T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2008-0001

DÜZENLİ OLARAK ÜRETİLEN DİZİLER İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Mehmet ALBAYRAK

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

AYDIN- 2008

İÇİNDEKİLER

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE AYDIN

Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mehmet Albayrak tarafından hazırlanan "Düzenli Olarak Üretilen Diziler İçin Tauber Tipi Teoremler" başlıklı tez, 26.11.2007 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	**Kurumu**	**İmzası**
Başkan :	Prof.Dr.Hatice Kandamar	ADÜ Fen Ed.Fak. Matematik	
Üye :	Yrd.Doç.İbrahim Çanak	ADÜ Fen Ed.Fak. Matematik	
Üye :	Yrd.Doç.Dr Sibel Paşalı Atmaca	Muğla Ünv. Fen Ed.Fak.Mat.	
Üye :			
Üye :			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ... ... sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Ünvanı, Adı Soyadı
Enstitü Müdürü

İntihal Beyan Sayfası

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Mehmet ALBAYRAK

İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜZENLİ OLARAK ÜRETİLEN DİZİLER İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Mehmet ALBAYRAK

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

Klasik Tauber teorisinin temel amaçlarından biri, Abel'in gerek koşulu yada genelleştirilmesi olarak bilinen limitin varlığından ve salınım davranışlarını kontrol eden koşullar ile ıraksaklığı kontrol edilebilen dizilerin yakınsaklığına ulaşılmasıdır. Bu koşullara Tauber koşulları ve bu tip teoremlere Tauber teoremleri denir. Stanojević tarafından tanımlanan tamsayı mertebeli kontrol modülolar ile klasik Tauber teoremleri incelenecektir. Tauber, bir dizinin klasik kontrol modülosu sıfır dizisi ise Abel'in gerek koşulundan dizinin yakınsaklığına ulaşıldığına göstermiştir. Littlewood, Tauber'in koşulundan daha zayıf olan dizinin klasik kontrol modülosunun sınırlılığı ile değiştirebileceğini göstermiştir. Sonra Schmidt yavaş salınımlı dizileri tanıtmış ve genelleştirilmiş Littlewood teoremi olarak bilinen daha genel teoremi ispatlamıştır. Dik, Karamata'nın temel toreminden yararlanarak ve Stanojević tarafından tanıtılan düzenli olarak üretilen dizi kavramını kullanarak Abel limitleme metodu için yeni Tauber tipi teoremler elde etmiş ve klasik Tauber tipi teoremleri genelleştirmiştir. Dik ve Çanak düzenli olarak üretilen dizi kavramı yardımıyla Abel limitleme metodu için klasik ve klasik olmayan yeni Tauber tipi teoremler ispatlamıştır. Çanak ve Dik verilen bir dizinin üreteçlerinin yada geri farklarının yavaş salınımlı olması durumunda dizinin hangi koşullar altında yakınsak yada altdizisel yakınsak olduğu araştırmıştır.

2008, 43 sayfa

Anahtar Sözcükler
Tauber tipi teoremler, yavaş salınımlı diziler, Abel limitleme metodu, alt dizisel yakınsak diziler, ılımlı salınımlı diziler, düzenli olarak üretilen diziler.

ABSTRACT

Master's Thesis

TAUBERIAN THEOREMS FOR REGULARLY GENERATED SEQUENCES

Mehmet ALBAYRAK

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

One of the main objectives of the classical Tauberian theory is to recover convergence of sequences, whose divergence is manageable, out of the existence of certain limits which is known as Abel's necessary condition or its generalizations, and certain additional conditions that control the oscillatory behavior. These conditions are called Tauberian conditions and this type of theorems are called Tauberian theorems. In terms of the control modulo of oscillatory behavior of integer order, introduced by Stanojević, we now summarize the classical results. Tauber proved that if the classical control modulo of a sequence is a null sequence, then one obtains convergence of sequence out of its Abel's necessary condition. Littlewood showed that Tauber's condition can be replaced by the boundedness of the classical control modulo of a sequence. Later Schmidt introduced the slowly oscillating sequences and proved the more general theorem, which is known as the generalized Littlewood theorem. Using Karamata's Hauptsatz and employing the concept of regularly generated sequences introduced by Stanojević, Dik obtained new Tauberian theorems and generalized classical Tauberian theorems for Abel limitable method. Dik ve Çanak proved classical and nonclassical Tauberian theorems for Abel limitable method by the concept of regularly generated sequences. Çanak ve Dik investigated under which conditions sequences converges or converges subsquentially, provided that its generator sequence or sequence of its backword differences is slowly oscillating.

2008,43 pages

Key Words:
Tauberian theorems, slowly oscillating sequences, Abel limitable method, subsequentially convergent sequences, moderately oscillating sequences, regularly generated sequences.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÇANAK'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca tezime degerli katkılarından dolayı sayın hocam Prof.Dr. Hatice KANDAMAR'a çok teşekkür ederim.

Bölüm 1

1. GİRİŞ

$u = \{u_n\}$ reel sayı dizisi olmak üzere Abel'in gerek koşulu olarak bilinen

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

limitini sağlayan dizi sınıfı yakınsak olan dizi sınıfından daha geniştir. Daha geniş olan bu dizi sınıfından yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için gerekli olan koşullar Tauber koşulları olarak bilinmektedir. İlk olarak böyle bir koşulu Tauber (1897) vermiştir. Tauber, Kontrol modülünün üzerine konan koşul ile Abel'in gerek koşulundan dizinin yakınsaklığını elde etmiştir. Daha sonra ki çalışmalar ise bu koşulun zayıflatılması üzerine odaklanmıştır. (Littlewood, 1911), (Hardy ve Littlewood, 1913) kontrol modülo üzerine koydukları daha genel koşullar ile de yakınsaklığın elde edilebildiğini göstermişlerdir. Sonraları bu koşulların genelleşti rilmesi sürecinde (Schmidt, 1924) yavaş salınımlılık kavramını tanıtmış ve yakınsak lığın yeniden elde edilebilmesi için daha zayıf bir koşul elde etmiş fakat daha genel koşullar ile dizinin yakınsaklığını elde ederken ispatlar gittikçe çok uzun ve karmaşık hal almıştır. (Karamata, 1930) tarafından verilen teorem hem daha önce yapılan ispatları basitleştirmiş hem daha genel koşullar bulmak için bir araç olmuştur. (Dik, 2002), Karamata'nın teoremi yardımıyla (Stanojević, 1999a) tarafından tanıtılan m. mertebeden kontrol modülünün üzerine koşullar koymuş hem yeni Tauber teoremleri elde etmiş hemde (Stanojević, 1999b) tarafından tanıtılan düzenli olarak üretilen dizi kavramı yardımı ile Abel limitleme metodu için klasik Tauber tipi teoremler genelleştirilmiştir. (Dik ve ark, 2004) düzenli olarak üretilen dizi kavramı yardımıyla Abel limitleme metodu için klasik ve klasik olmayan yeni Tauber tipi teoremler ispatlamıştır. (Çanak ve ark, 2007) verilen bir dizinin üreteçlerinin yada geri farklarının yavaş salınımlı olması durumunda dizinin hangi koşullar altında yakınsak ya da altdizisel yakınsak olduğu araştırmıştır.

Bölüm 2

2. GENEL BİLGİLER

Abel yakınsaklıktan yakınsaklığa geçiş için ilk şart Tauber tarafından verilmiştir (Tauber, 1897). Tauber şartları ile ilişkisi olan yavaş salınımlılık, ılımlı salınımlılık tanımları verilmiş, ispatlarda kullanılacak olan önemli eşitlikler gösterilmiş ve klasik Tauber teorisinin gelişiminden bahsedilmiştir.

2.1 Tanım ve Gösterimler

Klasik Tauber teorisi

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \tag{2.1}$$

limitinin var olduğu $u=\{u_n\}$ dizilerinin yakınsaklığını araştırır. (2.1)'i sağlayan tüm dizilerin sınıfını U ile gösterirsek, Klasik Tauber teorisinin temel amacı

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlayan U nun U_c alt sınıfını belirlemek olacaktır. Her yakınsak dizi (2.1)'in varlığını verir. Fakat tersi doğru değildir, örneğin $\{u_n\}=\{(-1)^n\}$ dizisi (2.1) limitini sağlar ama yakınsak değildir. Buradan (2.1)'i sağlayan dizi sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfından daha geniştir. U_c alt sınıfları $\{u_n\}\in U$ dizisi üzerine konulan ek koşullarla belirlenmiştir. $\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$, $u_{-1}=0$, $\sigma_n^{(m)}(u)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k^{(m-1)}(u)$, $\sigma_n^{(0)}(u)=u_n$, $V_n^{(m)}(\Delta u)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}V_k^{(m-1)}(\triangle u)$ ve $V_n^{(0)}(\Delta u)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\triangle u_k$ olmak üzere $\sigma_n^{(m-1)}(u)-\sigma_n^{(m)}(u)=V_n^{(m-1)}(\Delta u)$,

$m \geq 1$ ve $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$ Kronecker eşitliği bu tezde sıkça kullanacaktır. Bir $\{u_n\}$ dizisi için

$$\sigma_n^{(1)}(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0, \tag{2.3}$$

olduğundan, Kronecker eşitliğinden $\{u_n\}$ dizisi

$$u_n = V_n^{(0)}(\Delta u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k^{(0)}(\Delta u)}{k} + u_0, \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir. $\{u_n\}$ dizisinin üreteç dizisi olan $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisi üzerine şartlar koyarak (2.2)'yi sağlayan U nun U_c alt sınıfını bulabilir miyiz? Örnek olarak , (Tauber, 1897) keyfi bir $\{u_n\} \in U$ dizisi için

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty, \tag{2.5}$$

ise, (2.2) eşitliğini gerçeklendiğini gösterdi. O halde (2.5) şartı (2.2)'yi sağlayan U nun bir alt sınıfını belirtir. (2.5) şartı, $n\triangle u_n = o(1)$ şartından daha zayıftır. (Littlewood, 1911), $n\triangle u_n = o(1)$, $n \to \infty$ yerine $n\triangle u_n = O(1)$, $n \to \infty$ alarak (2.1)'in varlığından (2.2)'yi elde etti. Bununla birlikte

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty, \tag{2.6}$$

şartı bir U_c alt sınıfı elde etmeye yeterli değildir. (Stanojević, 1997), (Çanak, 1998a,b) de gösterildiği gibi

$$V_n^{(0)}(|\Delta u|) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k|\triangle u_k| = O(1), n \to \infty, \tag{2.7}$$

şartı da U_c altsınıfı elde etmeye yeter değildir. Fakat Stanojević (1997), (Çanak 1998a,b)'da gösterildiği gibi (2.7) ve

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n, \tag{2.8}$$

limitinin varlığı

$$\lim_{n} \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n, \qquad (2.9)$$

olduğunu gerektirir ve buradan da $u_n = O(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığını elde etmek için (2.7) ve (2.1)'in varlığına ek olarak, her ε pozitif sayısı ve her n pozitif tamsayısı için $n \geq n_0(\varepsilon)$, $k \in \{1, 2, 3, ..., [\delta(\epsilon).n_0(\varepsilon)]\}$ için

$$|V_{n+k}^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(0)}(\Delta u)| < \varepsilon, \qquad (2.10)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)$ ve $n_0(\varepsilon)$ sayısı var olduğu eklenildiğinde, (2.2) elde edilir. (Landau, 1910) ya ait olan bu kavram $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ 'nun yavaş salınımı olarak bilinmektedir. (2.4)'den, $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisinin sınırlı ve yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter şartın $\{u_n\}$ dizisinin yavaş salınımlı bir dizi olması gerektiği elde ederiz(İspat için (Dik, 2002) 'e bakılabilir). Daha sonra (Schmidt, 1910), $\{u_n\}$ dizisinin yavaş salınımlı olmasını aşağıdaki gibi tanımladı:

$$\lim_{N>M\to\infty, \frac{N}{M}\to 1} (u_N - u_M) = 0, \qquad (2.11)$$

ise $\{u_n\}$ dizisine yavaş salınımlı denir.

Bu tez boyunca sürekli kullanacağımız yavaş salınımın amacımıza yönelik (Stanojević, 1998)'de önerilen yeni bir tanımını vereceğiz.

Tanım 2.1

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \overline{\lim_{n}} \max_{n+1\leq k\leq [\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j| = 0$$

ise $\{u_n\}$ dizisine yavaş salınımlı denir.

Her yakınsak dizi yavaş salınımlıdır fakat karşıtı doğru değildir. Örneğin $\{u_n\} = \{\log n\}$ dizisi yavaş salınımlı olup yakınsak olmayan diziye bir örnektir.

$$\sum_{j=n+1}^{k} \triangle \log j = \sum_{j=n+1}^{k} \log \frac{j}{j-1} = \log \prod_{j=n+1}^{k} \frac{j}{j-1} = \log(\frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n+1} ... \frac{k}{k-1})$$

dir. Tanımdan dolayı, $\max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \log\frac{k}{n} = \log\frac{[\lambda n]}{n}$ bulunur. O halde

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \overline{\lim_n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k} \triangle \log j| = 0$$

olduğu gözükür. Tanımdan,

$$V_n(|\triangle u|, p) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^p|\triangle u_k|^p = O(1), n\to\infty, p>1 \tag{2.12}$$

dir. (Hardy ve Littlewood, 1913) koşulunun $\{u_n\}$ dizisinin yavaş salınımlı olmasını gerektirdiğini (İspat için Dik (2002)'e bakılabilir) görmek kolaydır.

$\{u_n\}$ dizisi yavaş salınımlı ve (2.1) varsa $\{u_n\}$ dizisi (2.2)'i sağlar. O halde $p>1$ için Hardy-Littlewood şartı U nun U_c alt sınıfını tanımlar. Ancak, $p=1$ için (2.12) Tauber şartı değildir. (Rényi, 1946), (2.1) ve $\lim_n V_n^{(o)}(|\triangle u|)$ var ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ olduğunu göstermiştir.

Hardy-Littlewood'un $p=1$ için şartından $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığına ulaşılamaz, ancak (2.7) ve $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ limitinin mevcut olması $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizisinin yakınsaklığı için bir Tauber şartı olur. (Rényi, 1946), (2.7) şartını gerçekleyen dizilerin yavaş salınımlı olmadığını göstermiştir.
$\max_{n+1\le k\le[\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j|$ gözönüne alıp, aşağıdaki hesaplamayı yapalım.

$$\begin{aligned}\max_{n+1\le k\le[\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j| &\le \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k}|\Delta u_j| \le \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\Delta u_j| = \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\frac{j|\Delta u_j|}{j}\\ &\le \frac{1}{n+1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} j|\Delta u_j| = \frac{[\lambda n]}{n+1}\frac{1}{[\lambda n]}\sum_{j=1}^{[\lambda n]} j|\Delta u_j|.\end{aligned}$$

Her iki tarafın n'ye göre üst limitini alarak ve C, (2.7)'den gelen bir sabit olmak üzere

$$\overline{\lim_n} \max_{n+1\le k\le[\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k}\Delta u_j| \le \overline{\lim_n}\frac{[\lambda n]}{n+1}\overline{\lim_n}\frac{1}{[\lambda n]}\sum_{j=1}^{[\lambda n]} j|\Delta u_j| \le C\lambda < \infty$$

elde ederiz. Sonuç olarak Hardy-Littlewood şartının özel durumu bizi aşağıdaki tanımı yapmaya motive eder.

Tanım 2.2 $\lambda > 1$ *olmak üzere*

$$\overline{\lim_{n}} \max_{n+1\leq k\leq[\lambda n]} |\sum_{j=n+1}^{k} \Delta u_j| < \infty$$

ise $\{u_n\}$ *dizisine ılımlı salınımlı denir.*

Ilımlı salınımlı olup yavaş salınımlı olmayan diziye örnek olarak

$$u_n = \begin{cases} -1, & k = 2^n + 1,\ n = 1, 2, ...; \\ 1, & k = 2^n,\ n = 1, 2, ...; \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

dizisi verilebilir.

$\{u_n\}$ dizisinin ılımlı salınımlı olması durumunda genelde (2.2)'yi elde edemeyiz. Bununla birlikte $\{u_n\}$ dizisinin altdizisel davranışına dair bilgi edinilebilir. $\lambda > 1$ için $\{u_n\}$ dizisinin de la Vallée Poussin ortalaması

$$\tau_{n,[\lambda n]} = \tau_n(\lambda, u) = \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k$$

ile tanımlanır.

$\lambda > 1$ için

$$u_n = \tau_{n,[\lambda n]} - \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} (u_k - u_n) = \tau_{n,[\lambda n]} - \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k} \triangle u_j$$

yazılabileceğinden, eşitliğin sağ tarafına $\sigma_n^{(1)}(u)$ eklenip çıkartılırsa,

$$u_n = \tau_{n,[\lambda n]} - \sigma_n^{(1)}(u) + \sigma_n^{(1)}(u) - \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k} \triangle u_j$$

elde edilir.

$$([\lambda n] + 1)\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - (n + 1)\sigma_n^{(1)}(u) = \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k$$

ifadesinden

$$\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} u_k = \tau_{n,[\lambda n]} = \frac{([\lambda n]+1)\sigma^{(1)}_{[\lambda n]}(u)-(n+1)\sigma^{(1)}_n(u)}{[\lambda n]-n}$$

bulunur ve sonuçta

$$\tau_{n,[\lambda n]} - \sigma^{(1)}_n(u) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma^{(1)}_{[\lambda n]}(u)-\sigma^{(1)}_n(u))$$

elde edilir.

$$u_n = \tau_{n,[\lambda n]} - \sigma^{(1)}_n(u) + \sigma^{(1)}_n(u) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\triangle u_j$$

eşitliğinde $\tau_{n,[\lambda n]} - \sigma^{(1)}_n(u)$ değerine eşit olan ifade konursa

$$u_n = \sigma^{(1)}_n(u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma^{(1)}_{[\lambda n]}(u)-\sigma^{(1)}_n(u)) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\triangle u_j \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir.

$1<\lambda<2$ için $\{u_n\}$ dizisinin

$$\tau_{n-[(\lambda-1)n],n} = \tau_{n-[(\lambda-1)n],n}(u) = \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} u_k$$

de la Vallée Poussin ortalamasını gözönüne alalım.

$1<\lambda<2$ için $n-[(\lambda-1)n]<n$ olduğuna dikkat edelim. Tanımdan

$$\begin{aligned} u_n &= \tau_{n-[(\lambda-1)n],n} + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n}(u_n-u_k) \\ &= \tau_{n-[(\lambda-1)n],n} + \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\triangle u_j \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\frac{(n+1)\sigma^{(1)}_n(u)-(n-[(\lambda-1)n])\sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u)}{[(\lambda-1)n]+1} = \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} u_k$$

ve

$$\tau_{n-[(\lambda-1)n],n} - \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) =$$

$$= \frac{(n+1)\sigma^{(1)}_n(u) - (n-[(\lambda-1)n] + [(\lambda-1)n]+1)\sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u)}{[(\lambda-1)n]+1}$$

$$= \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(\sigma^{(1)}_n(u) - \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u))$$

eşitlikleri $\{u_n\}$ nin de la Vallée Poussin ortalamasından kolayca elde edilir. Sonuçta,

$$\begin{aligned} u_n &= \tau_{n-[(\lambda-1)n],n} - \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) + \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) \\ &+ \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \triangle u_j \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} u_n &= \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) - \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(\sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) - \sigma^{(1)}_n(u)) \\ &+ \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \triangle u_j \end{aligned} \tag{2.14}$$

bulunur.

2.2 Klasik Tauber Teorisinin Kısa Bir Özeti

Bu kısımda Abel yakınsaklıktan yakınsaklığa geçiş için Tauber teoremleri ispat edildi (Tauber, 1897) ve Karamata'nın temel sonucu tanıtılıp, Karamata'nın temel sonucu yardımıyla genelleştirilmiş Littlewood teoremi ve Hardy-Littlewood ispatları verildi. Klasik Tauber teorisinde amaç $\{n\triangle u_n\}$ üzerine şartlar koyarak (2.2) eşitliğini sağlayan U nun U_c altsınıfını belirlemektir. Örnek olarak, $\{u_n\} \in U$ için

$$n\triangle u_n = o(1), n \to \infty \tag{2.15}$$

koşulu

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

gerektirir. Bu orijinal (Tauber, 1987) teoreminin bir sonucudur. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \triangle u_k x^k = s$ olmak üzere her $n > N$ için

$$|n \triangle u_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |k \triangle u_k| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.17}$$

ve

$$|\sum_{k=0}^{\infty} \triangle u_k (1 - \frac{1}{n})^k - s| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.18}$$

olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı seçebiliriz.

Her $n > N$ ve $x < 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \triangle u_k - s = \sum_{k=0}^{\infty} \triangle u_k x^k - s + \sum_{k=1}^{n} \triangle u_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \triangle u_k x^k$$

farkını inceleyelim. $1 - x^k = (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{k-1}) \leq k(1-x)$, $|\triangle u_k| = \frac{|k \triangle u_k|}{k} < \frac{\varepsilon}{3k}$, olduğu gözönüne alarak $(0, 1)$ aralığındaki her x için

$$|\sum_{k=0}^{n} \triangle u_k - s| \leq |\sum_{k=0}^{\infty} \triangle u_k x^k - s| + (1-x) \sum_{k=1}^{n} |k \triangle u_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1-x)}$$

elde ederiz. $x = 1 - \frac{1}{n}$ seçerek her $n > N$ için $|\sum_{k=0}^{n} \triangle u_k - s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ sonucuna ulaşırız.

(2.15) in bir genelleştirilmesi (Tauber, 1897) tarafından verilmiştir. Tauber keyfi bir $\{u_n\} \in U$ dizisi için

$$V_n^{(0)}(\triangle u) = o(1), n \to \infty, \tag{2.19}$$

ise (2.2) eşitliğinin gerçeklendiğini göstermiştir. İspatı aşağıda gibidir:

$v_n = \sum_{k=1}^{n} k\triangle u_k = (n+1)V_n^{(0)}(\triangle u)$ yazılırsa,

$$(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{k+1}x^k - \frac{v_n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k(k+1)}(x^k-1) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{v_k}{k(k+1)}x^k$$

$$= \frac{\triangle u_1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty}(\frac{v_k}{k+1} - \frac{v_{k-1}}{k})x^k - \frac{v_n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{k(k+1)}x^k$$

$$= \frac{\triangle u_1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+1)(v_k - v_{k-1}) - v_k}{k(k+1)}x^k - \frac{v_n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{k(k+1)}x^k$$

$$= \frac{\triangle u_1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty}\triangle u_k x^k + \frac{\triangle u_1}{2}x - \frac{v_n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\triangle u_k x^k - \frac{v_n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} v_k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\triangle u_k x^k - \frac{v_n}{n+1} - \triangle u_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{v_{k+1} - v_k}{k+1} + \frac{v_n}{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\triangle u_k x^k - \triangle u_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\triangle u_{k+1}(k+1)}{(k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1}\triangle u_k$$

elde ederiz. Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k x^k - \sum_{k=0}^{n}\triangle u_k = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{k+1}x^k - \frac{v_n}{n+1} \qquad (2.20)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{k(k+1)}(x^k-1) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{v_k}{k(k+1)}x^k$$

eşitliği bulunur. Genelliği bozmaksızın $\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k x^n = 0$ kabul edelim. $n\to\infty$ için $v_n = o(n)$ ve $|x^k - 1| \leq (1-x)k$ olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için C, (2.19)'dan gelen bir sabit olmak üzere, öyle bir $N = N(\varepsilon)$ vardır ki $n \geq N(\varepsilon)$ için $|\sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k x^k - \sum_{k=0}^{n}\triangle u_k|$

$$\leq C(1-x)\sum_{k=1}^{N}x^k + \varepsilon(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}x^k + \varepsilon + C(1-x)N + \varepsilon n(1-x) + \frac{\varepsilon}{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}x^k$$

$$\leq 2C(1-x)N + 2\varepsilon + n(1-x)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{(1-x)(1+n)}$$

olduğu (2.20)'dan elde edilir. $1-x=\frac{1}{n}$ seçerek

$$|\sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k(1-\frac{1}{n})^k-\sum_{k=0}^{n}\triangle u_k|\leq\frac{2NC}{n}+4\epsilon$$

elde edilir. $\lim_n\sum_{k=0}^{\infty}\triangle u_k(1-\frac{1}{n})^k=0$ olduğundan $\overline{\lim_n}|\sum_{k=0}^{n}\triangle u_k x^k|\leq 4\varepsilon$ olur, ε yeterince küçük seçilebildiğinden, $\lim_n\sum_{k=0}^{n}\triangle u_k=0$ elde ederiz.

Orijinal Tauber teoreminden sonra $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığı elde edilebilmesi için çok önemli genelleştirmeler elde edilmiştir. Bunlardan biride (Littlewood, 1911)'un sonucudur.

Teorem 2.1 *Littlewood (1911)* $\{u_n\}\in U$ *olsun.*

$$n\triangle u_n=O(1),n\to\infty, \tag{2.21}$$

ise $\lim_n u_n=\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ *dir.*

Hardy-Littlewood (1913) (2.21)'nin bir genelleştirilmesi olan

$$V_n(|\triangle u|,p)=O(1),p>1 \tag{2.22}$$

(2.22) denkleminin bir Tauber şartı olabileceğini tahmin etti. (Szasz, 1928), Hardy-Littlewood varsayımını ispatladı. Bununla beraber Szasz'ın ispatı çok uzun ve karışıktır. Landau'nun yavaş salınım tanımı (Landau, 1910) kullanılarak ispat (2.22) şartının $\{u_n\}$ dizisinin yavaş salınımlı olması gerektiğini göstererek verilebilir. (Schmidt, 1910), $\{u_n\}$ yavaş salınımlı ve $\{u_n\}\in U$ kabul ederek, genel Tauber teoremini ispat etmeye çalıştı. (Vijayaraghavan, 1926), genelleştirilmiş Littlewood teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi ispat etti.

Teorem 2.2 *(Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi)* $\{u_n\}\in U$ *olsun.* $\lim_{N>M\to\infty,\frac{N}{M}\to 1}(u_N-u_M)=0$ *ise* $\lim_n u_n=\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ *dir.*

$p = 1$ için Hardy-Littlewood şartı hariç (2.15), (2.21), (2.22) koşulları yavaş salınımın özel bir halidir. (Landau, 1910), $\{u_n\}$ dizisinin salınım hareketinin, $\{n\triangle u_n\}$ dizisinin tek taraflı sınırlılığı ile kontrol edilebileceğini gösterdi. Her n pozitif tamsayısı için $n\triangle u_n \geq -C$ olacak şekilde bir $C > 0$ varsa $\{n\triangle u_n\}$ dizisine tek taraflı sınırlı denir.

Teorem 2.3 *(Landau, 1910) $\{u_n\}$ reel dizisi için $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ mevcut olsun. Her n pozitif tamsayısı için*

$$n\triangle u_n \geq -C \tag{2.23}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ var ise $\lim_n u_n = \lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ dir.

(Hardy ve Littlewood, 1913), (2.1) limitinin mevcut olmasının ve (2.23) koşulunun (2.2)'i gerektirdiğini göstererek, Teorem 2.3'ü genelleştirmişlerdir.

Karamata 'nın temel teoreminin sonucu (Karamata, 1930) klasik Tauber teoremlerinin bir çok genelleştirmelerinin yapılmasına yol açmıştır.

Teorem 2.4 *(Karamata, 1930) $\{u_n\}$ reel dizisi için (2.1) mevcut olsun. Her n pozitif tamsayısı ve bir $C > 0$ için $u_n \geq -C$ ise*

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \tag{2.24}$$

dir.

(Vijayaraghavan, 1926)'da verilen genelleştirilmiş Littlewood teoreminin ispatı çok uzun ve karışıktır. İspat, Karamata 'nın temel teoreminin sonucundan yararlanarak daha kısa ve açık bir hal alır.

Teorem 2.5 *(Karamata'nın temel teoreminin sonucu) $\{B_n\}$ reel dizi için*

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = 0 \tag{2.25}$$

olsun. Her n pozitif tamsayısı için ve bir $C > 0$, $B_n \geq -C$ ise $\lim_n \sigma_n^{(1)}(B) = 0$ *dır.*

Şimdi genelleştirilmiş Littlewood teoreminin ispatını verebiliriz.

İspat $\{u_n\}$ yavaş salınımlı olduğundan, $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ sınırlı ve yavaş salınımlıdır. $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ sınırlı olduğundan her n pozitif tamsayısı için $V_n^{(0)}(\triangle u) \geq -C$ olacak şekilde bir $C > 0$ vardır. (2.1) in varlığından

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n,$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\triangle u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(u_n - \sigma_n^{(1)}(u))x^n = 0$$

elde edilir. $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ dizisine Karamata'nın temel teoreminin sonucu uygulanırsa

$$\sigma_n^{(1)}(V^{(0)}(\triangle u)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} V_k^{(0)}(\triangle u) = V_n^{(1)}(\triangle u) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ dizisi yavaş salınımlı ve $(C,1)$ toplanabilir olduğundan ve (2.13) eşitliğinden $V_n^{(0)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$ elde edilir.

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = n(\sigma_n^{(2)}(u) - \sigma_{n-1}^{(2)}(u)) = V_n^{(1)}(\triangle u)$$

eşitliğini kullanarak $\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ ve sonuç olarak ise $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ un var olduğunu elde ederiz. $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$ Kronecker eşitliğinden de

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

elde ederiz. Benzer şekilde Karamata'nın temel teoreminin sonucundan faydalanarak Hardy-Littlewood teoreminin ispatını verebiliriz.

Teorem 2.6 *(Hardy ve Littlewood, 1913)* $\{u_n\}$ *reel dizisi için, (2.1) mevcut olsun. Her* n *pozitif tamsayısı ve bir* $C \geq 0$ *için* $n\triangle u_n \geq -C$ *ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

İspat $\{n\triangle u_n\}$ tek taraflı sınırlı olduğundan, her n pozitif tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ dir. (2.1)'in varlığından $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = 0$ elde edilir. Karamata'nın temel teoreminin bir sonucu ile $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. $\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = n\triangle\sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u)$ eşitliğinden $n\triangle\sigma_n^{(2)}(u) = o(1)$,$n \to \infty$ elde edilir. Orijinal Tauber teoreminin bir sonucu ile $\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir ve buradan sonuç olarak $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ olduğundan $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ nun var olduğu bulunur. Teoremin ispatının devamı için önceki bölümde verilmiş olan aşağıdaki eşitliklere ihtiyaç duyulacak.

$\lambda > 1$ için

$$\text{(i) } u_n = \sigma_n^{(1)}(u) + \tfrac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \tfrac{1}{[\lambda n]-n}\textstyle\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}\triangle u_j$$

ve

$1 < \lambda < 2$ için

$$\begin{aligned}(ii)u_n =&\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(u) - \frac{n+1}{[(\lambda-1)n]+1}(\sigma_{n-[(\lambda-1)n]-1}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))\\ &+ \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1}\sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n}\ \sum_{j=k+1}^{n}\triangle u_j.\end{aligned}$$

(i) eşitliğinden

$$\overline{\lim_n} u_n \leq \overline{\lim_n}\sigma_n^{(1)}(u) + \frac{\lambda}{\lambda-1}\overline{\lim_n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) + \overline{\lim_n}\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(-\triangle u_j)$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte sağ taraftaki ikinci terim sıfırdır. Her j pozitif tamsayısı için $-\triangle u_j \leq \frac{C}{j}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n} u_n &\leq \overline{\lim_n} \sigma_n^{(1)}(u) + \overline{\lim_n} \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{C}{j} \\
&\leq \overline{\lim_n} \sigma_n^{(1)}(u) + C \overline{\lim_n} \max_{n+1 \leq k \leq [\lambda n]} \sum_{j=n+1}^{k} \frac{1}{j} \\
&\leq \overline{\lim_n} \sigma_n^{(1)}(u) + C \overline{\lim_n} \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} \frac{1}{j} \\
&\leq \overline{\lim_n} \sigma_n^{(1)}(u) + C \log \lambda.
\end{aligned}$$

Buradan $\lim_{\lambda \to 1^+} \overline{\lim}_n u_n \leq \lim_{\lambda \to 1^+} \overline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u)$ bulunur ve sonuç olarakda $\overline{\lim}_n u_n \leq \overline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u)$ elde edilir.

(ii) eşitliği ile

$$\underline{\lim}_n u_n \geq \underline{\lim}_n \sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) - \frac{1}{\lambda - 1} \underline{\lim}_n (\sigma^{(1)}_{n-[(\lambda-1)n]-1}(u) - \sigma_n^{(1)}(u))$$

$+\underline{\lim}_n \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \triangle u_j$ elde ederiz. $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ var olduğundan sağ yanın ikinci terimi sıfır olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_n u_n &\geq \underline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u) + \underline{\lim}_n \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} (-\frac{C}{j}) \\
&\geq \underline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u) - C \overline{\lim}_n \frac{1}{[(\lambda-1)n]+1} \sum_{k=n-[(\lambda-1)n]}^{n} \frac{1}{k} \\
&\geq \underline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u) - C \log \lambda
\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuçta, $\underline{\lim}_n u_n \geq \underline{\lim}_n \sigma_n^{(1)}(u)$ elde ederiz. Elde edilen sonuçlar birleştirilerek

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) \leq \underline{\lim}_n u_n \leq \overline{\lim}_n u_n \leq \lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$$

bulunur ve buradan da

$$\lim_n u_n = \lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$$

olduğu görülür.

Bölüm 3

3. DÜZENLİ OLARAK ÜRETİLEN DİZİLER İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde, düzenli olarak üretilmiş dizi kavramı yardımıyla Abel limitleme metodu için klasik Tauber tipi teoremler genelleştirildi. Düzenli üretilen dizi kavramında $\{B_n\}$ üreteç dizisinin yavaş salınımlı ve sınırlı yada yavaş salınımlı alınması durumunda Tauber şartı olduğu, sadece sınırlı alınması durumunda dizinin altdizisel yakınsaklıklığının elde edildiği gösterildi. Fakat düzenli üretilen dizi sınıfını genişlettiğimizde $\{B_n\}$ sınırlı iken Tauber şartı olduğu gösterildi.

3.1 Tanım

L herhangi bir lineer uzay ve B, L nin $\{B_n\}$ dizilerinin bir sınıfı olsun. Her n pozitif tamsayısı için

$$u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$$

ile tanımlanan dizileri ihtiva eden U(B) sınıfı, B sınıfı tarafından düzenli olarak üretilen $\{u_n\}$ dizilerinin sınıfıdır (Stanojević, 1999b).

Örnek olarak, B tüm sınırlı ve yavaş salınımlı reel dizilerin sınıfı ise $U(B)$ yavaş salınımlı dizilerin sınıfıdır. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ mevcutsa $\{u_n\} \in U(B)$ dizisi yakınsaktır. Bu ispat, Karamata'nın temel teoreminin sonucu ile daha kısa bir şekilde verilir. $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$, $n \to \infty$, olduğundan her n pozitif tamsayı için $V_n^{(0)}(\Delta u) \geq -C$ olacak şekilde bir $C > 0$ vardır. (2.1) den

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\Delta u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(u_n - \sigma_n^{(1)}(u))x^n = 0. \qquad (3.1)$$

Karamata'nın temel teoreminin sonucu $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ dizisine uygulanırsa,

$$\sigma_n^{(1)}(V^{(0)}(\Delta u)) = V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

bulunur. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlı olduğundan

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= V_n^{(1)}(\Delta u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(V_{[\lambda n]}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &- \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k} \triangle V_j^{(0)}(\Delta u), \lambda > 1 \end{aligned}$$

eşitliğinden $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. Böylece

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = n\triangle\sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

elde edilir. O halde buradan orijinal Tauber teoreminin sonucunun kullanılması ile $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir ve elde edilenlerin sonucu olarak $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.
Eğer B yavaş salınımlı dizilerin sınıfı ise $U(B)$ sınıfındaki diziler yavaş salınımlı değildir ve $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ varlığının mevcut olduğu kabul edilirse $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ dir. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlı olduğun dan $V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1)$, $n \to \infty$, yani

$$n\triangle V_n^{(1)}(\Delta u) = O(1), n \to \infty \qquad (3.2)$$

dir. (2.15)'den

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\Delta u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u))x^n = 0 \qquad (3.3)$$

dir. Burada $\{n\triangle V_n^{(1)}(\Delta u)\}$'nın tek taraflı sınırlı olduğunu kullanamayız çünkü $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u))x^n$'nın mevcut olup olmadığını bilmiyo ruz. (3.2) ve (3.3)'den Littlewood teoremi ile $V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1)$ elde edilir. (3.2)'den de $V_n^{(0)}(\Delta u) = O(1)$, $n \to \infty$ olduğu bulunur.

$$\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u) = V_n^{(1)}(\Delta u) = o(1), n \to \infty$$

olduğundan $\lim_n \sigma_n^{(2)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n$ elde edilir. Sonuç olarak, $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n$ elde edilir. Önceki sonuçtan ispatın kalan kısmı açıktır.

İkinci olarak, Çanak teoremi olan (Çanak, 1998a) kullanılarak da ispat yapmak mümkündür. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\}$ yavaş salınımlı olduğundan $\{u_n\}$ ve $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizileri de yavaş salınımlıdır. Genelleştirilmiş Littlewood teoreminden yararlanarak

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n$$

elde ederiz. $\{u_n\}$ yavaş salınımlı ve (C,1) toplanabilir olduğundan, $\lambda > 1$ için

$$u_n = \sigma_n^{(1)}(u) + \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}(\sigma_{[\lambda n]}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{j=n+1}^{k}(u_j - u_{j-1})$$

eşitliğini kullanarak $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n$ elde ederiz.

B sınıfı tarafından düzenli olarak üretilen $\{u_n\}$ dizilerinin U(B) sınıfını incelemeye devam ederek bununla ilgili olarak Tauber teoremlerini ispat edeceğiz. Örneğin, B sınırlı dizilerinin bir sınıfı olmak üzere U(B) sınıfındaki $\{u_n\}$ dizileri için $\{u_n\}$ nin sadece altdizisel yakınsaklığını elde ederiz.

Tanım 3.1 *$\{u_n\}$ reel sayıların dizisi olsun. $\{u_n\}$ dizisinin tüm yığılma noktaları I(u) da olmak üzere sonlu bir I(u) aralığı mevcut ve I(u) aralığının her noktası $\{u_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası ise $\{u_n\}$ dizisine altdizisel yakınsak dizi denir.*

Teorem 3.1 *$\{u_n\}$ reel dizisi için $\triangle V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ ve (2.8) mevcut olsun. Eğer B, sınırlı $\{B_n\}$ dizilerinin bir sınıfı olmak üzere $\{u_n\} \in U(B)$ ise $\{u_n\}$ altdizisel yakınsaktır.*

İspat $\{u_n\} \in U(B)$ ise, sınırlı bir $\{B_n\}$ dizisi ve her pozitif n tamsayısı için

$$u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} \tag{3.4}$$

dir.
(3.4)'den $\Delta u_n = u_n - u_{n-1} = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} - B_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k} = B_n - B_{n-1} + \frac{B_n}{n}$ ve $n\Delta u_n = n(B_n - B_{n-1}) + B_n = n\triangle B_n + B_n$ elde edilir. Son eşitliğin (C,1) ortalaması alınarak

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\triangle B_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} B_k \\ &= V_n^{(0)}(\Delta B) + \sigma_n^{(1)}(B) \\ &= B_n \end{aligned}$$

elde edilir. $\{B_n\}$ dizisinin sınırlılığından $V_n^{(0)}(\triangle u) = O(1)$, $n \to \infty$ ve

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\triangle u) = O(1), n \longrightarrow \infty \tag{3.5}$$

yada

$$n\triangle\sigma_n^{(1)}(u) = O(1), n \to \infty \tag{3.6}$$

elde edilir. Littlewood teoremini uygulayarak (2.8) ve (3.6),

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.7}$$

gerektirir. (3.5) ve (3.7)'den, $u_n = O(1)$ bulunur. $\triangle V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$ varsayımı ve (3.7)'den $\triangle u_n = o(1)$, $n \longrightarrow \infty$ olur ki bu da $\{u_n\}$ dizisinin altdizisel yakınsak olduğu sonucunu verir.
Eğer $\{B_n\}$ üreteç dizisi ılımlı salınımlı ise bir üstteki teoremin bir genelleştirilmesi elde edilir.

Teorem 3.2 *$\{u_n\}$ reel dizisi için $\triangle V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$, $n \to \infty$, ve (2.8) mevcut olsun. Eğer, B' ılımlı salınımlı $\{B_n\}$ dizilerinin sınıfı olmak üzere $\{u_n\} \in U(B')$ ise $\{u_n\}$ altdizisel yakınsaktır.*

İspat $\{u_n\} \in U(B')$ olduğundan bir $\{B_n\}$ ılımlı salınımlı dizisi ve her pozitif n tamsayıları için

$$u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$$

dir. Bu gösterimden $V_n^{(0)}(\triangle u) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\triangle u_k = B_n$ elde ederiz. $\{B_n\}$ ılımlı salınımlı olduğundan, $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ ılımlı salınımlıdır ve

$$V_n^{(0)}(\triangle u) - V_n^{(1)}(\triangle u) = O(1), n \to \infty, \tag{3.8}$$

ya da

$$n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) = O(1), n \to \infty, \tag{3.9}$$

elde edilir. Hipotezde verilen(2.8) limitinin var olmasından

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)}(\triangle u)x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u))x^n = 0 \tag{3.10}$$

bulunur. Littlewood teoreminin uygulayarak, (3.9) ve (3.10)'dan

$$V_n^{(1)}(\triangle u) = o(1), n \to \infty \tag{3.11}$$

bulunur. (3.8) ve (3.11)'den $V_n^{(0)}(\triangle u) = O(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.1'deki gibi yapılır.

3.2 Düzenli Olarak Üretilen Diziler İçin Tauber Tipi Teoremler

Bu bölümün girişinde düzenli olarak üretilen dizilerin tanımı verildi ve ilgili Tauber teoremleri ispat edildi. Daha önce tanımladığımız U(B) sınıfını genişleterek düzenli olarak üretilmiş dizilerin çalışmasına devam edeceğiz. Önceki kesimde L herhangi bir lineer uzay ve B, L nin $\{B_n\}$ dizilerinin bir sınıfı olsun. Şimdi, aşağıdaki gibi yeni bir $U(B^*)$ sınıfı tanımlayacağız (Stanojević, 1999b).

Tanım 3.2 *B^* sınıfı, $\{B_n\} \in B$ ve her n pozitif n tamsayısı için*

$$B_n^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$$

şeklinde yazılabilen $\{B_n^*\}$ dizilerinin bir sınıfı olsun. $U(B^*)$ sınıfı B^* tarafından üretilen bütün düzenli olarak üretilmiş dizilerin sınıfıdır. Yani $\{B_n^*\} \in B^*$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$u_n = B_n^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k^*}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{B_j}{j}}{k} \tag{3.12}$$

ile tanımlanan dizileri içeren $U(B^*)$ sınıfı, B^* tarafından düzenli olarak üretilen $\{u_n\}$ dizilerinin sınıfıdır.

Şimdi bu sınıf için Tauber teoremleri verilmeye devam edilecektir.

Teorem 3.3 *(1.1) mevcut olsun. Eğer $\{u_n\} \in U(B^*)$ ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n. \tag{3.13}$$

İspat (3.12) gösteriminden

$$\begin{aligned}
n \triangle u_n &= n(u_n - u_{n-1}) \\
&= n(B_n^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k^*}{k} - B_{n-1}^* - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k^*}{k}) \\
&= n(B_n^* - B_{n-1}^* + \frac{B_n^*}{n}) = n(\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}}{n}) \\
&= n(\frac{B_n}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}}{n}) \\
&= B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}
\end{aligned}$$

elde edilir, ve eşitliğin her iki tarafının aritmetik ortalaması alınırsa $V_n^{(0)}(\triangle u) = \sigma_n^{(1)}(B) + \sigma_n^{(1)}(B^*)$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} n\triangle u_n - V_n^{(0)}(\triangle u) &= B_n - \sigma_n^{(1)}(B) + B_n^* - \sigma_n^{(1)}(B^*) \\ &= B_n - \sigma_n^{(1)}(B) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\triangle B_k^* \\ &= B_n - \sigma_n^{(1)}(B) + \sigma_n^{(1)}(B) = B_n \end{aligned}$$

elde edilir. $\{B_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan

$$n\triangle u_n - V_n^{(0)}(\triangle u) = n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) = O(1), n \to \infty \tag{3.14}$$

dir. Sonuç olarak orijinal Tauber teoremi ile $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir. U(B) sınıfı, $U(B^*)$ içinde olduğu kolayca görülür.

3.3 Düzenli Olarak Üretilen Diziler İçin Klasik ve Klasik Olmayan Tauber Tipi Teoremler

L herhangi bir lineer uzay ve B, L nin $\{B_n\}$ dizilerin sınıfı olsun. Her n pozitif tamsayısı için

$$u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$$

ile tanımlanan dizileri ihtiva eden U(B) sınıfı, önceki bölümlerde tanımlanmıştı. Şimdi bu sınıf için Tauber teoremleri verilmeye devam edilecektir.

Teorem 3.4 $\{u_n\}$ *reel dizi olsun.*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.15}$$

mevcut olsun. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\} \in U(B)$ *ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.16}$$

dir.

İspat $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\} \in U(B)$ olduğundan bir $(B_n) \in B$ için $V_n^{(0)}(\Delta u) = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$. Buradan $n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) - \sigma_n^{(1)}(n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u)) = n\triangle B_n$ elde edilir. Sonuç olarak

$$n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) = n\triangle(V_n^{(0)}(\triangle u) - V_n^{(1)}(\triangle u)) = n\triangle B_n \quad (3.17)$$

olduğu görülür. (3.17)'nin aritmetik ortalaması alınırsa

$$n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(2)}(\triangle u) = V_n^{(0)}(\triangle B)$$

elde edilir.$\{B_n\}$ dizisi yavaş salınımlı olduğundan $\{V_n^{(0)}(\triangle B)\}$ yavaş salınımlı ve sınırlıdır. Böylece

$$n\triangle(V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u)) = O(1), n \to \infty \quad (3.18)$$

bulunur. (3.15)'in varlığından dolayı,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u))x^n = 0 \quad (3.19)$$

dir. Böylece Littlewood (1911) teoremini uygulayarak, (3.18) ve (3.19)'dan

$$V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u) = n\triangle V_n^{(2)}(\triangle u) = o(1), n \to \infty \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.15)'den dolayı

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(2)}(\triangle u)x^n = 0, \quad (3.21)$$

olduğu bulunur. Orijinal Tauber teoremini uygulayarak, (3.20) ve (3.21)'den dolayı da $V_n^{(2)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. $\{V_n^{(1)}(\triangle u)\}$ ve $\{V_n^{(2)}(\triangle u)\}$ dizilerinin limitleri sıfır olduğundan yavaş salınımlı dizilerdir. $n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(2)}(\triangle u) = V_n^{(0)}(\triangle B)$ eşitliğinden dolayı $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ dizisi yavaş salınımlı olduğu bulunur. $V_n^{(1)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$, ve $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ yavaş salınımlı olduğundan (2.13) eşitliğinden dolayı $V_n^{(0)}(\triangle u) = o(1)$ elde edilir. $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = n\triangle\sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$ olacağından sonuç olarak,

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n, \quad (3.22)$$

dir.

Sonuç 3.1 *$\{u_n\}$ reel dizi olsun.*

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.23}$$

mevcut olsun. $\{u_n\}\in U(B)$ ise

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \tag{3.24}$$

dir.

İspat Hipotezden $\{u_n\}\in U(B)$ ve $\{B_n\}\in B$ olduğundan $u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k}$ şeklindedir. Bu yazılımdan $\{B_n\}\in B$ için $V_n^{(0)}(\triangle u) = V_n^{(0)}(\triangle B) + \sum_{k=1}^{n}\frac{V_k^{(0)}(\triangle B)}{k}$ elde edilir. $\{B_n\}\in B$ için $\{V_n^{(0)}(\triangle B)\}\in B$ olduğundan $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}\in U(B)$ bulunur.

Sonuç 3.2 *(Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi) (2.1) mevcut olsun. $u=\{u_n\}$ yavaş salınımlı ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n \tag{3.25}$$

dir.

İspat (2.1)'in varlığından $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ limiti vardır. $u=\{u_n\}$ yavaş salınımlı olduğundan $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ yavaş salınımlıdır. $u_n = V_n^{(0)}(\triangle u) + \sum_{k=1}^{n}\frac{V_k^{(0)}(\triangle u)}{k}$ olduğundan $\{u_n\}\in U(B)$ elde edilir.
Teorem 3.4'de $\{B_n\}$ sınırlı olduğu kabul edilirse, o zaman $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ sınırlı olur. (2.8)'in varlığı veya $\{u_n\}$ dizisinin Abel limitlenebilir olmasından $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığı elde edilemez. Ancak $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n$ elde edilir. Bu durum önceki bölümdeki gibi aynı $U(B^*)$ sınıfı tanımlarız. Şimdi $U(B^*)$ sınıfı ile Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 3.5 *$\{u_n\}$ reel dizisi için (2.8) mevcut olsun. $\{V_n^{(0)}(\Delta u)\} \in U(B^*)$ ise*

$$\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)x^n \qquad (3.26)$$

dir.

İspat Hipotezden $V_n^{(0)}(\Delta u) = \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{B_j}{j}}{k}$ olduğundan $n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) - \sigma_n^{(1)}(n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u)) = B_n$ elde edilir. Son eşitliği

$$n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) = n\triangle(V_n^{(0)}(\triangle u) - V_n^{(1)}(\triangle u)) = B_n \qquad (3.27)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. (3.27) eşitliğin aritmetik ortalaması alınırsa

$$n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(2)}(\triangle u) = n\triangle(V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u)) = \sigma_n^{(1)}(B)$$

elde edilir. $\{B_n\}$ ılımlı salınımlı olduğundan

$$\{\sigma_n^{(1)}(B)\} = \{n\triangle V_n^{(1)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(2)}(\triangle u)\} = \{n\triangle(V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u))\}$$

yavaş salınımlıdır. O halde

$$n\triangle(V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u)) - n\triangle(V_n^{(2)}(\triangle u) - V_n^{(3)}(\triangle u)) = O(1), n\to\infty$$

elde edilir ve

$$n\triangle[V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u)) - (V_n^{(2)}(\triangle u) - (V_n^{(3)}(\triangle u))] = O(1), n\to\infty \qquad (3.28)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.8) in varlığından

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}[V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u) - (V_n^{(2)}(\triangle u) - V_n^{(3)}(\triangle u))]x^n = 0 \qquad (3.29)$$

dir. Littlewood teoremini uygulayarak, (3.28) ile (3.29)'den

$$\begin{aligned} V_n^{(1)}(\triangle u) - V_n^{(2)}(\triangle u) - (V_n^{(2)}(\triangle u) - V_n^{(3)}(\triangle u)) &= n\triangle(V_n^{(2)}(\triangle u) - V_n^{(3)}(\triangle u)) \\ &= o(1), n\to\infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak ,Teorem (3.4)'ün ispatındaki gibi $\{V_n^{(1)}(\triangle u)\}$, $\{V_n^{(2)}(\triangle u)\}$, $\{V_n^{(3)}(\triangle u)\}$ dizileri yavaş salınımlı olur, çünkü limitleri sıfırdır. Böylece $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ yavaş salınımlı bulunur. $V_n^{(1)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$ ve $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ yavaş salınımlı olduğundan $V_n^{(0)}(\triangle u) = o(1)$, $n \to \infty$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.5'de $\{B_n\}$ dizisinin sınırlı yada yavaş salınımlı alınması halinde $\{u_n\}$ nin Abel limitlenebilmesinden yada (2.8)' den $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığına ulaşılınır. Teorem 3.5'de $\{B_n\}$ nin tek taraftan sınırlı olması halinde de sağlanır.

(Çanak, 2007), genelleştirilmiş Littlewood Tauber teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi Karamata'nın temel teoreminin sonucu yardımıyla ispat etmiştir.

Teorem 3.6 *$\{u_n\}$ dizisi için (2.1) mevcut olsun. $\{u_n\}$ yavaş salınımlı ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

3.4 Düzenli Olarak Üretilen Diziler İçin Tauber Tipi Teoremler Üzerine Bir Not

(Dik ve ark, 2004) Teorem 3.6'yı düzenli üretilmiş diziler kavramı yardımıyla genelleştirmişlerdir. Sonra, (Çanak ve Totur, 2004,2006) Tauber koşullarının bir dizinin salınım davranışının kontrol modulosunun terimlerinde verildiği Tauber teoremleri ispatlamışlardır.

Bu kısımda klasik Tauber teoremleri ve onların genelleştirmelerinin aşağıda verilen teoremler temel alınarak ispatlanmıştır. $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ yavaş salınımlı ise $\{u_n\}$ dizisine (C,1) yavaş salınımlı denilir. $\{u_n\}$ dizisinin salınım hareketinin kontrol modülosu $w_n^{(0)}(u) = n\triangle u_n$ şeklinde gösterilir. $w_n^m(u) = w_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(w^{(m-1)}(u))$ eşitliğine $\{u_n\}$ dizisinin m inci mertebeden kontrol modülosu denir. $m \geq 1$ tamsayısı ve negatif olmayan n tamsayısı ve bir $\{u_n\}$ dizisi $(n\triangle)_0 u_n = u_n$,

$(n\triangle)_m u_n = n\triangle((n\triangle)_{m-1}u_n)$ şeklinde yazılabilir. $m \geq 1$ tamsayısı için $w_n^{(m)}(u) = (n\triangle)_m V_n^{(m-1)}(\triangle u)$ dir.

Teorem 3.7 *(Çanak ve Totur, 2005)* $\{u_n\}$ *dizisi için (2.1) mevcut ve* $m \geq 1$ *tamsayısı için* $(w_n^m(u))$, *(C,1) yavaş salınımlı ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

Teorem 3.8 *(Çanak ve Totur, 2006)* $\{u_n\}$ *dizisi için (2.1) mevcut olsun.* $m \geq 1$ *tamsayısı ve bir* $C > 0$ *için* $w_n^m(u) \geq -C$ *ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

Tanım 3.3 *L lineer uzay ve B, L nin bir alt uzayı olsun.* $m \geq 1$ *ve her n pozitif tamsayısı için* $\{(B_n^{(m)})|B_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k^{(m-1)}}{k}\}$ *şeklinde yazılabilen* $\{B_n^{(m)}\}$ *dizilerinin sınıfı* $(B_n^{(0)}) = (B_n) \in B$ *olmak üzere* $B^{(m)}$ *olarak tanımlarız.*

Tanım 3.4 $u = \{u_n\} \in L$ *için,* $B^{(m)} = (B_n^{(m)}) \in B^{(m)}$ *olmak üzere*

$$u_n = B_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k^{(m)}}{k}$$

ile tanımlanan dizileri içeren $U(B^{(m)})$ *sınıfı,* $B^{(m)}$ *ile düzenli olarak üretilen* $\{u_n\}$ *dizilerinin sınıfıdır.* $\{u_n\}$ *dizisi* $(B_n^{(m)})$ *ile düzenli üretilmiş bir dizi denir.* $(B_n^{(m)})$*'ye* $\{u_n\}$ *dizisinin üreteç dizisi denir.* $U(B^{(m)})$ *dizilerin sınıfı* $B^{(m)}$ *dizileri ile üretilen sınıfıdır.* $U(B_>^{(m)})$ *sınıfıda Tanım 3.3'deki gibi benzer olarak tanımlanır.*

Bir $C_B > 0$ için $B_n \geq -C_B$ koşulunu gerçekleyen dizilerin sınıfı $B_>$ ile gösterilir. Eğer B, yavaş salınımlı ve sınırlı ise $U(B)$ sınıfındaki diziler yavaş salınımlıdır. $m \geq 1$ için $w_n^{(m)}(u) = w_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(w^{(m-1)}(u))$ dir. $B = S$ olsun. Eğer $\{u_n\} \in U(S)$ ise $(V_n^{(0)}\triangle u) \in U(S)$ve $\{\sigma_n^{(1)}(u)\} \in U(S^{(1)})$.
Sonuçlar için aşağıdaki lemma'ya ihtiyaç duyulur.

Lemma 3.1 *$u = \{u_n\} \in L$ ve k ve m negatif olmayan tamsayılar olsun.*
$\{V_n^{(k-1)}(\triangle u)\} \in U(B^{(m)})$ ise $(n\triangle)_{m+1}V_n^{(k+1)}(\triangle u) = B_n$ dir.

İspat Hipotezden $\{V_n^{(k-1)}(\triangle u)\} \in U(B^{(m)})$ olduğundan $(B_n^{(m)}) \in B^{(m)}$ olmak üzere

$$V_n^{(k-1)}(\triangle u) = \sigma_n^{(k-1)}(u) - \sigma_n^{(k)}(u) = B_n^{(m)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^{(m)}}{j} \tag{3.30}$$

dir. (3.30)'un aritmetik ortalaması alınır kendisinden çıkartılırsa

$$V_n^{(k-1)}(\triangle u) - V_n^{(k)}(\triangle u) = n\triangle B_n^{(m)} + B_n^{(m)} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) eşitliğinden, (3.31) eşitliğinin aritmetik ortalaması çıkartılırsa

$$V_n^{(k-1)}(\triangle u) - V_n^{(k)}(\triangle u) - (V_n^{(k)}(\triangle u) - V_n^{(k+1)}(\triangle u)) = B_n^{(m-1)} \tag{3.32}$$

bulunur. (3.32) ifadesi $n\triangle V_n^{(k)}(\triangle u) - n\triangle V_n^{(k+1)}(\triangle u) = B_n^{(m-1)}$ şeklinde yada

$$(n\triangle)_2 V_n^{(k+1)}(\triangle u) = B_n^{(m-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Yapılan adımlar tekrar edilirse,

$$\sigma_n^{(1)}(w^{(m+1)}(u)) = (n\triangle)_{m+1}V_n^{(k+1)}(\triangle u) = B_n^{(0)} = B_n \tag{3.33}$$

sonucuna varılır.
S ile Stanojević anlamında yavaş salınımlı dizilerin sınıfı gösterilsin.

Teorem 3.9 *$\{u_n\}$ dizisi için (2.1) mevcut ve keyfi bir $m \geq 1$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\triangle u)) \in U(S^{(m)})$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat Lemma 3.1 de B=S ve k=m alınırsa eğer $\sigma_n^{(1)}(w^{(m+1)}(u)) = B_n^{(0)} = B_n$ dir. $\{B_n\} \in S$ olduğundan dolayı $(w_n^{(m+1)}(u))$, (C,1) yavaş salınımlıdır. Teorem 3.7 ile $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Teorem 3.10 *$\{u_n\}$ dizisi için (2.1) limiti mevcut ve keyfi bir $m \geq 1$ tamsayısı için $(V_n^{(m-1)}(\triangle u)) \in U(S^{(m)})$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat Lemma 3.1 de $B = S$ ve $k = m-1$ alındığı taktirde $w^{(m+1)}(u) = B_n$ elde edilir. $\{B_n\} \in S$ olduğundan $(w^{(m+1)}(u))$, (C,1) yavaş salınımlı bulunur. Teorem 3.7 ile $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Benzer sonuçları tek taraftan sınırlı düzenli üretilmiş diziler içinde verilebilir.

Teorem 3.11 *$\{u_n\}$ dizisi için (2.1) mevcut ve keyfi bir $m \geq 1$ tamsayısı için $(V_n^{(m)}(\triangle u)) \in U(S_>^{(m)})$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat Lemma 3.1 de $B = S$ ve $k = m$ alınırsa, Lemma 3.1 ile $\sigma_n^{(1)}(w^{(m+1)}(u)) = B_n$ bulunur. $\sigma_n^{(1)}(w^{(m+1)}(u)) = w_n^{(m+1)}(\sigma^{(1)}(u))$ ve (2.1)'in varlığı ile (2.8)'i gerektirdiğinden Teorem 3.8 ile $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Teorem 3.12 *$\{u_n\}$ dizisi için (2.1) mevcut ve keyfi bir $m \geq 1$ için $(V_n^{(m-1)}(\triangle u)) \in U(S_>^{(m)})$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat Lemma 3.1 de B=S ve $k = m-1$ alınırsa $w_n^{(m+1)}(u) = B_n$ elde edilir. $\{B_n\}$ tek taraftan sınırlı olduğundan Teorem 3.8 ile $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Sonuç 3.3 *(2.8) limiti mevcut olsun. Eğer $(V_n^{(0)}(\triangle u)) \in U(S)$ ise $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dir.*

İspat Hipotezden $(V_n^{(0)}(\triangle u)) \in U(S)$ olduğundan $(V_n^{(1)}(\triangle u)) \in U(S^{(1)})$ dir. Teorem 3.9 u uyguladığımız zaman, $V_n^{(1)}(\triangle u) = V_n^{(0)}(\triangle \sigma^{(1)}(u))$ ve (2.8)'den dolayı $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u) x^n$ elde edilir ve $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(1)}(u)$ den dolayıda $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ varlığına ulaşılır. Teorem 3.9 ile de $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.
Sonuç 3.3 ve (Dik ve ark, 2004)' deki Teorem 1 dir. (Dik ve ark, 2004)'deki Teorem 2 olan bir sonraki sonuç için aşağıdaki Teorem 3.7'nin bir genelleştirilmesine ihtiyaç duyacağız.

Teorem 3.13 *(2.8)'in varlığından ve* $m \geq 1$ *için* $(w_n^{(m)}(u))$*, (C,1) yavaş salınımlı ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

İspat $\sigma_n^{(1)}(w^{(m)}(u)) = w_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u))$ olduğu açıktır. Teorem 3.7'i uygulayarak, hipotezde verilen (2.8)'in varlığından ve $m \geq 1$ için $(w_n^{(m)}(u))$, (C,1) yavaş salınımlı olduğundan $\lim \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)$ elde edilir ve buradan (2.1)'in varlığı bulunur. Teorem 3.7'i uygulayarak, (2.1) var ve $m \geq 1$ için $(w_n^{(m)}(u))$, (C,1) yavaş salınımlılığından $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Sonuç 3.4 *(2.8) limitinin mevcut olduğunu kabul edelim. Eğer* $(V_n^{(0)}(\triangle u)) \in U(M^{(1)})$ *ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

İspat Hipotezden $(V_n^{(0)}(\triangle u)) \in U(M^{(1)})$ verildiğinden $\sigma_n^{(1)}(w^{(2)}(u)) \in S$ elde edilir. Teorem 3.13'i uygulayarak, $\sigma_n^{(1)}(w^{(2)}(u)) \in S$ ve (2.8)'den dolayı $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ elde edilir.

Sonuç 3.5 *(2.8) mevcut ve* $(u_n) \in U(B_>^{(1)})$ *ise* $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *dir.*

İspat Hipotezde $(u_n) \in U(B_>^{(1)})$, bir ${B_n}^{(1)} \in B^{(1)}$, için $u_n = B_n^{(1)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k^{(1)}}{k}$ dir. Buradan

$$n\triangle u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k}. \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) ve $u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\triangle u)$ den bir $C > 0$ için

$$w_n^{(1)}(u) = B_n = n\triangle V_n^{(0)}(\triangle u) \geq -C \tag{3.35}$$

bulunur. (3.35)'in aritmetik ortalaması alınırsa $\sigma^{(1)}(w_n^{(1)}(u)) = w_n^{(1)}(\sigma^{(1)}(u)) = n\triangle V_n^{(1)}\triangle(u) \geq -C$ elde edilir. (2.1) varlığı (2.8)'i gerektirdiğinden teorem

3.8 ile $\lim \sigma_n^{(1)}(u) = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(1)}(u)$ dir. Bu da bize $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ nin varlığını verir. Bir $C>0$ için $w_n^{(1)}(u) \geq -C$ olduğundan Teorem 3.8'den dolayıda $\lim_n u_n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ bulunur. Bu sonuç, Dik, Dik, Çanak'ın (2004)' deki Teorem 3.2.2 dir.

Bölüm 4

4. YAKINSAKLIK ve ALTDİZİSEL YAKINSAKLIK İÇİN ŞARTLAR

$\{B_n\}$ yada $\{B_n - B_{n-1}\}$ yavaş salınımlı olmak üzere $\{u_n\}$ dizisi (B_n) dizisi ile düzenli olarak üretilsin. Düzenli olarak üretilmiş $\{u_n\}$ dizisinin hangi koşullar altında yakınsak ve altdizisel yakınsak olduğunu araştıracağız.

L herhangi bir lineer uzay ve B, $\{u_n\}$, L de bir dizi olsun. A, L nin dizilerinin bir alt uzayı olsun. Her n pozitif tamsayısı ve bir $B = (B_n) \in A$ için

$$u_n = B_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} \tag{4.1}$$

ise $\{u_n\}$ dizisine $B = (B_n)$ dizisi tarafından düzenli olarak üretilmiş denir ve B ye de $\{u_n\}$ nin bir üreteci denir.

SO ile yavaş salınımlı dizilerin sınıfı, MO ile ılımlı salınımlı dizilerin sınıfı gösterilsin. Eğer $\{u_n\}$ dizisi yakınsak ise

$$\triangle u_n = o(1), n \to \infty. \tag{4.2}$$

Tersi doğru değildir, örnek olarak $\{\log n\}$ dizisi (4.2)'yi sağlar fakat yakınsak değildir. (4.2), $\{u_n\}$ nin yakınsaklığı için gerek bir koşul olduğundan aşağıdaki soruyu sorabiliriz. Hangi koşullar altında (4.2)'yi yada onun genelleştirmelerini gerçekleyen $\{u_n\}$ dizisinin davranışı hakkında bilği sahibi olabiliriz. (4.2)'yi gerçekleyen sınırlı bir $\{u_n\}$ dizisi için $\{u_n\}$ nin bazı altdizilerinin yakınsaklığını elde ederiz. Bu da aşağıdaki yeni bir yakınsaklığı tanımlamamıza yol açar.

Tanım 4.1 *(Dik,F, 2001) $u = \{u_n\}$ dizisinin bütün yığılma noktalarının sonlu bir $I(u)$ aralığı varsa ve bu aralığın bütün noktalarıda $\{u_n\}$ nin bir yığılma noktası ise $\{u_n\}$ ye altdizisel yakınsak denir.*

Tanımdan, altdizisel yakınsaklığın dizinin sınırlılığını gerektirdiği açıktır. Fakat karşıtı doğru değildir. Örnek olarak $\{u_n\} = \{(-1)^n\}$ dizisi sınırlıdır ama altdizisel yakınsamaz. Yani sınırlı diziler altdizisel yakınsak olmak zorunda değildir. (Stanojević, 1995), $\{S_n(B)\} = \{\sum_{k=1}^n B_k\}$ yavaş salınımlı ise $\{\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k}\}$ yakınsak olduğunu göstermiştir. Bu çalışmamızda amaç $\{\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k}\}$ yakınsaklığı için gerekli olan şartın zayıflatılması ve daha sonrada U(SO) ve $U(SO_\triangle)$ daki $\{u_n\}$ dizisinin yakınsaklığını veya altdizisel yakınsaklığını araştırmaktır. $U(SO_\triangle)$ sınıfı, $(\triangle B_n)$ yavaş salınımlı olmak üzere $\{B_n\}$ ile üretilen $\{u_n\}$ dizilerinin sınıfıdır.

Tanım 4.2 *Pozitif bir $\{u_n\}$ dizisi için $\lim_n \frac{u([\lambda n])}{u(n)} = 1$ ise $\{u_n\}$ dizisine yavaş değişimli denir.*

Teorem 4.1 *$\{u_n\} \in U(SO_\triangle)$ dizisi $\{B_n\}$ ile düzenli olarak üretilen dizi olsun. $\{S_n(B)\}$ ılımlı salınımlı ise $\{u_n\}$ dizisi altdizisel yakınsaktır.*

Bu teoremi ispat etmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyarız.

Lemma 4.1 *$\{S_n(B)\}$ ılımlı salınımlı ise $\sum_{n=1}^\infty \frac{B_n}{n}$ yakınsaktır.*

İspat $\{R(n)\} = \{\exp|\sum_{j=1}^n B_j|\}$ dizisi için

$$\frac{R([\lambda n])}{R(n)} \leq \exp|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} B_j| \tag{4.3}$$

(4.3)'ün her iki tarafının $\overline{\lim}$'i alınırsa $\overline{\lim}_n \frac{R([\lambda n])}{R(n)} \leq \exp \overline{\lim}_n|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} B_j|$ elde edilir. Hipotezde verilenden $\lambda > 1$ için $\overline{\lim}_n|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} B_j| < \infty$ dur. Böylece, $\{\log R(n)\}$ yavaş değişimlidir Natsis (1991). $p \in (1,2]$ ve $n \geq 1$ için $|\sum_{j=1}^n B_j|^p = \log^p R(n)$, ve her $p > 1$ için $\sum_{n=1}^\infty |\sum_{j=1}^n B_j|n^{-p} < \infty$ F. Riesz in teoremi (Riesz, 1923) ile $\sum_{n=1}^\infty \frac{B_n}{n} < \infty$ elde ederiz.

Lemma 4.2 *$\{B_n\}$ reel sayıların dizisi olsun. Eğer $\{\Sigma_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}\}$ yakınsak ise $\sigma_n^{(1)}(B)$ $= o(1), n \to \infty$.*

İspat $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$ yazalım. Böylece, $B_n = n\triangle\alpha_n$ ve $\sigma_n^{(1)}(B) = V_n^{(0)}(\triangle\alpha)$. $\{\alpha_n\}$ nin yakınsaklığı ve Kronecker eşitliğinden $V_n^{(0)}(\triangle\alpha) = o(1), n \to \infty$. Bu ispatı tamamlar.

Lemma 4.3 *(Dik, F, 2001) $\{u_n\}$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\triangle u_n = o(1)$, $n \to \infty$ ise $\{u_n\}$ dizisi altdizisel yakınsaktır.*

Lemma 4.4 *(Stanojević, 1999a) $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$, L ye yakınsak olsun. $\{u_n\} \in SO$ ise $\{u_n\}$ dizisi L ye yakınsaktır.*

Şimdi Teorem 4.1'in ispatını verelim. $\{u_n\}$ dizisi (B_n) tarafından düzenli olarak üretildiğinde $\{u_n\}$ için (4.1) gösterimi mevcuttur. Böylece Lemma 4.1 ile $\{\alpha_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}\}$ yakınsak ve Lemma 4.2 ile $\sigma_n^{(1)}(B) = o(1)$, $n \to \infty$ dir. Buradan $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ dizisi $\{\alpha_n\}$ dizisinin limitine yakınsaktır.$\{\triangle B_n\}$ yavaş salınımlı ve $\frac{B_n}{n} = o(1)$, $n \to \infty$ olduğundan Lemma 4.4 ile $\triangle B_n = o(1)$,$n \to \infty$ dir. (4.1) den $\triangle u_n = \triangle B_n + \frac{B_n}{n}$ elde edilir. Son eşitlikten $\triangle u_n = o(1)$, $n \to \infty$ dir. $u_n = O(1)$, $n \to \infty$ gösterilmesiyle kanıt tamamlanır. $\{S_n(B)\}$ ılımlı salınımlı olduğundan $V_n(B) = O(1)$, $n \to \infty$ **?** dir. $B_n = \frac{V_n(B)}{n} + \triangle V_n(B)$ den $B_n = O(1)$, $n \to \infty$. Sonuç olarak $u_n = O(1)$, $n \to \infty$. Lemma 4.3 ile $\{u_n\}$ alt dizisel yakınsaktır.

Uyarı 4.1 *$\{u_n\}$ dizisi $B = \{B_n\}$ ile düzenli olarak üretilmiş ise $m \geq 1$ tamsayısı için $\{\sigma_n^{(m)}(u)\}$, $\sigma^{(m)}(B) = \{\sigma_n^{(m)}(B)\}$ ile düzenli olarak üretilmiştir. Eğer $\{\Sigma_{k=1}^{n}\sigma_k^{(m)}(B)\} \in MO$ ve bir $0 \leq j \leq m$ için $\{\sigma_n^{(j)}(B)\} \in SO$ ise Teorem 4.1 ile $\{\sigma_n^{(m)}(u)\}$ yakınsaktır.*

Uyarı 4.2 *$\{u_n\} \in U(SO)$ dizisi $\{B_n\}$ ile düzenli olarak üretilen bir dizi olsun. $\{S_n(B)\}$ ılımlı salınımlı ise $\{u_n\}$, $\lim_n \sigma_n^{(1)}(u)$ ya yakınsaktır.*

İspat Bir $\{u_n\}$ dizisi $B = \{B_n\}$ ile düzenli olarak üretilmiş ise

$$V_n^{(0)}(\triangle u) = V_n^{(0)}(\triangle B) + \sigma_n^{(1)}(B) \tag{4.4}$$

dir. Lemma 4.2 ile $\sigma_n^{(1)}(B) = o(1)$, $n \to \infty$ dir. Yavaş salınımın tanımından $\{B_n\}$ yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\{V_n^{(0)}(\triangle B)\}$ yavaş salınımlı ve sınırlı olmasıdır (Dik, 2001a). Böylece (4.4)'ü kullanarak, $\{V_n^{(0)}(\triangle u)\}$ nin yavaş salınımlı ve sınırlıdır. Buradan $\{u_n\}$ yavaş salınımlıdır. $\{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ yakınsak olduğundan, $\{u_n\}$, Lemma 4.4 ile aynı limite yakınsar.

Bölüm 5

5. SONUÇ

1. Amaçlanan: Bu çalışmada, (Çanak ve Totur, 2006) de ispat edilmiş olan (A, 0) Abel limitleme metodu için verilen Tauber tipi bir teorem (A, i) limitleme metoduna genelleştirilmiştir. Yani

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(i)}(u)x^n = s \\ ve \\ \boxed{\{u_n\}\ \textbf{dizisi üzerine konan Tauber şartı ile}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_n u_n = s$$

elde edildi.

• $u_n \longrightarrow s\ (A,0) \Longrightarrow i \geq 1$ için $u_n \longrightarrow s\ (A,i)$. Tersi dogru değildir.

Örnek Olarak:

• $i = 1$ halinde, $f(x) = \sin(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, $0 < x < 1$ ile tanımlanan (u_n) dizisi Abel limitlenebilir değildir, fakat (u_n), $(A,1)$ limitlenebilirdir.

2. Kullanılan Notasyonlar:

• Her $i \geq 1$ için ve negatif olmayan n tamsayısı için

$$\sigma_n^{(i)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k^{(i-1)}(u) & ,i \geq 1 \\ u_n & ,i = 0 \end{cases}$$

• $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{(i)}(u) = s$ ise $u = (u_n)$ dizisine s ye (H,i) limitlenebilir denir.

• $u = (u_n)$ (C,1) yavaş salınımlı denir $\Longleftrightarrow \{\sigma_n^{(1)}(u)\}$ yavaş salınımlı dizidir.

• $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(i)}(u)x^n = s$ (kısaca, $u_n \longrightarrow s\ (A,i)$ yazarız) ise (u_n)

dizisine s ye (A, i) limitlenebilir denir.

- Eğer $i = 0 \Longrightarrow (A, i)$ limitleme metodu Abel limitleme metoduna indirgenir.

- $u_n \longrightarrow s\ (A, 0) \Longrightarrow i \geq 1$ için $u_n \longrightarrow s\ (A, i)$

(Çanak and Totur, 2006), (u_n) dizisinin Abel limitinden control modülo üzerine şart koyarak dizinin yakınsaklığını elde etti.

Teorem A: (u_n) dizisi s ye Abel limitlenebilir ve $(w_n^{(m)}(u))$ dizisi (C,1) yavaş salınımlı ise (u_n), s ye yakınsar.

(A,i) Limitleme Metodu için Tauber Tipi Teorem : Her $i \geq 1$ pozitif tamsayısı için $u_n \longrightarrow s\ (A, i)$ olsun. Eğer $(w_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlı $\Longrightarrow u_n \longrightarrow s$.

Çanak ve Albayrak İspat :

Bazı $a = (a_n) \in S$ için $\sigma_n^{(1)}(w^{(m)}(u)) = a_n$ olsun.

$$\sigma_n^{(1)}(w^{(m)}(u)) = w_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u)),$$

olduğu yazılabilir.

$$w_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u)) = a_n \Longrightarrow w_n^{(m)}(\sigma^{(j)}(u)) = \sigma_n^{(j-1)}(a).$$

S deki bir dizinin yavaş salınımlı tanımından $j = 1, 2, 3, ..., i + 1$ için

$$(\sigma_n^{(j-1)}(a)) \in S.$$

$u_n \longrightarrow s\ (A, i)$ den, **Teorem A** ile $u_n \longrightarrow s(H, i)$ dir.

$$u_n \longrightarrow s(H, i) \Longrightarrow u_n \to s(A, i-1)\ \ dir.$$

$$\left.\begin{array}{r}(w_n^{(m)}(\sigma^{(i)}(u)) = (\sigma_n^{(i-1)}(a)) \in S \\ ve \\ \boxed{u_n \longrightarrow s\ (A, i-1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \longrightarrow s(H, i-1) \ \ bulunur.$$

Önceki sonucun aynısı ile

$$u_n \longrightarrow s(A, i-2).$$

Bu şekilde devam edilirse

$$u_n \longrightarrow s(A, 0)$$

elde ederiz. $(\sigma_n^{(1)}(w^{(m)}(u)) = (a_n) \in S$ birlikte $u_n \longrightarrow s$ bulunur. Buda kanıtı tamamlar. (Hardy ve Littlewood, 1913), (Schmidt, 1924; Landau, 1910) dan sonra (u_n) dizisinin Abel limitinden yakınsaklığına ulaşılabilmesi için Tauber şartlarının zayıflatılması gittikçe zorlaştı. Bundan dolayıda, (Stanojević, 1998) daha genel ve yeni kavram olarak bir dizinin genel kontrol modülosunu vede düzenli olarak üretilen dizileri tanımladı.

- $u = (u_n)$ reel ve $m \geq 1$ için

$$\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)).$$

Sonuç olarak(Çanak ve Albayrak) :

$u_n \longrightarrow s\ (A, i)$ olsun. Eğer $(w_n^{(m)}(u)) \in S$ (veya $\in M$) ise $u_n \longrightarrow s$ elde etti.

KAYNAKLAR

Çanak, İ. 1998a. Tauberian theorems for generalized Abelian summability meth ods, phD Thesis. University of Missouri-Rolla, p.70 , Missouri.

Çanak, İ. 1998b. Tauberian theorems for generalized Abelian summability meth ods. **Math. Morav., 2:** 21-66.

Çanak, İ., Totur, Ü. 2006. (submitted for publication) Tauberian theorems for Abel Limitability method, **Tamkang J. Math.**

Çanak, İ., Dik, F., and Dik, M. 2007. Applications of subsequentialTauberian theory to classical Tauberian theory. **Appl. Math. Lett., 20**: 946-950.

Çanak, İ. 2007. (in print) A proof of the generalized Littlewood Tauberian the orem. **Int. J. Pure Appl. Math. Sciences,.**

Çanak, İ., Totur, Ü. 2007. A Tauberian theorem with a generalized onesided condition, **Abstr. Appl. Anal., 2007**: 1-12

Dik, M. 2001. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control modulo. **Math. Morav., 5**: 57-94.

Dik, F. 2001. Tauberian theorems for convergence and subsequentialconvergence with moderately oscillatory behavior, **Math. Morav., 5**: 19-56.

Dik, M. 2002. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli. phD Thesis. University of Missouri-Rolla, p.60 , Missouri.

Dik, M., Dik, F. and Çanak, İ. 2004. Classical and neoclassical Tauberian theo rems for regularly generated sequences. **Far East J. Math. Sci., 13** : (2) 233-240.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. 1913. Tauberian theorems concerning power series and Diriclet's series whose coefficients are positive. **Proc. London. Math., XIII, 2**(14): 174-191.

Karamata, J. 1930. Die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. **Math. Z., 32** :319-320.

Landau, E. 1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Her ren Hardy und Axer. **Prace Mat. Fiz., 21**: 97-177.

Littlewood, J. E.1911. The converse of Abel's theorem on power series. **Proc. London Math. Soc.**, 9, (2): 434-448.

Natsis, D.G. 1991. Convergence of Fourier series and representations of Fourier and Fourier-Stieltjes coeffficients. phD Thesis. University of Missouri-Rolla, p.60 , Missouri.

Rényi, A. 1946. On a Tauberian theorem of O. Szász, **Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math., 11:** 119-123.

Riesz, F. 1923. Über eine Verallgemeinerung der persevalschen formel. **Math. Z. 18**: 117-124.

Schmidt, R. 1924. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. **Math. Z., 22**: 89-152.

Stanojević, Časlav V. 1995. Slow oscillation in norms and structure of linear functional. **Publ. Inst. Math., Nouv. Sér., 58**(72): 93-100.

Stanojević, Časlav V, Çanak, İ. and Stanojević, Vera B. 1997. Tauberian the orems for generalized Abelian summability methods. In **Proceedings of the Seventh International Workshop in Analysis and its Applications**, (eds. Bray WO, Stanojević Č V), pp 1-13. University of Maine, Maine.

Stanojević, Časlav V. 1998. Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Process, University of Missouri-Rolla, 56 p., Missouri.

Stanojević, Časlav V. 1999a. Analysis of Divergence: Applications to the Taube rian Theories, University of Missouri-Rolla, 50 p., Missouri.

Stanojević, Časlav V. 1999b. Analysis of Divergence: Beyond the Classical Tauberian Theories, University of Missouri-Rolla, 50 p., Missouri.

Szász, O. 1928. Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Poten zrielhen. **J. Lond. Math. Soc., 3** : 254-262.

Tauber, A. 1897. Ein Satz aus der Theorie der Unendlichen Reihen. **Monatsh. Phys., 7**: 273-277.

Vijayaraghavan, T. 1926. A Tauberian theorem. **J. London Math. Soc., 1**: 113-120.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : MEHMET ALBAYRAK

Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın-Germencik, 12.08.1980

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Çanak İ. , Albayrak M. 2007. A note on a Tauberian theorem for (A,i) limitable method , **Int. J. Pure Appl. Math.**, **35** (3): 421-424.

b) Çanak İ., Albayrak M. 2007. (A,i) limitleme metodu için bir Tauber tipi teorem. **XX. Ulusal Matematik Sempozyumu**. (3-6 Eylül 2007, Erzurum.)

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı'nda 2004 yılında Araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu göreve devam etmektedir.

İLETİŞİM

E-posta Adresi: mehmetalb@yahoo.com

Tarih :12.01.2008