ için

$v = b_i + c_i \in B_i + C = B_i$ dir. Böylece $v + C \in (\bigcap B_i)/C$ olur. O halde $\bigcap\limits_{i\in I}(B_i/C) = \left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right)\Big/ C$ elde edilir.

Şimdi İddia(1). ve İddia(2). özellikleri uygulanarak

$$\begin{aligned} Rad(M/RadM) &= \bigcap_{\substack{\Delta,\\ M/RadM\\ de \quad maksimal}} \Delta = \bigcap_{\substack{B\leq M \quad de\\ maksimal\\ RadM\leq B}} (B/Rad(M)) \\ &= \left(\bigcap_{\substack{B\leq M \quad de\\ maksimal\\ RadM\leq B}} B\right)\Big/ Rad(M) = \left(\bigcap_{\substack{B\leq M \quad de\\ maksimal}} B\right)\Big/ Rad(M) \\ &= Rad(M)/Rad(M) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii). $Kerf \leq RadM$ ise $f(RadM) = Radf(M)$ dir.

(i) den $Rad(f(M)) \leq f(RadM)$ olduğu açıktır. Tersine $f(RadM) \leq Rad(f(M))$ olduğunu göstermeliyiz. $f : \xrightarrow{f} f(M) \xrightarrow{h} U$ olsun.

$Rad(f(M)) = \bigcap\{Kerh \mid h : f(M) \to U,\ U \in \varepsilon\ \}$ olur. $x \in Rad(f(M))$ alalım. $Rad(f(M))$ nin tanımından $x \in Kerh$ dir. Buradan $x = f(m)$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. O halde $h(x) = 0$ dır. Yani $0 = h(x) = h(f(m))$ den $m \in Kerhf$ olur.

$RadM = \bigcap\{Kerhf \mid hf : M \to U,\ U \in \varepsilon\ \}$ ve hipotezden $Kerhf \leq RadM$ olduğundan $m \in RadM$ olur. O halde $x = f(m) \in f(RadM)$ bulunur. Böylece $Rad(f(M)) \leq f(RadM)$ olur.

(2). $f \in End(M)$ olsun. $RadM = \bigcap\ \{\ Kerhk \mid hk : M \to S\ \}$ ve
$Radf(M) = \bigcap\ \{Kerh \mid h : f(M) \to S\ \}$ dir. Buradan k örten olduğundan her $b \in f(M)$ için $k(m) = b$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Böylece $f \in End(M)$ olduğundan $f(M) \leq M$ dir. O halde $b \in M$ olur .

$Kerhk \leq Kerh$ ise $Radf(M) \leq RadM$ olacağından ispat için $Kerhk \leq Kerh$ olduğunu göstermek yeterli olur. Bunun için $x \in Kerhk$ alalım. Buradan $hk(x) = 0$ yani $h(k(x)) = 0$ olur. O halde $k(x) \in Kerh$ bulunur. Şimdi

$$\begin{array}{ccc} RadM \times EndM & \to & RadM \\ (u, f) & \to & f(u) \end{array}$$

dönüşümü gereğince, $f(RadM) \leq Radf(M)$ olduğundan $f(u) \in Rad(f(M))$ olur. Ayrıca $Rad(f(M)) \leq RadM$ olduğundan $f(u) \in RadM$ olur. Böylece $u \in RadM$ için $f(u) \in RadM$ bulunur. Buradan $RadM$, M nin bir sağ -$End(M)$ altmodülü olur.

(3). $N \leq M$ için hipotezden $N \leq K \leq M$ olacak şekilde M nin bir K maksimal altmodülü vardır. Böylece $RadM \neq 0$ olur. Şimdi $RadM + L = M$ olacak şekilde $L \leq M$ olsun. Buradan $L \leq K$ veya $L \leq RadM$ dir. Eğer $L \leq K$ ise $RadM \leq L$ olur. Böylece $RadM + L = M$ den $L = M$ bulunur. Yani $RadM \ll M$ dir. Ya da $L \leq RadM$ ise, buradan $RadM = M$ olur. Bu durum maksimal altmodüllerin M den farklı olduğu gerçeğiyle çelişir. Öyle ise $RadM \neq M$ dır.

(4). M sonlu üretilmiş olsun. $M/RadM$ sonlu üretilmiş olur. $RadM + K = M$ olacak şekilde $K \leq M$ alalım. $K = M$ olduğunu gösterelim. $RadM$, M nin small altmodüllerinin toplamı olduğundan $RadM = \sum\ \{\ L \leq M \mid L \ll M\ \}$ dır. Böylece M sonlu üretilmiş olduğundan
$(L_1 + L_2 + ... + L_n) + K = M$ olacak şekilde M nin $L_1, L_2, ..., L_n$ small altmodülleri vardır. Fakat $L_1 + L_2 + ... + L_n$ toplamı M de small olduğundan (smalların toplamı small olduğundan) $K = M$ olur.

(5). $M = \bigoplus\limits_{\Lambda} M_\lambda$ ve $RadM = \bigoplus\limits_{\Lambda} RadM_\lambda$ için $RadM_\lambda \leq RadM$ olduğunu biliyoruz. $\iota : M_\lambda \to M$, $RadM_\lambda = \iota(RadM_\lambda) \leq RadM$ olduğundan

$\sum\limits_{\Lambda} RadM_\lambda = \bigoplus\limits_{\Lambda} RadM_\lambda \leq RadM$ olur.

Karşıtı olarak $m = \sum M_\lambda \in RadM$ olsun. $\pi_\lambda : M \to M_\lambda$ doğal projeksiyon olsun. O zaman $\pi_\lambda(m) = m_\lambda \in RadM_\lambda$ dir. Böylece $m \in RadM_\lambda$ olur. Buradan $RadM \leq \bigoplus RadM_\lambda$ dir. Yani eşitlik sağlanır.

Şimdi $M/RadM \cong \bigoplus M_\lambda/RadM_\lambda$ olduğunu gösterelim.

$\varphi : M/RadM \to \bigoplus M_i/RadM_i$ dönüşümünün bir izomorfizma olduğunu göstermeliyiz. $m_\lambda \in M_\lambda$ elemanı için $\sum m_\lambda \in M_\lambda = M$ nin bir elemanı olsun.

$\varphi((\sum m_\lambda) + RadM) := \sum(m_\lambda + RadM_\lambda) \in \bigoplus M_\lambda/RadM_\lambda$ ile tanımlansın. Burada, φ iyi tanımlıdır. Gerçekten,

$m_\lambda, m'_\lambda \in M_\lambda$ olmak üzere $(\sum m_\lambda) + RadM = (\sum m'_\lambda) + RadM$ olsun.

Buradan $(\sum m_\lambda - m'_\lambda) \in RadM$ olur. İspatın ilk kısmından $m_\lambda - m'_\lambda \in RadM_\lambda$ olur. Böylece $m_\lambda + RadM_\lambda = m'_\lambda + RadM_\lambda$ dır. O halde $(\sum(m_\lambda + RadM_\lambda) = \sum(m'_\lambda + RadM_\lambda)$ dir. Bu da φ nin iyi tanımlı olduğunu gösterir.

φ bir monomorfizmazdır. Gerçekten $\varphi((\sum m_\lambda) + RadM) = \sum(m_i + RadM) = 0$ olsun. Buradan her m_λ için $m_\lambda \in RadM$ dir. $Rad(M_\lambda) \leq RadM$ olduğundan $(\sum m_\lambda) \in RadM$ olur. Yani $(\sum m_\lambda) + RadM = RadM$ bulunur. O halde $Ker\varphi = 0$ dır. Böylece φ bir monomorfizma olur.

φ nin bir epimorfizma olduğu açıktır. O halde φ bir izomorfizmador.

(6). U, M nin bir öz altmodülü olsun. $\rho : M \to M/RadM$ doğal dönüşümünü gözönüne alalım. $\rho(U) \neq M$ dir. Buradan $\rho(U)$ öz altmodül olduğundan , $M/RadM$ nin bir X maksimal altmodülü içinde kalır. Buradan $U \leq \rho^{-1}(X) \leq M$ olacak şekilde $\rho^{-1}(X)$ maksimal altmodüldür. $\square$

5. SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER VE ZİNCİR ŞARTLARI

5.1. Sonlu Üreteçli Modüllerin Noether Modüller ile Karakterizasyonu

Tanım 5.1.1. [1] $\mathcal{L}$, M nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{L}$ deki altmodüllerin her $L_1 \leq L_2 \leq ...$ artan zinciri, $(i = 1, 2, ...)$ için $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$ ye *artan zincir şartını sağlar* denir.
M nin bütün altmodüllerinin $\mathcal{L}(M)$ kafesinde artan zincir şartı sağlanıyorsa M ye *Noether modül* denir.

Her altmodülü sonlu üretilmiş olan modüllerin karekterizasyonu için zincir şartları önemli rol oynar. Genel olarak sonluluk şartlarından hiçbiri diğerini gerektirmez ancak çok özel durumlarda denklik olabilir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$ nin altmodülleri sonlu üretilmiştir. $\mathbb{Z}$ artan zincir şartını sağlar. Yani $\mathbb{Z}$ Noether modüldür.

Önerme 5.1.2. [1] *Bir sol R-modül M için aşağıdakiler denktir:*

(1) M Noether modüldür.

(2) M nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

(3) M nin altmodüllerinin boş olmayan her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$. $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun ve $\mathcal{A}$ nın maksimal elemanı olmasın. O zaman her $L \in \mathcal{A}$ için $\{ L' \in \mathcal{A} \mid L' > L \} \neq \varnothing$ dır.
$L' \in \mathcal{A}$ için durum devam ettirilirse
$L' < L'' < ... < ...$ M nin altmodüllerinin bir artan zinciri elde edilir. Ancak bu durum M nin Noether olmasıyla çelişir. O halde M nin altmodüllerinin boş olmayan her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
$(3) \Rightarrow (2)$. $K \leq M$ olsun. $K = \sum \mathcal{A}$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin $\mathcal{A}$ ailesini

göz önüne alalım.

$\mathcal{P} = \sum \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \leq \mathcal{A}\ sonlu \}$ olsun. $\mathcal{P} \neq \varnothing$ ve böylece hipotezden bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman $\sum \mathcal{F}$ dir. Buradan açıkça K=$\sum \mathcal{F}$ bulunur.

$(2) \Rightarrow (1)$. M nin her altmodülü sonlu üretilmiş olsun.

$L_1 \leq L_2 ... \leq L_n ...$ M nin altmodüllerinin artan bir zinciri olsun.

$M = \sum_{n \in \mathbb{N}} L_n$ olsun. Hipotezden $L_{n+i} = L_n$ olmak üzere $\sum_{sonlu} L_n = M$ olacak şekilde bir n vardır. O halde dizi sonlu adımda durur. Yani M Noether modül olur. □

Örnek 5.1.3. [1] ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ Noether olduğundan sonlu üreteçlidir. Ayrıca ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ her altmodülü sonlu üreteçli olduğundan Noether modüldür de deriz.

Örnek 5.1.4. [7] ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ da maksimal altmodül olmadığından Noether değildir. Ancak ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ basit olduğundan Noether modül olur.

Örnek 5.1.5. [3] $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_m$ sonlu olduğu için Noether olur. Böylece $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_m$ sonlu üreteçlidir. Ayrıca $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_m$ nin sonlu üreteçli olduğunu bildiğimizden de Noether modüldür denebilir.

Sonuç 5.1.6. [1] *M Noether ise M nin bir maksimal altmodülü vardır. RadM small altmodüldür.*

İspat: M Noether ise Önerme 5.1.2 $(1) \Rightarrow (3)$ gereğince M nin altmodüllerinin boş olmayan her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu M nin bir maksimal altmodülüdür. M Noether olduğundan Önerme 5.1.2 $(a) \Rightarrow (b)$ gereğince M sonlu üretilmiş olur. Böylece Teorem 4.1.3 gereğince

$RadM$, M de small olduğu elde edilir. □

Önerme 5.1.7. [1] $0 \to K \to M \to N \to 0$ *sol R-modüllerinin bir kısa tam dizisi olsun. M nin Noether olması için gerek ve yeter koşul K ve N nin Noether olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M Noether olsun. M nin altmodülü ve bölüm modülü Noether olduğundan, K, M nin bir altmodülüne izomorf ve $M/K \cong N$ olduğundan

K ve M/K Noether olur.

$(\Leftarrow)$. K ve N, Noether modüller olsun. M nin Noether olduğunu gösterelim. $K \leq M$ ve $M/K = N$ olsun. M nin alt modüllerinin $L_1 \leq L_2 \leq ... \leq L_n...$ artan dizisini göz önüne alalım.

$L_1 + K \leq L_2 + K \leq ... \leq L_n + K = L_{n+i} + K$ dizisi için M/K Noether olduğundan $(i = 1, ..., n)$ olacak şekilde bir n tam sayısı vardır.

$L_1 \cap K \leq L_2 \cap K \leq ... \leq L_n \cap K = L_n \cap K = L_{n+i} \cap K \quad (i = 1, ..., n)$ olacak şekilde bir n tam sayısı vardır. Böylece,

$L_n \leq L_{n+i}$ olduğundan modülarite kuralı gereğince

$L_{n+i} = L_{n+i} \cap (L_{n+i} + K) = L_{n+i} \cap (L_n + K) = L_n + (L_{n+i} \cap K) = L_n$ olur.

Böylece M, Noether olur. $\square$

Sonuç 5.1.8. [1] *$M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. O zaman M nin Noether olması için gerek ve yeter koşul $i = 1, ..., n$ için her bir M_i nin Noether olmasıdır.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M Noether olsun.

$0 \to M_1 \to M_1 \oplus ... \oplus M_n \to M_2 \oplus ... \oplus M_n \to 0$ kısa tam dizisini gözönüne alalım.

Önerme 5.1.7 den M_1 ve $M_2 \oplus M_3 ... \oplus M_n$ Noether olur, benzer şekilde devam edilirse M_2 ve $M_1 \oplus M_3 ... \oplus M_n$ toplamı Noether olur.

Böylece $i = 1, ..., n$ için M_i altmodülleri Noether olur.

$(\Leftarrow)$. Şimdi M_i ler Noether olsun.

$M_1 \leq M_1 \oplus M_2$ için

$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$ kısa tam dizisini göz önüne alalım.

Burada M_1 ve M_2 Noether olduğundan $M_1 \oplus M_2$ Noether olur. Benzer şekilde $0 \to M_1 \oplus M_2 \to M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \to M_3 \to 0$ kısa tam dizisi için $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ Noether olur.

Bu şekilde n üzerinden tümevarımla devam edilirse $M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ direk toplamı Noether bulunur. $\square$

Önerme 5.1.9. [1] *M sıfırdan farklı bir modül olsun. M, direk toplananları üzerinde artan zincir şartını sağlasın. Yani M Noether olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2 ... \oplus M_n$ direk toplamı parçalanamaz (indecomposable) altmodüllerinin bir sonlu direk toplamıdır.*

İspat: M sıfırdan farklı bir modül ve (M') de sonlu indecomposable ayrışıma sahip olmayacak şekilde $M = N' \oplus M'$ öz (proper) ayrışımı sonlu
indecomposable ayrışıma sahip olmasın.
Sıfırdan farklı M nin indecomposable modüllerin bir sonlu direk toplama eşit olmadığını kabul edelim. O zaman $M = N' \oplus M'$, $M' = N'' \oplus M''$... öz ayrışımlarının bir dizisi olsun.
$N_1 < N' \oplus N'' < ...$ ve $M > M' > M''$... zincirleri M nin direk toplananlarının sonsuz zincirleridir. Bu durum hipotez ile çelişir. O halde M nin indecomposable bir ayrışımı vardır. □

5.2. Sonlu Üreteçli Modüllerin Noether Halka ile Karakterizasyonu

Önerme 5.2.1. [1] *Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:*

(1) R sol Noetherdir.

(2) R nin Noether olan bir ${}_RG$ üreteci vardır.

(3) Her sonlu üretilmiş sol R-modül Noetherdir.

(4) Her sonlu üretilmiş sol R-modülün her altmodülü de sonlu üretilmiştir.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. R birimli bir halka olduğu için ${}_RR$ bir üreteçtir. Böylece R nin sol Noether olan bir ${}_RR$ üreteci vardır. Buradan (2) koşulu elde edilmiş olur.
$(2) \Rightarrow (3)$. Şimdi (2) koşulunu kabul edelim. Buradan Sonuç 5.1.8 gereğince her sonlu F kümesi için G^F noether olur. Böylece sonlu üretilmiş M modülü noether olur.
$(3) \Rightarrow (4)$. Önerme 5.1.2 $(1) \Rightarrow (2)$ gereğince açıktır.

$(4) \Rightarrow (1)$. Önerme 5.1.2 $(5) \Rightarrow (1)$ da olduğu gibi açıktır. $\square$

Örnek 5.2.2. [11] $\mathbb{C}[x]$ polinom halkası temel ideal bölgesi olduğu için Noetherdir.

Örnek 5.2.3. [4] Bölümlü bir D halkası Noetherdir.

6. SONLU ÜRETEÇLİ MODÜLLER İÇİN İLERİ KARAKTERİZASYON VE UYGULAMALARI

6.1. Sonlu Üreteçli Modüllerin Halka ile Bir Karakterizasyonu

Önerme 6.1.1. [10] *R bir halka M bir R-modül olsun. M nin bir R-modül olarak sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul bir* $n > 0$ *tam sayısı için M nin* $\bigoplus_n R$ *nın bir bölüm modülüne izomorf olmasıdır.*

İspat: M sonlu üretilmiş olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in M$ elemanları M yi üretsin.
$f : \bigoplus_n R \to M$, $(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ dönüşümünü tanımlayalım. Burada f bir R-modül homomorfizmasıdır ve $Imf = M$ dir. Buradan 1.izomorfizma teoreminden $\bigoplus_n R/Kerf \cong M$ elde edilir.
Karşıt olarak bir $K \leq \bigoplus_n R$ için $M \cong \bigoplus_n R/Kerf$ olsun. O zaman M de, $\bigoplus_n R$ nin üreteçlerinin kümesinin görüntüsü M yi üretir. □

Sonlu üretilmiş modüller için aşağıdaki bazı uygulamarı verilebilir.

Lemma 6.1.2. [10] ***(Nakaynama Lemma)*** *R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve I,* $IM = M$ *olacak şekilde R nin bir ideali olsun. O zaman* $(1-a)M = 0$ *olacak şekilde bir* $a \in I$ *vardır.*

Önerme 6.1.3. [10] *R bir halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve* $f : M \to M$ *bir homomorfizma olsun. Bu durumda, f örten ise f izomorfizmadır.*

İspat: M bir R-modül olduğundan,

$$\begin{array}{rll} f: & M \to & M \\ & x \mapsto & tx \end{array}$$

tanımı ile M bir $R[t]$-modül olur. Yani

$$\begin{array}{rl} R[t] \times M \to & M \\ (t,x) \mapsto & tx \end{array}$$

dönüşümü vardır. M, R-modül olarak sonlu üretilmiş olduğundan $M = \sum tx$ yazılır. Buradan M, $R[t]$-modül olarak da sonlu üretilmiş olur. Buradan f örten ise

$f(M) = M$, yani $tM = M$ olur. Nakaynama Lemma gereğince $(1 - tp(t))M = 0$ olacak şekilde $p(t) \in R[t]$ vardır. Buradan $x \in Kerf$ ise $0 = (1 - tp(t))(x) = x$ bulunur. O halde f bire-bir olur. Yani f bir izomorfizmadır. $\square$

6.2. Sonlu Üreteçli Modüllerin ACC (DCC) Uygulaması

Tanım 6.2.1. [6] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. I, R nin bir ideali olmak üzere IM altmodüllerine M nin *extended altmodülleri* adı verilir. Her i indisi için $m_i \in M$ olmak üzere Rm_i altmodüllerinin extended altmodülü Im_i biçimindedir.

Lemma 6.2.2. [6] *Bir değişmeli R halkası üzerinde $M = Rm_1 + Rm_2 + ... + Rm_k$ bir sonlu üretilmiş modül olsun. R deki her I ideali ve her i indisi için $Im_i = Rm_i \cap IM$ olsun. O zaman M extended altmodüller üzerinde artan zincir (ACC), [azalan zincir (DCC)] şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul her Rm_i extended altmodüller üzerinde sırasıyla ACC, DCC şartlarının sağlanmasıdır.*

İspat: M, extended altmodüller üzerinde ACC şartını sağlasın.
$i = 1$ için ispat yapılırsa, diğerleri benzer şekilde ispatlanır. Şimdi Rm_1 nin extended alt modüllerinin

$$I_1m_1 \leq I_2m_1 \leq ... \leq ...$$

artan zincirini göz öününe alalım.
Buradan $Ann_R(Rm_1/I_1m_1) \leq Ann_R(Rm_1/I_2m_1) \leq Ann_R(Rm_1/I_3m_1)...$ R nin ideallerinin artan zincirini elde ederiz.
Fakat her $Ann_R(Rm_1/I_im_1) = I_i + Ann_R(m_1)$ bulunur. Buradan
$(I_1 + Ann_R(m_1))M \leq (I_2 + Ann_R(m_1))M \leq ...$, M nin extended altmodüllerinin artan zincirini elde ederiz. Kabulden her $n \geq s$ için $(I_n + Ann_R(m_1))M = (I_s + Ann_R(m_1))$

olacak şekilde bir s pozitif tamsayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} I_n m_1 &= Rm_1 \cap I_n M \\ &\leq Rm_1 \cap (I_n + Ann_R(m_1))M \\ &= Rm_1 \cap (I_s + Ann_R(m_1))M \\ &= (I_s + Ann_R(m_1))m_1 \\ &= I_s m_1 \end{aligned}$$

Şimdi tersine her Rm_i extended altmodülleri üzerinde ACC şartı sağlansın. M nin extended altmodüllerinin

$$I_1 M \leq I_2 M \leq ... \leq ...$$

artan zincirini düşünelim. Bu $i = 1, 2, ..., k$ için

$$Rm_i \cap I_1 M \leq Rm_i \cap I_2 M \leq ...$$

artan zinicirini verir.

Fakat her $1 \leq i \leq k$ ve her $n \geq 1$ için $Rm_i \cap I_n M = I_n m_i$ dir. Kabulden her $1 \leq i \leq k$ ve her $n \geq s$ için $I_n m_i = I_s m_i$ olacak şekilde bir s tam sayısı vardır. Buradan s=max $\{ s_1, s_2, ..., s_k \}$ alalım. O zaman her $n \geq s$ için $I_n m_i = I_s m_i$ bulunur. Buradan her $n \geq s$ için

$$\begin{aligned} I_n M &= I_n m_1 + I_n m_2 + ... + I_n m_k \\ &= I_s m_1 + I_s m_2 + ... + I_s m_k \\ &= I_s M \end{aligned}$$

Böylece M, ACC koşulunu sağlar. □

Teorem 6.2.3. [6] *R bir değişmeli halka olmak üzere $M = Rm_1 + Rm_2 + ... + Rm_k$ bir sonlu üretilmiş modül olsun. Eğer R nin her I ideali ve her i için $Im_i = Rm_i \cap I_m$ ve M, extended altmodülleri üzerinde ACC (DCC) şartını sağlıyor ise o zaman M bir Noether (Artin) modüldür ve böylece $R/Ann_R M$ Noether (Artin) halkadır.*

İspat: Noether durumunu ispat edersek, benzer şekilde Artin durumu içinde de ispat yapılır. Hipotezden ve Lemma 6.2.2 ile M deki her Rm_i extended altmodüller ACC şartını sağlar.

$$Rm_i \cong R/Ann_R m_i$$

R-modül olarak izomorf olduğu için Rm_i Noetherdir. Buradan $Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k$ Noetherdir.

$$\begin{array}{rll} f: & Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k \to & Rm_1 + ... + Rm_k \\ & f(rm_1, ..., rm_k) \mapsto & (rm_1 + ... + rm_k) \end{array}$$

$r_i \in R$ olmak üzere fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f bir epimorfizmadır. Böylece $0 \to Kerf \to Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k \to M \to 0$ kısa tam dizisini elde ederiz. Buradan M, Noether olur. Şimdi $r \in R$ olmak üzere

$$\begin{array}{rll} g: & R \to & Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k \\ & g(r) = & (rm_1, ..., rm_k) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buradan g bir R-homomorfizmadır. $Kerg = Ann_R M$ dir. Böylece $R/Ann_R M$, $Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k$ nın bir altmodülü olarak görülebilir. Buradan $Rm_1 \oplus ... \oplus Rm_k$ Noether olduğundan $R/Ann_R M$ Noetherdir. □

6.3. Sonlu Üreteçli Modüller için Torsion (Torsion Free) Modül Uygulamaları

Tanım 6.3.1. [2] R birimli, değişmeli bir halka ve S bir küme olmak üzere M bir R-modül ve $\iota : S \to M$ küme dönüşümü olsun. Herhangi bir R-modül N ve $f : S \to N$ küme dönüşümü için $\bar{f} \circ \iota = f$ olacak şekilde bir tek $\bar{f} : M \to N$, R-modül homomorfizması varsa, M ye S üreteçleri üzerinde *free R-modül* adı verilir. M de $\iota(S)$ nin elemanları, M için bir R-bazdır.

Önerme 6.3.2. [2, Proposition 1.0.1] *S üreteçleri üzerinde eğer bir free R-modül varsa bu izomorfizma farkıyla tek türlüdür.*

Önerme 6.3.3. [2, Proposition 1.0.2] *$\iota : S \to M$ üreteçler üzerinde bir free R-modül M, $\iota(S)$ ile üretilir. Bunun anlamı $\iota(S)$ yi içeren M nin R-altmodülü sadece M nin kendisidir.*

Önerme 6.3.4. [2, Proposition 1.0.3] *M, $\iota : S \to M$ üreteçler üzerinde bir free R-modül olsun. O zaman bütün r_s katsayıları 0 olan $\sum_{s\in S} r_s \iota(s) = 0$ eşitliği vardır. Burada $r_s \in R$ sonlu çoklukta sıfırdan farklı katsayılardır. Yani $\iota(S)$ nin elemanları lineer bağımsızdır.*

Önerme 6.3.5. [2, Proposition 1.0.4] *$\iota : S \to M$ için C, S üreteçleri üzerinde serbest (free) modül olmak üzere $f : B \to C$ R-modül homomorfizması olsun. O zaman $fo\iota = 1_C$ ve $B = Kerf \oplus J(C)$ olacak şekilde $J(C)$ bir $J : C \to B$ modül homomorfizması vardır.*

Önerme 6.3.6. [2, Proposition 2.0.3] *R bir tamlık bölgesi ve $T(M)$, R-modül M nin torsion altmodülü olsun. O zaman $M/T(M)$ torsion freedir.*

Tanım 6.3.7. [2] Bir R-modül M için $\sum_i Rm_i = M$ olacak şekilde M nin sonlu çoklukta $m_1, ..., m_n$ elemanları varsa M ye *sonlu üreteçlidir* denir.

Önerme 6.3.8. [2, Proposition 2.0.4] *R bir tamlık bölgesi olsun. Sonlu üreteçli R-modül M verilsin. O zaman M nin bir F maksimal free altmodülü vardır (Tek türlü olmak zorunda değildir.) ve M/F torsion modüldür.*

Teorem 6.3.9. [2] *R bir esas ideal bölgesi olsun. Bir R esas ideal bölgesi üzerinde sonlu üreteçli torsion free M modülü freedir.*

İspat: X, M nin bir üreteç kümesi olsun. Bir önceki önermeden F, $\iota : S \to M$ free içerim dönüşümü ile üretilen bir altmodül olmak üzere S, X in bir maksimal alt kümesi olsun. X in $x_1, ..., x_n$ elemanları S de olmasın ve M/F torsion olduğundan her x_i için $r_i x_i \in F$ olacak şekilde $0 \neq r_i \in R$ dır.

Şimdi $r = \prod_i r_i$ olsun. Bu çarpım sonludur ve R esas ideal bölgesi olduğundan sıfırdan farklıdır. Böylece $rM \leq F$ dir. F, free olduğundan rM en fazla $|S|$

üreteçleri üzerinde freedir. M torsion free olduğundan $m \mapsto r.m$ dönüşümünün M deki çekirdeği sıfırdır ve böylece $M \cong rM$ dır. Yani M freedir. $\square$

Sonuç 6.3.10. [2] *R bir esas ideal bölgesi ve M, R üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. F bir free modül ve* $T(M)$*, M nin torsion altmodülü ise ozaman* $M \cong T(M) \oplus F$ *dir.*

İspat: Önceki önermeden $M/T(M)$ torsion free modülün, free modül olduğunu gördük. $M/T(M)$ sonlu üretilmiş olur. $\sigma : M/T(M) \to M$ dönüşümünü verir ve böylece $M = T(M) \oplus \sigma(M/T(M))$ olur. $\square$

Sonuç 6.3.11. [2] *Bir R esas ideal bölgesi üzerinde sonlu üretilmiş bir M modülünün bir N altmodülü sonlu üretilmiştir.*

İspat: Hipotezden F, $F \to M$ örten dönüşümü ile sonlu üretilmiş bir free modül olsun. Buradan N nin ters görüntüsü, F de sonlu çokluktaki üreteçleri üzerinde bir free modülün altmodülüdür. Böylece N nin sonlu üreteci vardır. Buradan dönüşümün sonlu üreteçliği korumasıyla N sonlu üreteçli olmuş olur. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., and Fuller, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer Verlag,New York.

[2] Garrett, B. Paul. 2008. Abstract Algebra. Taylor Francis Group. Chapman & Hall/CRC.

[3] Huang, H. 2014. Lecture Notes: Commutative Rings and Modules. Department of Mathematics and Statistics, Auburn University.

[4] Hungerford, T. W. 1974. Algebra, Holf, Rinehart and Wiston, Inc., New York, Chicago.

[5] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no.17.

[6] Lee, S. C. 1991. Finitely Generated Modules. **Journal of Korean Math. Soc.** no.1.,28: 1-11.

[7] Nielsen, H.A, Elementary Commutative Algebra, Lecture Notes. Department of Mathematical Sciences. University Aarhus.

[8] Robert, W. 1991. Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research. Gordon and Breach Science Publishers, Phildelphie.

[9] Tung, N. S. 1994. A Charactarization of Artinian Modules. **Journal of Mathematics** , 22 (3& 4): 110-113.

[10] Virk, R. 2011. Modules: Finitely Generated Modules. Department of Mathematics, University of California, Davis, CA.

[11] Virk, R. 2011. Problem sets: Problem set 2. Department of Mathematics, University of California, Davis, CA.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Mine UYSAL
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Denizli, 15.04.1992

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi : mineuysal.92@hotmail.com

Tarih : 19.01.2018