T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2017-YL-022

ANİZOTROP ELEKTRODİNAMİK SİSTEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMÜ

Merve ÖZTÜRK

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Merve ÖZTÜRK tarafından hazırlanan Anizotrop Elektrodinamik Sistem İçin Cauchy Probleminin Temel Çözümü başlıklı tez, 13.07.2017 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Prof. Dr. Mehmet SEZER	Celal Bayar Ü.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Korhan GÜNEL	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun . . . . sayılı kararıyla . . . / . . . /2017 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

13.07.2017

Merve ÖZTÜRK

ÖZET

ANİZOTROP ELEKTRODİNAMİK SİSTEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMÜ

Merve ÖZTÜRK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2017, 51 sayfa

Bu çalışmada bazı hiperbolik denklemler ve Maxwell sistemi için operatör çekirdekli Volterra tipi integral denklemine indirgenerek başlangıç değer problemi çalışılmıştır. Bu integral denklemini indirgenmede ardışık yaklaşımlar yöntemi başarıyla uygulanmıştır.

Başlangıç değer problemi çalışmasında varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Keyfi homojen olmayan terimli ve başlangıç koşullu denklem ve sistemlerde Cauchy probleminin çözümü esas çözüm olduğundan hiperbolik denklemlerin ve sistemlerin çözümünde önem teşkil etmektedir.

Hiperbolik denklemlerin esas çözümündeki temel özellikler iyi bilinen yapısal özelliklerdir.

Anahtar Sözcükler: Hiperbolik Denklem, Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi, Maxwell Denklemleri, Telegraf Vektör Operatörü

ABSTRACT

A GENERALIZED SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ANISOTROPIC ELECTRODYNAMIC SYSTEM

Merve ÖZTÜRK

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK
2017, 51 pages

Initial valve problems for some hiperbolic equations and Maxwell's system were reduced to the integral equations of Volterra type with the operator kernels in this thesis. The method of the successive approximations for finding solutions of these integral equations was successfuly applied.

As result the existence and uniqueness theorems were proved for the considered initial valve problems. Constructing fundamental solutions of the Cauchy problem for hyperbolic equations and system is a very important problem because by means of these fundamental solutions we find solutions of the Cauchy problems for equations and systems with arbitrary nonhomogeneous terms and initial data.

Basic features of the structure of the fundamental solutions for hyperbolic equations are well known.

Key Words: Hyperbolic Equation, Method of Successive Approximations, Maxwell's Equations, Telegraph's Vector Operator

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince çalışmamın her aşamasında yardım, destek ve anlayışı için, değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Destek ve sevgileri ile hep benimle olan anneme, babama, kardeşlerime ve arkadaşlarıma teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Merve ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Temel bilimlerde ve mühendisliğin çeşitli dallarında kısmi türevli diferansiyel denklemlerin konularına gereksinim duyulmaktadır. Fiziksel uygulamaların çokluğu nedeniyle kısmi denklemler uygulamalı matematiğin önemli inceleme alanlarında biri olarak görülmektedir. Örneğin bir ortamdaki dalga yayılımında ısı transferinde elektrodinamikte kısmi diferansiyel denklemler yoğun olarak kullanılmaktadır. 1823 yılında ilk defa integral denklemlerle karşılaşan Abel fiziksel problemin çözümünü

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}} dy$$

integral denklemine indirger. İndirgenen bu denkleme 1826 yılında Abel kendi adını vermiştir.

Ardışık yaklaşımlar yöntemi Volterra integral denkleminin çözümünde önemli bir yöntemdir. Varlık ve teklik teoremlerinin ispatlandığı bu yöntemde homojen olmayan dalga denklemler Poisson ve Kirchoff integral denklemlerine indirgenmiştir. Bu denklemler ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözülebileceği değişik zamanlarda matematikçiler tarafından gösterilmiştir [2], [8], [9], [10].

İkinci bölümde sabit katsayılı homojen ve homojen olmayan dalga denklemlerinin Volterra tipi integral denklemine indirgenmiş, varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Yakınsak ve süreklilik durumları incelenmiştir. Üçüncü bölümde birinci mertebeden kısmi diferensiyel konularından eikonal denklem, ray front, Riemann konuları hakkında bilgi veilmiştir. Taşıyıcı denklemin çözümü, özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde fonksiyon katsayılı Cauchy probleminin Volterra denklemine indirgenmesinde Sobolev uzaylarından yararlanılmıştır. Telegraf denklemi $[u(x,t)] = u(x, t-\tau)$ dönüşümüyle taşıyıcı denkleme indirgenmiş, bu indirgemede Sobolev fonksiyonu önemli rol oynamıştır. Green formülü yardımıyla Volterra integral denklem elde edilmiştir. Beşinci bölümde Maxwell sistemi vektör denklemi ile skaler elektrodinamik potansiyelli telegraf vektör denklemine indirgenmesi çalışılmıştır.

2. DALGA DENKLEMLERİ

1 boyutlu, 2 boyutlu, 3 boyutlu Δ Laplace operatörü sırasıyla

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

şeklindedir. Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

denkleminde duruma göre 1,2,3 boyutlu dalga denklemi denir. c pozitif bir reel sabit, t zaman değişkeni olmak üzere

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{2.1}$$

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$$

denklemleri $1, 2, 3$ boyutlu dalga denklemleridir. Bu tarz denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve kuantum teorisi gibi alanlarda kullanımı yaygındır. Dalga denklemlerinin çözümleri fiziksel anlamda elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yerdeğiştirme dalgalarını v.b. ifade eder.

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = F$$

şeklindeki denkleme homojen olmayan dalga denklemi denir ki F fonksiyonu sadece bağımsız değişkenli bir fonksiyon olup dış kuvveti ya da dalga kaynağını ifade eder.

$$u_{tt} - \lambda u_t - c^2 \Delta u = F, \quad (\lambda \quad sabit)$$

sönümlü dalga denklemini,

$$u_{tt} - \lambda u_t + \beta u - c^2 \Delta u = F, \quad (\lambda \quad sabit)$$

denklemi de telegraf denklemini ifade eder.

2.1. Homojen Dalga Denkleminin Genel Çözümü

Homojen dalga denkleminin karakteristikleri

$$x \mp ct = sabit$$

doğrularıdır. Eğer

$$\xi = x + ct, \qquad\qquad \eta = x - ct \tag{2.2}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$u_{\xi\eta} = 0$$

denklemine dönüşür. Buradan, C^2 sınıfından f ve g fonksiyonları için

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

veya

$$u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct) \tag{2.3}$$

elde edilir. Demek ki, eğer (2.1) in çözümü mevcutsa bu çözüm (2.3) şeklindedir. Tersine, keyfi f ve g fonksiyonları C^2 sınıfına aitse, $u \in C^2$ dır ve (2.3) ün homojen dalga denkleminin kılasik çözümü olduğu kolayca görülebilir. (2.1) denkleminin

$$(D_t + cD_x)(D_t - cD_x)u = 0 \tag{2.4}$$

şeklinde lineer çarpanlara ayrılabildiği dikkate alınırsa, genel çözümdeki $f(x+ct)$ fonksiyonunun birinci mertebeden $(D_t - cD_x)u_1 = 0$ lineer denkleminin ve $g(x - ct)$ fonksiyon ise birinci mertebeden $(D_t - cD_x)u_2 = 0$ lineer denkleminin çözümü olduğu açıktır. Bu birinci mertebeden lineer denklemlerin karakteristik eğrileri, dalga denkleminin de karakteristik eğrileridir. $x - ct = sabit$ karakteristikleri boyunca $g(x - ct)$ fonksiyonu ve $x + ct = sabit$ karakteristikleri boyunca $f(x + ct)$ fonksiyonu sabittir [1], [16].

2.2. Sabit Katsayılı Homojen Dalga Denklemi İçin Başlangıç Değer Problemi

Homojen dalga denklemi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in R, \quad t \in R \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in R \tag{2.6}$$

problemine, homojen dalga denklemi için *başlangıç değer problemi* denir. (2.5) problemin bir çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Bu çözüm, f ve g, C^2 sınıfından fonksiyonlar olmak üzere, (2.2) şeklindedir. Buradan, (2.6) başlangıç koşullarından

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x), \tag{2.7}$$

$$u_t(x,0) = c[f^{'}(x) - g^{'}(x)] = \psi(x) \tag{2.8}$$

olmalıdır. (2.8) den

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + K \tag{2.9}$$

olur. Burada x_0 ve K keyfi sabitlerdir. (2.7) ve (2.9) denklemlerinden f ve g

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + \frac{K}{2}, \tag{2.10}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi - \frac{K}{2} \tag{2.11}$$

ve (2.3) dan

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

$= \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}[\int_{x_0}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi - \int_{x_0}^{x-ct} \psi(\xi)d\xi]$

$$= \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi \tag{2.12}$$

elde edilir.Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz [10], [12].

Teorem 2.1: Eğer $\phi(x) \in C^2(R^3)$ ve $\psi(x) \in C^1(R^3)$ ise (2.12) fonksiyonu (2.5) başlangıç değer probleminin tek çözümüdür [1].

İspat: Teoremin ispatı doğrudan doğruya yukarıdaki incelemelerden ve (2.12) nun istenen özelliklere sahip bir çözüm olduğunun gerçeklenmesinden çıkar. (2.12) nun çözümüne *d'Alembert formülü* adı verilir.

d'Alembert formülü, çözümlerle ilgili önemli sonuçlara sahiptir. Bu sonuçları ifade etmek için, xt-düzleminde bir (x_0, t_0) noktası alalım ve bu noktadan geçen iki karakteristiği çizelim. Bu karakteristiklerin denklemi $x \mp ct = x_0 \mp ct_0$ dır. Bu karakteristikler x eksenini(yani başlangıç doğrusunu) $(x_0 - ct_0, 0)$ ve $(x_0 + ct_0, 0)$ noktalarından keser. d'Alembert formülü

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}[\phi(x_0+ct_0)+\phi(x_0-ct_0)]+\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\psi(\xi)d\xi$$

verir. Aşikar olarak $u(x_0,t_0)$, f ve g başlangıç değerinin total davranışına değil sadece $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$ aralığındaki x lere karşılık gelen değerlerine bağımlıdır. Bu nokta cümlesine, (x_0,t_0) noktasına göre *bağımlılık bölgesi* denir [1].

2.3. Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Dalga Denklemi İçin Başlangıç Değer Problemi

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t), \quad x\in R, \quad t\in R \tag{2.13}$$

$$u(x,0)=\phi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x), \qquad x\in R \tag{2.14}$$

problemine, homojen olmayan dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Burada $F(x,t)$, sonsuz uzunluktaki bir sicime etki eden dış kuvveti, örneğin yerçekimi kuvvetini temsil eden verilmiş bir fonksiyondur.

Kolayca görülür ki, eğer $v(x,t)$ homojen olmayan dalga denkleminin $v(x,0)=0,\ v_t(x,0)=0$ homojen başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü ve $w(x,t)$ da homojen dalga denkleminin $v(x,0)=\phi(x),\ w(x,0)=\psi(x)$ homojen olmayan başlangıç koşullarını sağlayan bir çözüm ise, $u=v+w$ (2.13) homojen olmayan denkleminin (2.14) homojen olmayan başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür. (2.13)-(2.14) probleminin çözümünün elde edilmesi için v nin, yani $v_{tt}-c^2v_{xx}=F(x,t)$ denkleminin

$$v(x,0)=v_t(x,0), \quad x\in R \tag{2.15}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması yeterlidir.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$ denkleminin (2.15) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulmak için, önce

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct \tag{2.16}$$

değişken değişimi ile denklemi ξ, η karakteristik koordinatlara dönüştürelim. Böylece

$$v_{\xi\eta} = -\frac{1}{4c^2} F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}) \tag{2.17}$$

denklemi elde edilir.

(2.17) nın önce ξ ye sonra η ya göre integrali alınır. Bu integraller çözüme, ξ ve η nın keyfi fonksiyonlarını dahil edecektir. Fakat (2.13) in (2.14) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü tek olduğundan, bu keyfi fonksiyonları başlangıç koşulları ile tayin etmek mümkündür.

(2.15) başlangıç koşullarını da ξ , η değişkenleri cinsinden ifade edilsin. (2.16) dönüşümü altında $x = 0$ doğrusu $\xi + \eta = 0$ doğrusuna ve $t = 0$ doğrusu da $\xi = \eta$ doğrusuna dönüşür. $\xi - \eta = 2ct$ olduğundan $t > 0$, $\xi > \eta$ olmasını gerektirir. Böylece xt düzleminin üst yarısı, $\xi\eta$ düzleminde $\xi = \eta$ doğrusunun üst yarısına dönüşür. $t = 0$ başlangıç doğrusu $\xi = \eta$ doğrusuna dönüştüğünden $\xi\eta$ düzlemindeki başlangıç koşulları bu doğru boyunca verilmelidir. Başlangıç koşullarından ilki $t = 0$ üzerinde $v = 0$ idi. Bu koşul,

$$\xi = \eta \quad ise \quad v = 0 \tag{2.18}$$

koşuluna dönüşür. $t = 0$ için $v_x = v_t = 0$ olduğunu bilindiğinden,

$$v_x = v_\xi + v_\eta$$

$$v_x = cv_\xi - cv_\eta$$

bağıntılarından

$$\xi = \eta \quad ise \quad v_\xi = v_\eta = 0 \tag{2.19}$$

sonucunu çıkar. Dikkat edilmelidir ki, (2.18) ve (2.19) deki üç koşul bağımsız değildir. (2.19) deki iki koşuldan biri, (2.18) gereğince diğerinin bir sonucudur.

Şimdi, $\xi = \eta$ doğrusunu üst yarı düzleminde bir $P(\xi_0, \eta_0)$ noktası seçelim ve denklemin çözümünün belirlilik bölgesinin grafiğini çizelim. Böylece, köşeleri $P(\xi_0, \eta_0)$, $P_1(\xi_0, \xi_0)$, $P_2(\eta_0, \eta_0)$ olan bir üçgen bulunur. Bu üçgen tarafından sınırlanan bölge D olsun. D üçgensel bölgesi üzerinden (2.17) nın iki tarafının integralini alınsın. Böylece

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} v_{\xi\eta} d\eta d\xi = -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}) d\eta d\xi,$$

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0} [v_\xi(\xi, \eta_0) - v_\xi(\xi, \xi)] d\xi = -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}) d\eta d\xi$$

ve buradan (2.18) ve (2.19) başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak

$$v(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}) d\eta d\xi,$$

$$= \frac{1}{4c^2} \iint_D F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}) d\eta d\xi \tag{2.20}$$

elde edilir. Eğer gerisin geriye $xt-$ koordinat sistemine dönülürse, D üçgensel bölgesi, tepesi (x_0, t_0) noktası, tabanı $t = 0$ başlangıç doğrusu ve kenarları

(x_0, t_0) noktasından geçen karakteristikler olan bir D_1 üçgensel bölgesi halini alır. Dönüşümün Jakobiyeni

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c$$

dir. Böylece (2.20) dan

$$v(x_0, t_0) = \iint\limits_{D} \tfrac{1}{4c^2} F(x,t)(-2c)dxdt$$
$$= \tfrac{1}{2c} \iint\limits_{D_1} F(x,t)dxdt$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^t dt \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(x,t)dx \qquad (2.21)$$

veya indisleri kaldırmak suretiyle

$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t dt \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau} F(\xi,\tau)dx \qquad (2.22)$$

elde edilir. Böylece (2.13)-(2.14) başlangıç değer problemi için aşağıdaki teoremi ifade edilebilir:

Teorem 2.2: $F(x,t)$, $x \in R$, $t \in R$ yarı düzleminde sürekli olsun. Eğer $\phi \in C^2(R)$, $\psi \in C^1(R)$ ise, bu takdirde

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)]$$

$$+\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (2.23)$$

fonksiyonu (2.13)-(2.14) başlangıç değer probleminin tek çözümüdür [1].

İspat: Teoremin ispatı, doğrudan doğruya, yukarıdaki incelemelerden ve (2.23) nin denklemi ve başlangıç koşullarını sağladığı gerçeğinden çıkar.

(2.23) formülü, homojen olmayan dalga denklemi için *D'Alembert çözümü* olarak bilinir. $F = 0$ olduğunda (2.23) formülü (2.12) formülüne indirgenir. Açıktır ki $u(x,t)$ çözümü, sadece $|\xi - x| \leq c(t-\tau)$ üçgeninin içi ve sınırı üzerinde bulunan (ξ,τ) noktalarındaki verilere bağımlıdır. *Karakteristik üçgen* denilen bu üçgen, (x,t) noktasını *bağımlılık bölgesi*dir. Çözümün, F ve başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğu da kolayca gösterilebilir. Yani, (2.13)-(2.14) problemi iyi konulmuş bir problemdir [1].

2.4. Ardışık Yaklaşımlar Yöntemiyle İntegral Denklemlerin Çözümü

Başlangıç ve sınır değer koşullarına sahip hiperbolik denklemler Volterra tipi integral denklemlere indirgenebilir. Bu denklemleri ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözebiliriz. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$u(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau)u(\tau)d\tau, \tag{2.24}$$

$$f(t) \in C[0,T], K(t,\tau) \in (0 \leq \tau \leq T) \tag{2.25}$$

olsun. $f(t), K(t,\tau)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında sürekli ise, integral denklemler bu aralıkta $\forall\lambda \in [0,T]$ için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaşımlar yöntemiyle belirlenir [7], [11]. Bu takdirde

$$u_0(t) = f(t),\ \ u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau,\ \ n = 1,2,3$$

olmak üzere (2.24) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(t) \tag{2.26}$$

serisi ile verilen bir tek sürekli çözümü vardır. Volterra, önemli ve kullanışlı olan bu metodu şu şekilde ifade etmiştir [5].

Teorem 2.3:(Varlık Teoremi) $f(t) \in C[0,T]$, $K(t,\tau) \in C(0 \le \tau \le t \le T)$ koşulları altında $u(t)$ fonksiyonu (2.24) denkleminin çözümüdür [6].

İspat: Aşağıda verilen Lemma 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 kullanarak ispatlanabilir.

Lemma 2.1: Kabul edelim ki, $K_0 = max|K(t,\tau)|$, $F_0 = max|f(t)|$,

$0 \le \tau \le t \le T$ olsun. O zaman

$$|u_n(t)| \le \frac{F_0(K_0 t)^n}{n!}$$

olur [11].

İspat: Tümevarım yöntemiyle,

$n = 0$ için $|u_0(t)| \le F_0$ olur.

$n = k$ için $|u_k(t)| \le \frac{F_0(K_0t)^k}{k!}$ doğruluğunu kabul edip

$n = k+1$ için $|u_{k+1}(t)| \le \frac{F_0(K_0t)^{k+1}}{(k+1)!}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$|u_{k+1}(t)| = |\int_0^t K(t,\tau)u_k(\tau)d\tau|,$$

$$\le \int_0^t |K(t,\tau)||u_k(\tau)|d\tau,$$

$$\le K_0 \int_0^t |u_k(\tau)|d\tau,$$

$$\le K_0 \int_0^t \frac{F_0(K_0\tau)^k}{K!}d\tau,$$

$$\frac{F_0K_0^{k+1}}{K!}\int_0^t \tau^k d\tau = \frac{F_0K_0^{k+1}t^{k+1}}{K!(K+1)} = \frac{F_0(K_0t)^{k+1}}{(K+1)!}.$$

Lemma 2.2: (2.25) koşulları altında $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır [11].

İspat: 1. Weierstrass teoreminden

$$|u_k(t)| \leq \frac{F_0(K_0 t)^k}{k!} \leq \frac{F_0(K_0 T)^k}{k!}, \forall t \in [0,T]$$

yakınsaklığı görülür.

Lemma 2.3: $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur [11].

İspat: 1.Weierstrass teoremi gereği $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ serisi $[0,T]$ aralığında yakınsaktır, $u_k(t)$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığında süreklidir. O zaman $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ toplam fonksiyonu da $[0,T]$ aralığında süreklidir. 2. Weierstrass teoremi gereği,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=0}^{N} u_k(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k(t)dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u(t)dt, \ \forall[\alpha,\beta] \in [0,T].$$

Lemma 2.4: $u(t)$ fonksiyonu (2.24) denkleminin bir çözümüdür [11].

İspat:

$$u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau)u_{n-1}(\tau)d\tau, \quad n = 1,2,3,...$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau) \sum_{n=1}^{N} u_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad n = 1,2,3,...$$

$$u_0(t) = f(t)$$

eşitliğini denklemin her iki tarafına ekleyelim

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau) d\tau + f(t),$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(t) = \int_0^t K(t,\tau) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau) d\tau + f(t).$$

$n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t K(t,\tau) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau) d\tau + f(t).$$

İkinci Weierstrass teoremi gereği

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau) \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\tau) d\tau + f(t),$$

$$u(t) = \int_0^t K(t,\tau) u(\tau) d\tau + f(t)$$

olur.

Teorem 2.4(Teklik Teoremi): (2.24) denkleminin çözümü tektir [11], [14].

İspat: (2.24) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için $u_1(t), u_2(t)$ gibi

$$u_1(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau) u_1(\tau) d\tau,$$

$$u_2(t) = f(t) + \int_0^t K(t,\tau) u_2(\tau) d\tau$$

birbirinden farklı iki çözümü olduğunu kabul edelim.

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_0^t K(t,\tau)[u_1(\tau) - u_2(\tau)]d\tau$$

olur.

$u_1(\tau) - u_2(\tau) = \varphi(\tau)$ olmak üzere,

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

homojen integral denklemini verir. $u_1(t) = |\varphi(\tau)|$

$$|\varphi(t)| \leq K_0 \int_0^t |\varphi(\tau)|d\tau,$$

$$\int_0^t |\varphi(\tau)|d\tau = u(t)$$

ise

$$u_1(t) \leq K_0 u(t),$$

$$u_1(t) - K_0 u(t) \leq 0.$$

Her iki tarafı ile $e^{-K_0 t}$ çarparsak

$$e^{-K_0 t} u_1(t) - K_0 e^{-K_0 t} u(t) \leq 0,$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-K_0 t} u(t)] \leq 0.$$

$t = 0$ ’dan $t = t$ ’ye integralini alırsak

$$e^{-K_0 t}u(t) - u(0) \leq 0,$$

$$e^{-K_0 t}u(t) \leq 0.$$

$u(t) \leq 0$ ve $u(t) \geq 0$ ise $u(t) \equiv 0$. $\forall t \in [0, T]$ için $|\varphi(t)| \equiv 0$ olur.

$\varphi(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0$ olduğundan $u_1(t) = u_2(t)$ olur.

Sonuç: İkinci tip Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı λ' dan bağımsızdır.

2.5. Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Dalga Denkleminin İndirgenmesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u(x,t) = F(x,t), \quad x \in R, \quad t \in R \tag{2.27}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.28}$$

problemine homojen olmayan dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Burada $F(x,t)$, sonsuz uzaklıktaki bir cismi etkileyen dış kuvveti temsil eden bir fonksiyondur. (2.27)-(2.28) nin çözümü

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{2.29}$$

Burada

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-t) + \phi(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

dür. Kabul edelim ki $F(x,t)$,

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

yarı düzleminde sürekli olsun. $q(x) \in C(-\infty,\infty), \quad \phi \in C^2(-\infty,\infty)$,

$\psi \in C^1(-\infty,\infty), \quad F, F_t \in C(\Delta(x_0,t_0))$ ise $\Delta(x_0,t_0)$ bölgesinde

(2.27)' ün tek çözümü vardır ve bu çözüm yaklaşık ardışıklar yöntemi ile çözülebilir. Bu takdirde;

$$u_0(x,t) = f(x,t), \tag{2.30}$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)u_{n-1}(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{2.31}$$

olmak üzere (2.29) denklemi düzgün ve mutlak yakınsak

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.32}$$

serisi ile çözülür.

Teorem 2.5 : (Varlık Teoremi) $f(x,t) \in C(\Delta(t)), \quad q(x) \in [-T,T]$,

$f_0 = max|f(x,t)|$ koşulları altında $u(x,t) \in C(\Delta(x_0,t_0))$ fonksiyonu (2.29)' ün çözümüdür. Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır [4].

Lemma 2.5: Kabul edelim ki

$$q_0 = max|q(x)|, \quad x\epsilon[-T,T], \quad f_0 = max|f(x,t)|, \quad (x,t) \in \Delta(T)$$

olsun. O zaman

$$|u_n(x,t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^n\frac{1}{n!}$$

olur [4].

İspat: $n=0$ için $|u_0(x,t)| \leq f_0$ açıktır. $n=k$ için doğru olsun.

$$|u_k(x,t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^k\frac{1}{k!},$$

$n=k+1$ için;

$$|u_{k+1}(x,t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!},$$

$$|u_{k+1}(x,t)| = \left|\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\xi)u_k(\xi,\tau)d\xi d\tau\right|,$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |q(\xi)||u_k(\xi,\tau)d\xi d\tau|,$$

$$\leq \frac{1}{2}q_0f_0(\frac{1}{2}q_0)^k\frac{T^k}{k!}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau^k d\xi d\tau,$$

$$\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1}\frac{T^k}{k!}\int_0^t \tau^k(x+(t-\tau)-x+(t-\tau))d\tau,$$

$$\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1}\frac{T^k}{k!}\int_0^t \tau^k(2t-2\tau)d\tau,$$

$$\leq f_0(\frac{1}{2}q_0)^{k+1}\frac{T^k}{k!}\int_0^t \tau^kTd\tau,$$

$$\leq f_0(\frac{1}{2}q_0Tt)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}. \tag{2.33}$$

Lemma 2.6: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ serisi $\Delta(T)$ aralığında düzgün yakınsaktır [4].

İspat : $|u_k(x,t)| \leq f_0(\frac{1}{2}q_0 Tt)^n \frac{1}{n!}, \quad \forall t\epsilon[0,T],$

$$\leq f_0(\frac{1}{2}q_0 TT)^n \frac{1}{n!}. \tag{2.34}$$

Birinci Weierstrass Teoremi: $|U_k(x,t) \leq a_k|, \;\; \forall k \in (0,1,...,t), \;\; t \in [0,T]$ ve nümerik $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun.

Öyleyse $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ de düzgün yakınsaktır [4], [13].

$$a_k = f_0(\frac{1}{2}q_0 TT)^k \frac{1}{k!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f_0(\frac{1}{2}q_0 T^2)^k \frac{1}{k!}.$$

Lemma 2.7: $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$, $[0,T]$'de süreklidir [4].

İkinci Weierstrass Teoremi: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$, serisi $[0,T]$ aralığında düzgün yakınsak olsun ve her bir $u_n(x,t)$ fonksiyonu $[0,T]$'de sürekli olsun. Öyleyse $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ $[0,T]$'de sürekli fonksiyondur [4], [13].

İspat: İkinci Weierstrass teoremi yardımıyla

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n-1}^{N} u_{n-1}(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Her iki tarafa $u_0(x,t) = f(x,t)$ eklenirse

$$u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = f(x,t) + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n-1}^{N} u_{n-1}(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$u(x,t) = \lim_{n\to 0} \sum_{n=0}^{N} u_n(x,t),$$

$$u(x,t) = f(x,t) + \frac{1}{2} \lim_{n\to 0} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Lemma 2.8: $u(x,t)$ fonksiyonu (2.29) denkleminin bir çözümüdür [4].

İspat: $u_n(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\triangle(x,t)} q(\xi) u_{n-1}(\xi,\tau) d\xi d\tau$ denklemini ele alalım.

$n = 1$'den $n = N$'e her iki tarafın toplamını alırsak ve her iki tarafa

$u_0(x,t) = f(x,t)$ eklersek

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau + f(x,t), \tag{2.35}$$

$N \to \infty$ için limit alınırsa

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \sum_{n=0}^{N} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau + f(x,t),$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n(\xi,\tau) d\xi d\tau + f(x,t),$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi) u(\xi,\tau) d\xi d\tau + f(x,t). \tag{2.36}$$

Teorem 2.6 :(Teklik Teoremi) (2.29) denkleminin çözümü tektir [4].

İspat: $u_1(x,t)$ ve $u_2(x,t)$ gibi iki farklı çözüm olsun

$$u_1(x,t) = f(x,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$u_2(x,t) = f(x,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

olsun.

$$\varphi(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \tag{2.37}$$

ise

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{2.38}$$

olur.

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{1}{2}q_0\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} |\varphi(\xi,\tau)|d\xi d\tau, \tag{2.39}$$

$$u(x,t) = max|\varphi(x,t)|$$

olmak üzere

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{1}{2}q_0\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} u(\tau)d\tau,$$

$$= q_0\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\xi d\tau, \tag{2.40}$$

$$u(t) = max|\varphi(x,t)| \leq q_0\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$u(t) \leq q_0 \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$\leq q_0 t \int_0^t |u(\tau)|d\tau \tag{2.41}$$

olur.

$$u(t) = \int_0^t |\varphi(x,\tau)|d\tau \tag{2.42}$$

olmak üzere

$$u^{'}(t) - q_0 t u(t) \leq 0. \tag{2.43}$$

Her iki tarafı $e^{-\frac{q_0 t^2}{2}}$ ile çarparsak

$$\frac{d}{dt}[e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t)] \leq 0,$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t)] \leq 0, \tag{2.44}$$

$$e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t) - u(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{q_0 t^2}{2}} u(t) \leq 0 \tag{2.45}$$

olur. $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \leq 0$ tanım gereği $\forall t \in [0,T]$ için $u(t) \geq 0$ olur. Öyleyse $u(t) = 0$ olur.

$$u(t) = max|\varphi(x,t)| \rightarrow \varphi(x,t) = 0$$

$$u_1(x,t) = u_2(x,t). \tag{2.46}$$

3. DEĞİŞKEN KATSAYILI HOMOJEN DALGA DENKLEMİ

Değişken katsayılı

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{3.1}$$

dalga denklemi

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.2}$$

koşulları altında

$$u(x,0) = F(x,t) + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\tau(x,t) \le t} u(\xi, t - \tau(\xi, x)) \Delta_\xi \sigma(\xi, x) d\xi \tag{3.3}$$

Volterra integral denklemine indirgenir.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$\sigma(\xi, x)$ bir Sobolev fonksiyonu olup, K sabit olmak üzere

$$|\Delta \sigma(\xi, x)| \le \frac{K}{\tau(\xi, x)}$$

tarafından sağlanır. ξ rayda bir sabit Riemann koordinatları

$$\xi = f(\tau, x), \quad \xi = \alpha \tau(\xi, x),$$

$$\alpha = (cos\varphi sin\theta, sin\varphi sin\theta, cos\theta)$$

olmak üzere

$$d\xi = \frac{1}{\left|\frac{\partial f_0(\xi,x)}{\partial \xi}\right|}$$

olur.

3.1. Eikonal Denklem

$\tau(x, x^o)$ bir fonksiyon, x^o bir parametre olmak üzere

$$|\nabla\tau(x, x^o)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}, \quad n^2 = \frac{1}{c^2(x)} \tag{3.4}$$

$$\tau(x, x^o) = 0(|x - x^o|), \quad x \to x^o$$

koşulları altında eikonal denklemi sağlar [11], [16].

Lemma 3.1: c_0 bir sabit olmak üzere, $\tau(x, x^o) = \frac{|x-x^o|}{c_0}$ denklemi (3.4) eikonal denklemin bir çözümüdür.

İspat:

$$|\nabla\tau(x, x^o)|^2 = \left|\nabla_x(\frac{x - x^o}{c_0})\right|^2,$$

$$\left|\nabla\left(\frac{1}{c_0}(\sum(x_i - x_i^o)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{c_0}\left|\frac{(x - x^o)}{|x - x^o|}\right| = \frac{1}{c_0}.$$

3.2. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemler

Eikonal denklemin eşitlikleri kullanarak $k = 1, 2, 3$ için $\tau(x, x^o)$'ın x_k'ya göre kısmi türevlerini alırsak

$$p = \frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad r = \frac{\partial \tau}{\partial x_3}, \tag{3.5}$$

$$F = p^2 + q^2 + r^2 \tag{3.6}$$

olur. $F = 0$ hali eikonal denkleme karşılık gelir. Bu denklem için Euler sistemi

$$\frac{dx_1}{ds} = F_p = 2p, \quad \frac{dx_2}{ds} = F_q = 2q, \quad \frac{dx_3}{ds} = F_r = 2r, \tag{3.7}$$

$$\frac{d\tau}{ds} = pF_p + qF_q + rF_r = 2(p^2 + q^2 + r^2) = 2n^2(x), \tag{3.8}$$

$$\frac{dp}{ds} = -(F_\tau p + F_{x_1}) = -\left(-\frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_1},$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_2}, \quad \frac{dr}{ds} = \frac{\partial n^2(x)}{\partial x_3}, \tag{3.9}$$

$$x = \big(x_1(s), (x_2(s), (x_3(s)\big), \quad P = (p, q, r),$$

$$\frac{dx}{ds} = 2(p, q, r), \quad \frac{d\tau}{ds} = 2n^2,$$

$$\frac{dP}{ds} = 2n(x)\nabla_x(n(x)) = 2n^2 \frac{\nabla_x n}{n} = 2n^2 \nabla_x(\ln(n(x))), \tag{3.10}$$

$t = \tau$, $dt = 2n^2 ds$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2}, \frac{dP}{dt} = \nabla_x(\ln(n(x))) \tag{3.11}$$

sistemine *Eikonal sistem* denir. Yüzey (τ sabit) ise dalga önü olarak adlandırılır.

$$\nabla\tau dx = (p, q, r)(dx_1, dx_2, dx_3) = pdx_1 + qdx_2 + rdx_3 = d\tau = 0$$

olduğu için $\nabla\tau = (p, q, r)$ vektörü eğri önünün normaldir. $\tau = (x, x^0) = t$ denklemi t zamanında x^0'daki kaynak noktasında ön dalgayı tanımlar.

$\tau = (x, x^0) = t$ yüzeyin karakteristik konoididir. Karakteristik konoid oluşturma metodu çift karakterli denilen farklı çizgiler oluşturmayı içerir. Bu farklı çizgiler konoid üzerine yatar ve ortaklaşa bunu oluştururlar. x boşluğunun üstündeki çift karakterli projeksiyonu ışın(ray) denir. Bu ışınlar $\tau = (x, x^0) = t$ yüzeyine ortogonaldir. Işınları bulabilmek için Euler sisteminin çözülmesi gerekir. $\nabla\tau$, $t = \tau(x, x^0)$ yüzeyine dikey, dalga önü $t = \tau(x, x^0)$ yüzey seviyesi olduğundan,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = (2p, 2q, 2r) = 2\nabla\tau(x, x^0),$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2\nabla n^2(x),$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right) + \left(\frac{dx_2}{ds}\right) + \left(\frac{dx_3}{ds}\right) = 2\nabla n^2(x). \tag{3.12}$$

Yukarıdaki denklem sistemine *ray denklemleri* denir [3], [13], [16]. σ, ray için eğri uzunluğunu göstermek üzere

$$d\sigma^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2,$$

$$d\sigma^2 = 4(p^2 + q^2 + r^2)(ds^2),$$

$$d\sigma = 2n ds \tag{3.13}$$

olur.

$$\frac{d}{ds} = 2n\frac{d}{d\sigma}. \tag{3.14}$$

Dalga boyunca τ'nun değişimi

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = n, \tag{3.15}$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\tau}{d\sigma} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} n d\sigma,$$

$$\tau(x(\sigma)) = \tau(x(\sigma_0)) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n(x(\sigma)) d\sigma \tag{3.16}$$

olur.

3.3. Geçiş Denklemi

$u(x,t)$ fonksiyonu (3.1) denklemlerinin bir çözümü olsun.

$$[u(x,t)] = u_1(x,t) = u(x, t-\tau) \tag{3.17}$$

dönüşümü ile (3.1) denklemi aşağıdaki forma dönüşür.

$$[u_{tt}] = c^2(x)[\Delta u] \tag{3.18}$$

$[\Delta u]$ fonksiyonunu elde etmek için öncelikle (3.17)'deki eşitliği kullanarak ∇u_1 ifadesini elde edelim:

$$\nabla u_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x, t-\tau), \frac{\partial}{\partial x_2} u(x, t-\tau), \frac{\partial}{\partial x_3} u(x, t-\tau) \right),$$

$$\nabla u_1 = [\nabla u] - [u_t] \nabla \tau \tag{3.19}$$

elde edilir. Şimdi (3.19) denkleminin diverjansını alırsak,

$$div(\nabla u_1) = div[\nabla u] - div([u_t] \nabla \tau). \tag{3.20}$$

Burada,

$$div[\nabla u] = [\Delta u] - ([\nabla u_t] \nabla \tau), \tag{3.21}$$

$$div([u_t] \nabla \tau) = [\nabla u_t] \nabla \tau - [u_{tt}] (\nabla \tau)^2 + [u_t] \Delta \tau \tag{3.22}$$

dır. (3.19) eşitliğinin t'ye göre türevini alırsak,

$$\nabla (\frac{\partial u_1}{\partial t}) = [\nabla u_t] - [u_{tt}] \nabla \tau \tag{3.23}$$

elde ederiz. (3.21)-(3.22) sonuçlarını (3.20) denkleminde yerine yazıp düzenlersek

$$\Delta u_1 = [\Delta u] - 2[\nabla u_t] \nabla \tau + [u_{tt}] (\nabla \tau)^2 - [u_t] \Delta \tau. \tag{3.24}$$

(3.18) ve (3.23) denklemlerini de (3.24) denkleminde yerine yazarsak

$$\Delta u_1 = \frac{1}{c^2}[u_{tt}] - 2\left(\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t} + [u_{tt}]\nabla\tau\right)\nabla\tau + [u_{tt}](\nabla\tau)^2 - [u_t]\Delta\tau. \qquad (3.25)$$

Eikonal denklemi kullanarak (3.25) düzenlenirse

$$\Delta u_1 = -2\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - [u_t]\Delta\tau. \qquad (3.26)$$

(3.26) eşitliği $\sigma(x)\epsilon C^2(\Re)$ Sobolev fonksiyonu ile çarparsak

$$\sigma\Delta u_1 = -2\sigma\nabla\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\nabla\tau - \frac{\partial u_1}{\partial t}\sigma\Delta\tau. \qquad (3.27)$$

(3.27) denklemi şöyle düşünelim:

$$\sigma\Delta u_1 = div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}w\right) = -\frac{\partial u_1}{\partial t}divw - w\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}. \qquad (3.28)$$

(3.27) ve (3.28) denklemlerini karşılaştırırsak

$$w = 2\sigma\nabla\tau, \quad divw = \sigma\Delta\tau$$

bulunur. Öyleyse w fonksiyonun diverjansını alıp diğer denkleme eşitlersek

$$2\nabla\sigma\nabla\tau = 0, \qquad (3.29)$$

eşitliğine *geçiş denklemi* denir.

3.4. Çözüm Fonksiyonunun Elde Edilmesi

τ, eikonal denklemin bir çözümü, σ da geçiş denkleminin bir çözümü olsun. O halde

$$\sigma \Delta u_1 = div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} 2\sigma \Delta \tau\right) \tag{3.30}$$

sağlanır. Bu denkleme Green formülü uygulanırsa

$$\iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} (\sigma \Delta u_1 - u_1 \Delta \sigma) dv = \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n}\right) dS \tag{3.31}$$

(3.31) denkleminde (3.30) eşitliği yazılırsa

$$-\iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} (u_1 \Delta \sigma) dv + \iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} 2\sigma \Delta \tau\right) dv$$

$$= \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n}\right) dS. \tag{3.32}$$

(3.32) denklemine diverjans teoremi uygulanırsa

$$-\iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} (u_1 \Delta \sigma) dv - \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} 2\frac{\partial u_1}{\partial t} \sigma \frac{\nabla \tau}{\partial n} ds$$

$$= \iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n}\right). \tag{3.33}$$

Bu denklem düzenlenirse

$$\iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial \sigma}{\partial n} + 2\frac{\partial u_1}{\partial t} \sigma \frac{\nabla \tau}{\partial n}\right) ds + \iiint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} (u_1 \Delta \sigma) dv = 0. \tag{3.34}$$

(3.17) eşitliği kullanarak

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \left[\frac{\partial u_1}{\partial n}\right] \frac{\partial \tau}{\partial n}. \tag{3.35}$$

Bu eşitliği (3.34) denkleminde yazarsak

$$\iint\limits_{\tau(x,x^0)=t} \left(\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial n} - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right) ds + \iint\limits_{\tau(x,x^0)\leq t} ([u]\Delta\tau) dv = 0 \qquad (3.36)$$

σ fonksiyonu τ ya bağlı olarak (3.36) denklemini sağlar.

3.5. σ Fonksiyonunun Özellikleri

σ fonksiyonunun x^0 komşuluğunda ikinci mertebeden türevlenebilir olduğunu, x^0 noktasında tekilliğe sahip olduğu ve aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

$$\lim_{x \to x^0} \sigma(x, x^0)\tau(x, x^0) = \frac{1}{c(x^0)},$$

$$\sigma(x, x^0) = \sigma(x^0, x),$$

$$|\Delta\sigma(x, x^0)| \leq \frac{K}{\tau(x, x^0)}.K sabit$$

Eğer S_1 x^0 noktasını içeren bir kapalı yüzey ve n, S_1 yüzeyinin bir normal vektörü ise aşağıdaki denklem S_1 x^0'a giderken alınan limiti sağlar:

$$\lim_{S_1 \to x^0} \frac{\partial \sigma(x, x^0)}{\partial n} ds = -4\pi.$$

$u(x,t)$ fonksiyonu S yüzeyi ile sınırlı D bölgesinde bir çözüm olsun. D bölgesinin içerdiği x^0 merkezli ϵ yarıçaplı bir çembersel bölgeyi D'den ayırdığımızı varsayalım ve yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $\sigma(x, x^0)$ fonksiyonuna sahip olalım. (3.36) denklemini kalan D bölgesine uygularsak;

$$\iint\limits_{S} \left(\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial \sigma}{\partial n} + \sigma \frac{\partial \tau}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \right) dS$$

$$+\iint\limits_{S_\epsilon}\left(\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right)dS+\iiint\limits_{D'}[u]\Delta\sigma dv=0. \quad (3.37)$$

(3.37) denkleminin limit altındaki görüntüsü aşağıdaki eşitliği verir:

$$u(x^0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\sigma\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]-\phi\frac{\partial\sigma}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial n}\psi\right)dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D\prime}[u]\Delta\sigma dv. \quad (3.38)$$

Sağ taraftaki çift katlı integral bilinen bir fonksiyondur ve $F(x^0,t)$ ile gösterilir. Böylelikle $u(x,t)$ fonksiyonu için bir integral denklem elde edilmiş olunur.

$$u(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}u(x,t-\tau(x,x^0))\Delta\sigma(x,x^0)dv. \quad (3.39)$$

4. DEĞİŞKEN KATSAYILI HOMOJEN OLMAYAN DALGA DENKLEMİ

Değişken katsayılı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x u + \sum_{j=1}^{3} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x) \frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t), \tag{4.1}$$

$$x \in \Re^3, \quad t > 0.$$

homojen olmayan dalga denklemi

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{4.2}$$

koşulları altında verilsin. Burada Δ_x Laplace operatörünü temsil etmekte ve c pozitif sabit sayıdır.

$$b_j(x),\ q(x) \in C^2(\Re^3), \quad j = 1,2,3, \quad \phi(x) \in C^2(\Re^3) \cap H^4(\Re^3),$$

$$\psi(x) \in C^1(\Re^3) \cap H^3(\Re^3), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t) \in C([0,T]); H^{4-j}(\Re^3).$$

$j = 1,2; H^m(\Re^3)(m = 1,2,3,4)$ Sobolev uzayıdır [4], [14]. Hiperbolik denklemler teorisi (4.1)-(4.2) denklemlerinin çözümü olan $u(x,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial u^j}{\partial t^j}(x,t) \in C([0,T]; H^{4-j}(\Re^3) \cap C^{2-j})(\Re^3), j = 0,1,2,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t} \in C([0,T]; H^1(\Re^3))$$

sağlamaktadır. $u(x,t)$ çözümü 3-D Volterra integral denklemidir. Bunun için Sobolev metodu kullanılacaktır. Farklı bir $u_1(x,t)$ fonksiyonu ele alalım:

$$u_1(x,t) = u\left(x, t - \frac{|x - x^0|}{c}\right), \tag{4.3}$$

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)\epsilon\Re^3.$$

L bir diferensiyel operatör olmak üzere

$$L_x u_1 \equiv \left(\Delta_x u_1 + \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)$$

tanımlansın. (4.3) denkleminden

$$\Delta u_1 = \Delta u(x, t-\tau) - 2\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial t^2}(\nabla\tau)^2 - \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial t}\Delta\tau \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.1) denkleminde Δu fonksiyonu yanlız bırakılarak (4.4)'de yerine yazılır.

$$L_x u_1 = -\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}q(x)\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2}f(x, t-\tau)$$

$$-2\nabla\frac{\nabla u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{\nabla u_1}{\partial t}\nabla\tau \tag{4.5}$$

Elde edilen ifade $\sigma(x) \in C^2(\Re^3)$ fonksiyonu ile çarpılırsa

$$\sigma L_x u_1 = -2\sigma\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\nabla\tau - \frac{1}{c^2}\sigma f(x, t-\tau)$$

$$-\sigma\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\nabla\tau+\frac{1}{c^2}q(x)+\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3}b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right) \tag{4.6}$$

bulunur.

$$\sigma L_x u_1 = div(-\frac{\partial u_1}{\partial t}w)-\frac{1}{c^2}\sigma f(x,t-\tau) \tag{4.7}$$

şeklinde düşünülürse

$$w=2\sigma\nabla\tau,\ \ div w=\sigma\Delta\tau+\frac{1}{c^2}\sigma q(x)+\frac{1}{c^2}\sigma\sum_{j=1}^{3}b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j}$$

olur. w'nin diverjansını alıp karşılıklı eşitlenirse

$$2\nabla\sigma\nabla\tau+\sigma\left(\Delta\tau-\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3}b_j(x)\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right)=0 \tag{4.8}$$

elde edilir. O halde (4.7)'u tekrar yazarsak

$$\sigma L_x u_1 = div\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}2\sigma\nabla\tau\right)-\frac{1}{c^2}\sigma f(x,t-\tau) \tag{4.9}$$

olur. (4.8)'nin çözümü karakteristikler metodu kullanılarak yapılırsa

$$\sigma(x,x^0)=\frac{1}{|x-x^0|}exp\left(\frac{|x-x^0|}{2c}\int_0^1 q(x^0+(x-x^0)z)dz\right)$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{2c^2}\int_0^1\sum_{j=1}^{3}b_j(x^0+(x-x^0)z)(x_j-x_j^0)dz\right). \tag{4.10}$$

L^* operatörü için σ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$L^*\sigma(x,x^0) = \Delta\sigma(x,x^0) - \frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\sigma(x,x^0)$$

(4.9) denklemine Greeen fonksiyonu uygulanırsa

$$\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} (\sigma(x,x^0)Lu_1(x,t) - u_1(x,t)L^*\sigma(x,x^0))dx$$

$$= \iint\limits_{|x-x^0|\le ct} (\sigma(x,x^0)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial n} - u_1(x,t)\frac{\sigma(x,x^0)}{\partial n}$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j n_j \sigma(x,x^0 u_1(x,t))dS$$

elde edilir.

$$\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} div\Big(- \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} 2\sigma(x,x^0\nabla(\frac{|x-x^0|}{c})\Big)dx$$

$$-\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} \sigma(x,x^0)f\big(x,t-\frac{x-x^0}{c}\big)dx - \iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} u_1(x,t)L^*\sigma(x,x^0)dx$$

$$= \iint\limits_{|x-x^0|=ct} \Big(\sigma(x,x^0)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial n} - u_1(x,t)\frac{\partial\sigma(x,x^0)}{\partial n}$$

$$+\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3} b_j n_j \sigma(x,x^0)u_1(x,t)\Big)dS. \qquad (4.11)$$

Ostrogradskii formülü (4.11) denklemine uygulanırsa,

$$\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} \sigma(x,x^0)f\left(x,t\frac{|x-x^0|}{c}\right)dx + \iiint\limits_{|x-x^0|\le ct} u_1(x,t)L^*\sigma(x,x^0)dx$$

$$+\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\left(\sigma(x,x^0)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial n}-u_1(x,t)\frac{\partial\sigma(x,x^0)}{\partial n}\right)dS$$

$$+\frac{1}{c^2}\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\sum_{j=1}^{3}b_jn_j\sigma(x,x^0)u_1(x,t)dS$$

$$+\frac{1}{c}2\sigma\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}dS=0. \tag{4.12}$$

σ nın özellikleri ve başlangıç şartlarını kullanarak (4.12) denklemi tekrar düzenlenirse

$$u(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}u\left(\xi,t-\frac{|\xi-x|}{c}\right)L^*\sigma(\xi,x)d\xi. \tag{4.13}$$

Burada

$$F(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|x-x^0|=ct}\left\{\sigma(\xi,x)\frac{\partial g(\xi)}{\partial n}-\phi(\xi)\frac{\partial\sigma(\xi,x)}{\partial n}+\big(\frac{1}{c^2}\sum_{j=1}^{3}b_jn_j\big)\sigma(\xi,x)\phi(\xi)\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma(\xi,x)}{c}h(\xi)\right\}dS+\frac{1}{4\pi c^2}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}\sigma(\xi,x)f(\xi,t-\frac{|\xi-x|}{c})d\xi.$$

Fonksiyonu Neumann serisi şeklinde ifade edersek

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

dir ve $u_0(x,t)=F(x,t)$ olmak üzere

$$u_n(x,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|x-x^0|\le ct}u_{n-1}\left(\xi,t-\frac{\xi-x}{c}\right)L^*\sigma(\xi,x)d\xi,\ \ n\ge 1$$

dır. $\Delta(T)=\left\{(x,t): 0\leq t\leq T-\frac{|x|}{c},\ T>0\right\}$ olacak şekilde;

1. $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$ serisinin $\Delta(T)$ bölgesinde $u(x,t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu,

2. $u(x,t)$ fonksiyonunun (4.12) integral denkleminin $\Delta(T)$ bölgesinde tek çözümü olduğu gösterilebilir.

5. ANİSOTROPİC ELEKTRODİNAMİK SİSTEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm Maxwell sistemi için Cauchy probleminin temel çözümleri ile ilgilidir. Bu sistemin dielektrik ve manyetik geçirgenliği sabittir, iletkenlik sabit elemanları ile bir matristir. Maxwell sistemi vektör denklemi ile skaler elektrodinamik potansiyelli telgraf vektör denklemine indirgenir. Bu telgraf vektör denklemi bir hiperbolik sistemdir. Hiperbolik denklem ve sistem için Cauchy problemi için temel çözümün yapısı başlangıç koşullu ve homojen olmayan sabit katsayılı sistem ve Cauchy probleminin temel çözümünü bulmak önemli bir problemdir. Hiperbolik denklemlerin temel çözümü ile ilgili yapısal özellikleri J.Hadamard ve S.L.Sobolev'in çalışmalarından incelenebilir [12].

$$u_{tt} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u + \delta(x - x^0, t), \qquad (5.1)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ üç boyutlu uzayda R^3 değişkenler, R bir boyutlu uzayda değişken t; R^3 üç boyutlu katsayı $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ve $\delta(x - x^0, t)$ dirac delta fonksiyonu $x = x^0, t = 0$' da ele alınmıştır. Bu denklemin tamsayılı düzgün fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Bu denklem için Cauchy probleminin temel bir çözümü yazılabilir [16].

$$u(x, t, x^0) = \theta(t) \sum_{k=-1}^{N} a_k(x, x^0)\theta_k(t^2 - \tau^2(x, x^0)) + u_N(x, t, x^0), \qquad (5.2)$$

şeklinde bir skaler hiperbolik denklem sistemini göz önüne alalım. Bu denklem Cauchy probleminin temel çözümü şeklinde yazılabilir. $\tau(x, x^0)$ uzaklık geometrik metrikse

$$d\tau = \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ij}(x) dx_i dx_j \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

olur.

Burada $B = (B_{ij}(x))$ in tersi $A = (a_{ij}(x))$;a_{ij} hiperbolik denklem katsayıları; $\theta_0(t)$ basamak fonksiyonu ($t \geq 0$ için $\theta_0(t) = 1$ ve $t < 0$ için $\theta_0(t) = 0$), $k = 1, 2, ...$ için $\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!}\theta_0(t)$; $\theta_{-1}(t) = \delta(t)$, $t = 0$ için $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonu ve $u_N(x,t)$ çözümün regüler kısmıdır.

Katsayıları izleyen kararlılık işlemi Romanov tarafından tanımlanmıştır. Tezimizde bu işlem telgraf vektör denklemi için açık bir formül oluşturmak için uygulanabilir. Bu çalışmanın ana sonucu telgraf vektör denklemi için Cauchy probleminin temel çözümü ile oluşturulmuştur. Maxwell'in sistemi için Cauchy probleminin temel çözümleri için açık bir formüldür.

5.1. Elektromanyetik Alanın Dalga Denklemleri

D, B ve J vektörleri elektriksel yer değişkeni, manyetik indüksiyon ve akım yoğunluğu vektörleri olmak üzere Maxwell sistemi

$$curl_x H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J, \tag{5.4}$$

$$curl_x E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{5.5}$$

$$div_x B = 0, \tag{5.6}$$

$$div_x D = 4\pi\rho \tag{5.7}$$

formundadır. ρ elektrik yükü yoğunluğu olmak üzere ρ ile J arasındaki bağıntı

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_x J = 0 \tag{5.8}$$

dır. Bundan dolayı (5.4) ve (5.5) eşitlikleri birbiriyle bağıntılıdır. Bu bağıntı elektrik yükünün korunduğunu ifade eder. B, D ve J terimleriyle E ve H arasındaki bağıntı

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad J = \sigma E + j \tag{5.9}$$

şeklindedir ki burada ϵ elektriksel geçirgenliği, μ manyetik geçirgenlik, σ iletkenlik, j akım yoğunluğu dış elektomanyetik güçlerin hareketi ifade eder.

$$t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0, \quad H = 0, \quad \rho = 0, \quad j = 0 \tag{5.10}$$

dir. $t < 0$ zamanında elektromanyetik alan, akım veya elektrik yükü olmadığı anlamına gelir. Gerçekte div_x operatörü (5.5) ye uygulamada $\frac{\partial}{\partial t} div_x B = 0$ elde ederiz ve (5.9) dan $div_x B|_{t<0} = 0$ olur. Bu son iki denklem (5.6) ü gösterir. (5.4) de div_x 'i uygularsak

$$div_x \frac{\partial D}{\partial t} + 4\pi div_x J = 0$$

olur ve (5) ile $\frac{\partial}{\partial t}[div_x D - 4\pi\rho] = 0$ elde edilir.

j bilinen bir vektör fonksiyonu, σ matris, ϵ, μ sabit olmak üzere ρ fonksiyonu E ve H vektör fonksiyonunun (5.4) den (5.10) yi sağladığını düşünelim.

$$E|_{t<0} = 0, \qquad H|_{t<0} = 0$$

koşulları altında

$$curl_x E = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E) + \frac{4\pi}{c}\sigma E + \frac{4\pi}{c}j, \tag{5.11}$$

$$curl_x E = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu H) \tag{5.12}$$

denklem sistemi elde edilir. Ve daha sonra denklemlerden ρ fonksiyonu buluruz.

ρ fonksiyonu

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -div_x[\sigma E + \frac{4\pi}{c}j], \tag{5.13}$$

$$\rho|_{t<0} = 0 \tag{5.14}$$

den elde edilir.

(5.12) ve (5.13) dan

$$curl_x H = \bar{\epsilon}\frac{\partial E}{\partial t} + \bar{\sigma}E + \bar{j}, \qquad curl_x E = -\bar{\mu}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{5.15}$$

$$E|_{t<0} = 0, H|_{t<0} = 0. \tag{5.16}$$

Yazma kolaylığı için, ϵ, μ, σ harflerinin üstüne çubuklar konulur.

Burada $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{c}$, $\quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{c}$, $\quad \bar{\sigma} = \frac{4\pi\sigma}{c}$, $\quad \bar{j} = \frac{4\pi j}{c}$ dır.

5.2. Skaler ve Vektör Elektrodinamik Potansiyel

(5.6) ün ikinci denklemi için div_x uygularsak,

$$\frac{\partial}{\partial t}(div_x(\mu H)) = 0, \quad div_x(\mu H)|_{t<0} = 0$$

Cauchy problemi elde edilir.

Bundan dolayı $t \epsilon R$ için $div_x(\mu H)$ dir. Burada H fonksiyonunu şu formda kabul edelim.

$$H = \frac{1}{\mu} curl_x A. \tag{5.17}$$

Burada A vektörü fonksiyonuna elektrodinamik potansiyelli vektör fonksiyonu denir. Bu durumda $div_x(\mu H) = 0$ korunur. (5.15) nin ikinci denklemi (5.17) de yerine konulursa $curl_x E + curl_x \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ elde edilir.

φ bir skaler fonksiyon ve $curl_x \nabla_x \varphi = 0$ olmak üzere

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla_x \varphi \tag{5.18}$$

dır.

Bu φ skaler fonksiyonuna *skaler elektrodinamik potansiyeli* denir.

(5.15) ün birinci denkleminde (5.17), (5.18) yerine yazılırsa

$$curl_x(curl_x \frac{1}{\mu} A)) = -\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_x \varphi) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla_x \varphi + J \tag{5.19}$$

elde edilir.

$curl_x(curl_x A) = \nabla_x div A - \triangle_x A$ özelliğini (5.19) de kullanarak $\phi = \nabla_x \varphi$, olmak üzere

$$\frac{1}{\mu}\nabla_x div_x A - \epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t} - \sigma\phi + \epsilon\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu}\triangle_x A + \sigma\frac{\partial A}{\partial t} = J \tag{5.20}$$

elde edilir.

$a = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ olmak üzere (5.20) ten A ve ϕ için

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon}\sigma\phi = a^2\nabla_x div_x A,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - a^2\triangle_x A + \frac{1}{\epsilon}\sigma\frac{\partial A}{\partial t} = a^2\mu J, \tag{5.21}$$

yazılabilir.

(5.16) ü sağlamak için $\phi|_{t<0} = 0, A|_{t<0} = 0$ şartlar yeterlidir. A vektör potansiyeli bulunursa

$$\phi(x,t) = a^2\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-\tau)exp(-\frac{1}{\epsilon}\sigma t)\nabla_x div_x A(x,\tau)d\tau \tag{5.22}$$

skaler potansiyel elde edilir.

5.3. Telegraf Denklem Sistemi İçin Cauchy Probleminin Temel Çözümü

Telegraf vektör operatörü için Cauchy probleminin temel çözümü ile $M = \frac{1}{2\epsilon}\sigma$ olduğunda

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x + 2M\frac{\partial}{\partial t}$$

olur.

Tanım 5.1: $e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$, sütun matris ϵ^j,

$j = 1, 2, 3,$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

dirac delta fonksiyonu olmak üzere

$$L\epsilon^j = e_j \delta(x, t)$$

$$\epsilon^j|_{t<0} = 0$$

koşulu altında ϵ matrisine L operatörü için Cauchy probleminin temel çözümü denir.

Teorem 5.1: $exp(Mt)$ ve $I_1(Mt)$ matrisleri

$(Mt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^2}{k!}, \quad I_1(Mt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ ve $\Gamma = t^2 - |x|^2/a^2$

olmak üzere $\epsilon(x, t)$ matrisi

$$\epsilon(x, t) = \frac{\theta(t)\delta(\Gamma)exp(-Mt)}{2\pi a^3} + \frac{\theta(t - |x|/a)Mexp(-Mt)I_1(M\sqrt{\Gamma}/2)}{4\pi a^3\sqrt{\Gamma}}$$

L Telegraf vektör operatörünün temel çözümüdür [16].

5.4. Maxwell Sistemi İçin Cauchy Probleminin Temel Çözümü

Tanım 5.2: $e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)$, olmak üzere j-inci sütun matris

$$G(x,t) = \begin{pmatrix} G_{1,j} \\ G_{2,j} \\ G_{3,j} \\ G_{4,j} \\ G_{5,j} \\ G_{6,j} \end{pmatrix}_{j=1,2,3} = \begin{pmatrix} H^j \\ E^j \end{pmatrix}_{J=1,2,3}$$

aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$$curl_x H^j - \epsilon \frac{\partial E^j}{\partial t} - \sigma E^j = e_j \delta(x,t),$$

$$curl_x E^j + \mu \frac{\partial H^j}{\partial t} = 0,$$

$$H^j|_{t<0} = 0, E^j|_{t<0} = 0$$

Maxwell sistemi için Cauchy probleminin temel çözümü denir.

Böylece (5.17), (5.18) ve (5.20)'i içermesi için kullanılması sebebiyle ,

$J = e_j \delta(x,t)$ seçilirse, takip eden denklemler elde edilir.

$$H^j = \frac{1}{\mu} curl_x A^j, \tag{5.23}$$

$$E^j = -\frac{\partial A^j}{\partial t} + \phi^j, \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \phi^j}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon}\sigma\phi^j = a^2 \nabla_x div_x A^j, \quad \phi^j|_{t<0} = 0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial^2 A^j}{\partial t^2} - a^2 \Delta A^j + 2M \frac{\partial A^j}{\partial t} = \mu e_j \delta(x,t), \quad A^j|_{t<0} = 0. \tag{5.26}$$

Teorem 5.2: M matris olsun. Daha sonra Maxwell sistemi Cauchy sisteminin temel çözümü burada $A^j(x,t) = a^2\mu(\epsilon(x,t)e_j)$, formül (5.23) ve (5.24) ile verilen

$$\phi^j(x,t) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)exp(-2M(t-\tau))\nabla_x div_x A^j(x,\tau)d\tau$$

ve E telgraf vektör denklemi için Cauchy problemi temel bir çözümdür [15].

İspat: Telgraf vektör denkleminin temel çözümü kullanarak, (5.26) çözümü aşağıdaki formül ile temsil edilebilir.

$$A^j(x,t) = a^2\mu\epsilon(x,t)e_j, \quad j = 1,2,3.$$

$$\phi^j(x,t) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)exp(-2M(t-\tau))\nabla_x div_x A^j(x,\tau)d\tau$$

vasıtasıyla $\phi^j(x,t), \;\; j = 1,2,3$ hesaplanır.

Son olarak H^j ve E^j den (5.23) ve (5.24) bulunabilir.

6. SONUÇ

Sabit ve fonksiyon katsayılı hiperbolik denklemler Volterra integral denklemine indirgenmiştir. Bu denklemler varlık ve teklik teoremlerini ispatlayarak yaklaşık ardışıklar ile çözülmüştür.

[15] da belirtilen Romanov'un işlem prosedürleri kullanılarak telgraf vektör denklemi ve Maxwell sistemi yapılandırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Çağlayan, M., Çelebi, O. 2002. Kısmi Diferensiyel Denklemleri. Dora Yayınları, 311sf., Bursa.

[2] Davis, H.T. 1930. The Theory of the Volterra Integral Equation of Second Kind. Indiana University Studies, 755sf., America.

[3] Evans, L.C. 1998. Partial Differential Equations. RI: American Society, 662sf., America.

[4] Işık, A. 2004. Application of the Volterra Type Integral Equations for Problem of Applied Mathematics. PhD Thesis, İzmir.

[5] Işık, A., Filiz, A. 2013. Solution of Integral equations by Method of Successive Approximations. **Pensee Journal,** 75: 135-144.

[6] Işık, A., Filiz, A. 2015. A Generalized Solution of the Cauchy Problem For Anisotropic Electrodynamic System. **Int.J.Eng.MatheComp. Science,** 1: 42-49.

[7] Işık, A., Filiz, A. 2015. Linear System of the Volterra Integral Equations with a Polar Kernel. **Asian Journal of Fuzzy and Applied Mathematics,** 3: 108-116.

[8] Kanwal, Ram P. 1996. Linear Integral Equations Theory and Technique. Academic Press, 318sf., New York.

[9] Kransnov, M. 1971. Problems and Exercises in Integral Equations. MIR Publishers, 224sf., Moscow.

[10] Lovitt, W.V. 1950. Linear Integral Equations. Dover Publications Inc., 253sf., New York.

[11] Metin, G. 2011. Sobolev'in Bulduğu Fonksiyon Hızlı Dalga Denkleminin Geliştirilmesi ve Genelleştirilmesi. Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Aydın.

[12] Sobolev, S.L. 1933. A Generalization of Krichoff's Formula. **Dokl. Akad. Nauk.,** 6: 256-262.

[13] Volterra, V. 1930. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differntial Equations. Blackie and Son, Ltd., 227sf., London and Glasgow.

[14] Yakhno, V.G. Işık, A. 2003. Volterra Integral Equation Method for Solving Some Hyperbolic Equation Problems. **Selçuk Journal of Appl. Math.,** 4: 103-112

[15] Yakhno V. Sevimlican A. 2001. Fundamental Solution Of The Cauchy Problem For An Anisotropic Electrodynamic System. **Selçuk Journal of Appl. Math.,** 2: 83-94.

[16] Zauderer, E. 1989. Partial Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley Sons, 891sf., New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Merve Öztürk
Doğum Yeri ve Tarihi	:	AYDIN, 13.11.1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Uşak Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.

İŞ DENEYİMİ

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	merveozturk@isabetokullari.com
Tarih	:	13.07.2017