T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-YL-008

İNJEKTİF MODÜLLERİN KARAKTERİZASYONU

Ülkü Rabia KUŞ

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ülkü Rabia KUŞ tarafından hazırlanan İnjektif Modüllerin Karakterizasyonu başlıklı tez, 08/01/2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen Edeb. Fak.	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. A. Tuğba GÜROĞLU	CBÜ Fen Edeb. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2015 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

08/01/2015

Ülkü Rabia KUŞ

ÖZET

İNJEKTİF MODÜLLERİN KARAKTERİZASYONU

Ülkü Rabia KUŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2015, 51 sayfa

İnjektif modüller, modül teorinin gelişiminde önemli bir yer alır. İnjektif modül teorisi farklı tanımlamalar ile geliştirilmiştir ve araştırmacılar injektif modüllerin pek çok genelleştirmelerini yapmışlardır. Bu tezde, biz injektif modüllerin farklı genelleştirmelerini karakterizasyonları bağlamında çalıştık. Bunun için A-injektif, principally injektif, quasi-injektif, pseudo-injektif, f-injektif, PP-M-injektif, small PPQ-injektif ve SP-M-injektif modülleri çalışılmıştır ve karakterizasyonları için denk şartlar incelenmiştir. Son olarak, ileri karakterizasyonlar için bu injektif modüller arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler
İnjektif modül, essential altmodül, singüler altmodül, Baer Kriteri

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF INJECTIVE MODULES

Ülkü Rabia KUŞ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ
2015, 51 pages

Injective modules take important place in the development of module theory. The theory of injective modules being developed by different definitions and thus researchers make a lot of generalizations of injective modules. In this thesis, we study some different generalizations of injective modules in the sense of characterizations. Therefore A-injective, principally injective, quasi-injective, pseudo-injective, f-injective, PP-M-injective, small PPQ-injective and SP-M-injective modules has been studied and equivalent conditions has been examined for characterizations. Finally, the relations of this injective modules has been given for further characterizations.

Key Words
Injective module, essential submodule, singular submodule, Baer's Criterion

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince, değerli katkı ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e, ayrıca çalışmam boyunca bana yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim aileme göstermiş oldukları sabır ve anlayış için teşekkür ederim.

Ülkü Rabia KUŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$B \leq A$	:	B, A modülünün altmodülü
$B \lneqq A$	:	B, A modülünün öz altmodülü
$B \ll A$	:	B, A modülünün small altmodülü
$B \leq_e A$	:	B, A modülünün essential altmodülü
$A \oplus B$	:	A ile B modüllerinin direk toplamı
$B \leq_d A$	:	B, A modülünün direk toplananı
$Hom_R(M,M)$	:	M den M ye R-homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	:	M modülünün endomorfizma halkası
$E(M_R)$	:	M modülünün injekif hull'ı
$Rad(M)$	:	M modülünün radikali
$J(R)$	:	M modülünün Jacobson radikali
$\mathscr{M}_R$	:	Sağ R-modüllerin kategorisi
$f_{\vert A}$	:	f homomorfizmasının A ya kısıtlanışı
$< f >$	:	f homomorfizmasının grafı
$\mathbf{r}(a)$	:	Bir M modülünün a elemanının R de sağ sıfırlayanı
$\mathbf{l}(a)$	:	Bir M modülünün a elemanının R de sol sıfırlayanı
$\mathbf{r}(X)$	:	Bir M modülünün X altkümesinin R de sağ sıfırlayanı
$\mathbf{l}(X)$	:	Bir M modülünün X altkümesinin R de sol sıfırlayanı
$Z(R_R)$, $Z({}_RR)$	:	R halkasının sağ ve sol tekil (singular) idealleri

1. GİRİŞ

Bu tezde bazı farklı injektif modül tanımları ele alınarak temel özellikler incelenmiş ve yeni karakterizasyonlar için karşılaştırmalar çalışılmıştır. [11] çalışmasından injektif modül kavramının 1950 li yıllarda çalışılmaya başlandığını biliyoruz. İnjektif, quasi-injektif ve relatif injektif modül kavramları ve temel özellikleri [15] çalışmasında detaylı olarak verilmiştir.

Aşağıdaki denk koşullardan herhangi birini sağlayan bir E modülüne injektif modül denir:

(1) Bir A modülü ve A nın herhangi bir X altmodülü için X altmodülünden E modülüne her homomorfizma, A dan E ye bir homomorfizmaya genişletilebilir. Yani, A nın her X altmodülü için bir $f : X \to E$ homomorfizması var ise $g_{|X} = f$ olacak şekilde bir $g : A \to E$ homomorfizması vardır.

(2) Bir R halkasının bir sağ I idealinden E ye her homomorfizma R den E ye bir homomorfizmaya genişletilebilir (Baer Kriteri). Yani, R nin herhangi bir I ideali ve her $f : I \to E$ homomorfizması için $g_{|I} = f$ olacak şekilde bir $g : R \to E$ homomorfizması vardır.

(3) Her M modülü için E den M ye her monomorfizma parçalanabilir (split) dir.

(4) E nin hiçbir öz essential genişlemesi yoktur.

Her M modülünün minimal injektif ve aynı zamanda maksimal essential genişlemesi vardır. Bu genişleme izomorfizma farkıyla tek türlüdür ve M nin injektif hull'ı olarak adlandırılır ve $E(M)$ ile gösterilir. İnjektif modüllerin modül teoride önemli uygulamaları vardır. Farklı tanımlamalar ile injektif modül teorisi gelişmiştir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe R birimli bir halka ve modüller birimsel sağ R-modül olarak alınacaktır.

İkinci bölümde bu çalışma boyunca kullanacağımız temel tanımlar ve özellikler belirtilmiştir. Bu kısımda [1] ve [10] çalışmalarından yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde bir modüle göre injektiflik kavramı çalışılarak A-injektif ve A-essential injektif modül tanımları ifade edilmiştir. Burada injektif hull tanımı verilerek bu modüllerin karakterizasyonları çalışılmıştır. Yine bölümde tümleyen, kısıtlanmış homomorfizma ve graf kavramları tanımlanmış, bu tanımlar yardımıyla A-injektif ve A-essential injektif modüller için gerektirmeler verilmiştir. Ayrıca A-injektif modüller için Baer Kriteri verilerek bu kriterin A-essential injektif modüllere genellemesi çalışılmıştır [13].

Dördüncü bölümde principally injektif (P-injektif) modül tanımı ile bu tanıma denk koşullar verilmiştir. Ayrıca principally injektif modüllerin karakterizasyonları incelenmiştir. Dengelenmiş (balanced) ve sadık (faithfull) modül tanımları kullanılarak P-injektif modül örnekleri verilmiştir. Burada her cismin bir P-injektif halka olduğu görülmüştür. Bununla birlikte çarpım özelliğinin P-injektifliği koruduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir P-injektif halka için [12] de verilen C_2 ve C_3 şartları incelenmiştir [14].

Beşinci bölümde ilk olarak quasi-injektif ve pseudo-injektif modül tanımları verilmiştir. Ayrıca Pseudo-injektif bir modülün direk toplananının quasi-injektif olduğu gösterilmiştir. Bir M modülünün birbirine izomorf olmayan modüllerin kafesi (lattice) yardımıyla modül için bir karakterizasyon verilmiştir [9]. Daha sonra I-injektif modül tanımı ve bu tanım kullanılarak f-injektif modül tanımı verilmiştir. [16] çalışmasında [2] de verilen “M, pR-injektiftir $\Leftrightarrow \mathbf{lr}(p) = Mp$” kullanılarak injektif modül için ile farklı bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca f-injektif modülün direk toplamı koruduğu gösterilmiştir. Diğer yandan Noether halkanın f-injektif modül ile karakterizasyonu incelenmiştir [7]. Ayrıca small PP-M-injektif modül ile small PPQ-injektif modül tanımları ve karakterizasyonları verilmiştir. Son olarak *SP-M*-injektif ve relatif injektif modül tanımları da çalışılmıştır [16].

Tartışma bölümünde, çalışılan farklı injektif modül tanımlarından hareketle, ileri çalışmalara yardımcı olmak amacıyla yeni karakterizasyonlar için aralarındaki geçişler çalışılmıştır.

2. TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde çalışma boyunca gerekli olan modül teorideki temel tanım ve özellikler verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1 [10]. R bir halka olsun.

(1) M bir toplamsal değişmeli grup ve

(2) $M \times R \to M$, $(m,r) \mapsto mr$ ile tanımlı dış çarpım dönüşümü için $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ olmak üzere

(a) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$,

(b) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$,

(c) $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$,

özellikleri varsa M ye *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R birimli bir halka ve M_R, $m1 = m$ şartını sağlıyorsa M ye *birimsel sağ R-modül* denir. Sol R-modül benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.2 [10]. M bir sağ R-modül ve A, M nin bir altkümesi olsun. Eğer A, M nin işlemlerine göre R-modül oluyorsa A ya M nin *altmodülü* denir ve $A \leq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 [10]. R bir halka ve M bir R-modül olsun.

(1) Her $A \leq M$ altmodülü için $A = 0$ veya $A = M$ ise M ye *basit modül* denir.

(2) Her $A \leq {}_R R_R$ ideali için $A = 0$ veya $A = R$ ise R halkasına *basit halka* denir.

(3) A, M nin bir altmodülü olsun. $0 \lneqq A$ ve her $B \leq M$ için $B \lneqq A$ için $B = 0$ oluyorsa A ya *minimal altmodül* denir.

(4) A, M nin bir altmodülü olsun. $A \lneqq M$ ve her $B \leq M$ için $A \lneqq B$ için $B = M$ oluyorsa A ya *maksimal altmodül* denir.

Tanım 2.1.4 [10]. R bir halka, M bir R-modül olmak üzere $m \in M$ için $mR = \{mr \ : \ r \in R\}$, M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle M nin m ile *üretilmiş (devirli) altmodülü* denir.

Tanım 2.1.5 [10]. Bir halkanın devirli ideallerine *principal ideal* denir. Her ideali principal ideal olan değişmeli bir halkaya *principal ideal halkası* denir.

Tanım 2.1.6 [10]. R bir halka, M bir R-modül ve B, M nin altmodülü olsun. $M = B \oplus C$ olacak şekilde M nin bir C altmodülü varsa B ye M nin *bir direk toplananı (direct summand)* denir. $M \neq 0$ olsun. M nin sıfırdan ve kendinden başka dik toplananı yoksa M ye *direk parçalanamaz (direct indecomposable)* denir.

Tanım 2.1.7 [10]. $\mathscr{M}_R$, R-modüllerin bir kategorisi olsun.
(a) Her $M \in \mathscr{M}_R$ için $\sum\limits_{\varphi \in Hom_R(B,M)} Im(\varphi) = M$ ise B_R ye $\mathscr{M}_R$ kategorisinin *üreteci (generator)* denir.
(b) Her $M \in \mathscr{M}_R$ için $\bigcap\limits_{\varphi \in Hom_R(M,C)} Ker(\varphi) = 0$ ise C_R ye $\mathscr{M}_R$ kategorisinin *eşüreteci (cogenerator)* denir.

Sonuç 2.1.8 [10, 3.4.11 Corollary].
(1). $\alpha : A \to B$ *homomorfizması için aşağıdakiler denktir:*
(a). α *bir parçalanabilir monomorfizmadır.*
(b). $\beta\alpha = 1_A$ *olacak şekilde* $\beta : B \to A$ *homomorfizması vardır.*
(2). $\beta : B \to C$ *homomorfizması için aşağıdakiler denktir:*
(a). β *bir parçalanabilir epimorfizmadır.*
(b). $\beta\gamma = 1_C$ *olacak şekilde* $\gamma : C \to B$ *homomorfizması vardır.*

Önerme 2.1.9 [1, 8.10 Proposition]. *U ve M herhangi iki modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1). *U nun M yi (sonlu) üretmesi için gerek ve yeter koşul $h \in Hom_R(U,M)$ için $M = \sum_{h \in H} Im(h)$ olacak şekilde (sonlu) bir $H \subseteq Hom_R(U,M)$ altkümesinin var olmasıdır.*

(2). *U nun M yi (sonlu) eşüretmesi için gerek ve yeter koşul $h \in Hom_R(U,M)$ için $0 = \bigcap_{h \in H} Ker(h)$ olacak şekilde (sonlu) bir $H \subseteq Hom_R(U,M)$ altkümesinin var olmasıdır.*

Teorem 2.1.10 [10, 3.7.1 Theorem]. *R bir halka, M bir R-modül olsun. $Hom_R(M,M)$, M den M ye bütün homomorfizmaların kümesini belirtsin. $Hom_R(M,M)$ kümesi,*
$(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ ve $(\alpha_1\alpha_2)(a) = \alpha_1(\alpha_2(a))$ toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birimli bir halkadır.

Tanım 2.1.11 [10]. Teorem 2.1.10 da ifade edilen halkaya *M nin endomorfizma halkası* denir ve $End(M_R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12 [10]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her altmodülü ile arakesiti sıfırdan farklı olan sıfırdan farklı bir A altmodülüne *essential (large) altmodül* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. Yani, $0 \neq A \leq M$ olmak üzere her $0 \neq U \leq M$ için $U \cap A \neq 0$ dır. Buna denk olarak, $A \neq 0$ olmak üzere her $U \leq M$ için $U \cap A = 0$ iken $U = 0$ oluyorsa A ya M nin *essential altmodülü* denir.

Tanım 2.1.13 M bir modül olsun. M nin sıfırdan farklı her altmodülü M de essential ise M ye *uniform modül* denir.

Tanım 2.1.14 [10]. A ve B iki R-modül olmak üzere bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması için $Im(\alpha)$, B de essential ise α ya *essential homomorfizma* denir.

Tanım 2.1.15 [10]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin her U altmodülü için $A+U=M$ iken $U=M$ koşulunu sağlayan M nin bir A altmodülüne M de *small (superfluous) altmodül* denir ve $A \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 [10]. A ve B iki R-modül olmak üzere bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması için $Ker(\alpha) \ll A$ ise α ya *small homomorfizma*, α örten ise α ya *small epimomorfizma* denir.

Lemma 2.1.17 [10, 5.1.5 Lemma]. *M ve N birer modül olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a). *$A \leq B \leq M \leq N$ ve $A \leq_e N$ ise $B \leq_e M$ dir.*

(b). *$i = 1, \ldots, n$ için $A_i \leq_e M$ ise $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \leq_e M$ dir.*

(c). *$B \leq_e N$ ve $\varphi \in Hom_R(M,N)$ ise $\varphi^{-1}(B) \leq_e M$ dir.*

(d). *$\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ essential monomorfizma olsun. O zaman $\beta\alpha : A \to C$ essential monomorfizmadır.*

Teorem 2.1.18 [10, 5.3.1 Theorem]. *Bir Q_R modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1). *Her $\xi : Q \to B$ monomorfizması parçalanabilirdir (split) (yani $Im(\xi)$, B de bir direk toplanandır).*

(2). *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir.*

$$\begin{tikzcd} & Q \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, dotted, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

(3). *Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için $Hom(\alpha, 1_Q) : Hom_R(B,Q) \to Hom_R(A,Q)$ bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.19 [10]. Teorem 2.1.18 de verilen denk koşullardan birini sağlayan bir Q_R modülüne *injektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.20 A bir grup olsun. Eğer her $z \in \mathbb{Z}$ için $z \neq 0$ iken $Az = A$ oluyorsa A *bölünebilir* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.21 [10, 4.5.5 Theorem]. *$D_{\mathbb{Z}}$ bölünebilir bir modül olmak üzere $\varphi : D_{\mathbb{Z}} \to B_{\mathbb{Z}}$ bir monomorfizma ise φ, parçalanabilirdir (yani, $Im(\varphi)$ B nin bir direk toplananıdır.)*

Teorem 2.1.22 [10, 5.5.1 Theorem]. *Bir $\mathbb{Z}$-modülün (=abel grup) injektif olması için gerek ve yeter koşul bölünebilir olmasıdır.*

Lemma 2.1.23 [10, 5.5.2 Lemma]. *Eğer D bölünebilir (=injektif) $\mathbb{Z}$-modül ise $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$, sağ R-modül olarak injektiftir.*

Tanım 2.1.24 [10]. R bir halka, M bir R-modül ve $\eta : M \to Q$ bir monomorfizma olsun. Eğer Q injektif modül ve η bir essential monomorfizma ise η ye M nin *injektif hull*'u denir. Aynı zamanda Q da M nin *injektif hull*'u olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.25 $i : \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ monomorfizması $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün bir injektif hulludur. Burada $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü injektiftir ve $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \leq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir.

Teorem 2.1.26 [10, 5.3.1 Theorem]. *Bir P_R modülü için aşağıdakiler denktir:*
(1). *Her $\xi : B \to P$ epimorfizması parçalanabilirdir (yani $Ker(\xi)$, B de bir direk toplananıdır).*
(2). *Her $\beta : B \to C$ epimorfizması ve her $\psi : P \to C$ homomorfizması için $\psi = \beta\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda : P \to B$ homomorfizması vardır. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

(3). *Her* $\beta : B \to C$ *epimorfizması için*

$Hom(1_P, \beta) : Hom_R(P,B) \to Hom_R(P,C)$ *bir epimorfizmadır.*

Tanım 2.1.27 [10]. Teorem 2.1.26 nın denk koşullarından birini sağlayan P_R modülüne *projektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.28 [10]. R bir halka, M bir R-modül ve $\xi : P \to M$ bir epimorfizma olsun. Eğer P projektif modül ve ξ small bir epimorfizma ise ξ ye M nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir.

Önerme 2.1.29 [12]. *Herhangi bir (quasi-)injektif M modülü için aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(C_1). *M nin her altmodülü, M nin bir direk toplananında essentialdır.*

(C_2). *M nin bir direk toplananına izomorf olan M nin bir A altmodülü, M nin bir direk toplananıdır.*

Önerme 2.1.30 [12]. *Bir M modülü* C_2 *şartını sağlıyorsa aşağıdaki özelliğe sahiptir.*

(C_3). M_1 *ve* M_2 *altmodülleri* $M_1 \cap M_2 = 0$ *olacak şekilde M nin direk toplananları ise* $M_1 \oplus M_2$ *de M nin bir direk toplananıdır.*

Tanım 2.1.31 R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin her X altmodülü için $\sigma : X \to N$ homomorfizması bir $\varphi : M \to N$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa N modülüne *M-injektif modül* denir. Yani aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $\varphi : M \to N$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "i"] & M \arrow[u, dotted, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Tanım 2.1.32 R bir halka ve M bir R-modül olsun. M modülü M-injektif ise M ye *self-injektif modül* denir.

Tanım 2.1.33 [10]. R bir halka ve M bir R modül olsun.

(a) M nin boş olmayan her altkümesinin, bir maksimal elemanı varsa M modülüne *Noether modül* denir.

(b) M nin boş olmayan her altkümesinin, bir minimal elemanı varsa M modülüne *Artin modül* denir.

(c) M nin altmodüllerinin $... \leq A_{i-1} \leq A_i \leq A_{i+1} \leq ...$ zinciri sonlu sayıda farklı A_i altmodülü içeriyorsa zincir *sonlu adımda durur* denir.

Tanım 2.1.34 [10]. M bir R-modül ve A, M nin bir altmodülü olsun.

(a) M nin altmodüllerinin her azalan zinciri $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq ...$ sonlu adımda duruyorsa M modülü *azalan zincir şartını sağlar* denir.

(b) M nin altmodüllerinin her artan zinciri $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq ...$ sonlu adımda duruyorsa M modülü *artan zincir şartını sağlar* denir.

Tanım 2.1.35 [10]. Bir M modülü azalan zincir şartını sağlıyorsa M ye *Artin modül* denir. Bir M modülü artan zincir şartını sağlıyorsa M ye *Noether modül* denir.

Tanım 2.1.36 [10]. R bir halka ve $r \in R$ olsun.

(1) En az bir $n \in \mathbb{N}$ için $r^n = 0$ ise r ye *nilpotent eleman* denir.

(2) Eğer $r^2 = r$ ise r ye *idempotent eleman* denir.

Tanım 2.1.37 [10]. M bir R-modül ve X, M nin bir altkümesi olsun.

$\mathbf{r}(X) = \{s \in R \mid xs = 0,\ her\ x \in X\}$ kümesine X in *sağ sıfırlayanı* ve

$\mathbf{l}(X) = \{s \in R \mid sx = 0,\ her\ x \in X\}$ kümesine de X in *sol sıfırlayanı* denir.

Sağ ve sol sıfırlayan kümesi sırasıyla R nin sağ ve sol idealleri olur.

Tanım 2.1.38 [10]. R bir halka ve M bir R-modül olsun.

$Z(M) = \{x \in M \mid bir\ I \leq_e R_R\ icin\ xI = 0\} = \{x \in M \mid \mathbf{r}(x) \leq_e R_R\}$ kümesine M nin *tekil (singular) altmodülü* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *tekil (singular) modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *tekil olmayan (nonsingular) modül* denir. Sol R-modüller için de benzer tanım yapılır.

Teorem 2.1.39 [10, 8.1.3 Theorem]. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:*

(1). *M nin her altmodülü, basit altmodüllerin bir direk toplamıdır.*

(2). *M, basit altmodüllerin bir toplamıdır.*

(3). *M, basit altmodülerin bir direk toplamıdır.*

(4). *M nin her altmodülü M nin bir direk toplananıdır.*

Tanım 2.1.40 [10]. Teorem 2.1.39 un denk koşullarından birini sağlayan bir M_R modülüne *yarıbasit (semisimple) modül* denir. R_R ve ${}_RR$ birer yarıbasit modül ise R halkasına sırasıyla *sağ* ve *sol yarıbasit halka* denir.

Teorem 2.1.41 [10, 9.1.1 Theorem]. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

(1). $\sum\limits_{A \ll M} = \bigcap\limits_{\substack{B \leq M, \\ B\ maksimal}} B$, *(2).* $\bigcap\limits_{A \leq_e M} = \sum\limits_{\substack{B \leq M, \\ B\ minimal}} B$

Tanım 2.1.42 [10].

(a). Teorem 2.1.41.(1) de tanımlanan M nin altmodülüne M nin *(Jacobson) radikali* denir ve $Rad(M)$ $(J(R))$ ile gösterilir.

(b). Teorem 2.1.41.(2) de tanımlanan M nin altmodülüne M nin *socle'ı* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.43 [10]. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin her epimorf görüntüsünün bir projektif örtüsü varsa M ye *yarı-mükemmel (semiperfect) modül* denir.

Sonuç 2.1.44 [10, 11.3.2 Corollary]. *R bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

(1). *R_R yarı-mükemmeldir ancak ve ancak*

(a). *$\overline{R} := R/Rad(R)$ yarıbasittir,*

(b). *Her ε idempotenti için $\varepsilon = \overline{e}$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotenti vardır.*

(2). *R_R nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul ${}_RR$ nin yarı-mükemmel olmasıdır.*

Tanım 2.1.45 [10]. Sonuç 2.1.44 ün (1) ve (2) koşullarını sağlayan bir R halkasına *yarı-mükemmel (semiperfect) halka* denir.

Lemma 2.1.46 (Zorn Lemma) *A boş olmayan bir küme, $\leq$ bağıntısı A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. A nın her zincirinin bir üst sınırı varsa A kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.*

3. BİR MODÜLE GÖRE İNJEKTİF MODÜLLER

Bu bölümde Mohamed Refat Moharam'ın injektif modüller ile ilgili [13] çalışması ele alınmıştır. İlk olarak injektif modüller ve temel özellikleri verilerek, Önerme 3.1.15 te verilen injektifliğin karakterizasyonu için [3] çalışmasından yararlanılmıştır. Daha sonra bir modülün essential injektif olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Lemma 3.2.2, Teorem 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 ile essential injektif modüllerin farklı karakterizasyonları incelenmiştir. Bu karakterizasyonlar için öncelikle tümleyen, graf ve injektif hull tanımları ifade edilmiş ve A-injektif modüller için verilen Baer Kriteri A-essential injektif modüller için de ispatlanmıştır.

3.1. Göreceli İnjektif Modüller

Tanım 3.1.1 [13]. N ve A iki modül olsun. Eğer her $i : X \to A$ monomorfizması ve her $\varphi : X \to N$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde $\psi : A \to N$ homomorfizması varsa N modülüne A *ya göre injektif modül* (ya da A-*injektif modül*) denir.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Başka bir deyişle, eğer A nın her X altmodülü için her $\varphi : X \to N$ homomorfizması $\psi : A \to N$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa N modülüne A-*injektiftir* denir.

Eğer bir N modülü her A modülü için A-injektif ise N ye, *injektif modül* denir.

Tanım 3.1.2 [13]. Eğer M modülü M-injektif ise M ye *quasi-injektif modül* denir.

Lemma 3.1.3 [10, 3.4.9 Lemma]. *Aşağıdaki diyagram değişmeli olsun.*

$$\begin{tikzcd} & M \\ A \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Yani, $\lambda = \beta\alpha$ sağlansın. O zaman, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1). *$Im(\alpha) + Ker(\beta) = \beta^{-1}(Im(\lambda))$,*

(2). *$Im(\alpha) \cap Ker(\beta) = \alpha(Ker(\lambda))$ olur.*

Lemma 3.1.4 [13]. *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman her $f : N \to A$ momomorfizması için $Im(f)$, A da bir direk toplanandır. Buna ek olarak A parçalanamaz bir modül ise o zaman f bir izomorfizmadır.*

İspat. N, A-injektif modül ve $f : N \to A$ bir monomorfizma olsun. $A = Im(f) \oplus Ker(\psi)$ olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & N \\ N \arrow[ur, "1_N"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[u, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 3.1.3 ten, $Im(f) + Ker(\psi) = \psi^{-1}(Im(1_N)) = \psi^{-1}(N) = A$ ve $Im(f) \cap Ker(\psi) = f(Ker(1_N)) = f(0) = 0$ olur. O halde, $A = Im(f) \oplus Ker(\psi)$ sağlanır. Yani $Im(f)$, A da direk toplanandır. Buradan A parçalanamaz olduğundan $Ker(\psi) = 0$ olmak zorundadır. Böylece $A = Im(f)$ olur. O halde f örtendir. Dolayısıyla f bir izomorfizmadır. □

Sonuç 3.1.5 [13]. *Eğer N, A nın bir altmodülü ve N, A-injektif bir modül ise, o zaman N, A nın direk toplananıdır.*

Teorem 3.1.6 [1]. *A ve N iki halka olmak üzere $\theta : A \to N$ homomorfizma ve $B \leq Ker(\theta)$ olsun. $\pi : A \to A/B$ doğal homomorfizma olmak üzere $\overline{\theta}\pi = \theta$ olacak* *şekilde tek türlü $\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır. Yani,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ A/B \arrow[ur, dotted, "\overline{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır.

Önerme 3.1.7 [13].

(1). *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman N nin her direk toplananı da A-injektiftir.*

(2). *Eğer N, A-injektif bir modül ise o zaman A nın her B altmodülü için N, B-injektif ve A/B-injektiftir.*

İspat. (1). $N = N_1 \oplus N_2$ olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd} & & N_1 \arrow[r, "i_1"'] & N_1 \oplus N_2 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & A \arrow[u, dotted, "f'"'] \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

N, A-injektif olduğundan $i_1 f = \varphi i$ olduğunu biliyoruz.

Ayrıca $\pi_1 : N_1 \oplus N_2 \to N_1$ kanonik epimorfizma olmak üzere $f' = \pi_1 \varphi$ vardır. Her $x \in X$ için $f'(x) = f(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$f'(x) = \pi_1 \varphi(x) = \pi_1 \varphi(i(x)) = \pi_1(\varphi i(x)) = \pi_1(i_1 f(x)) = 1_N(f(x)) = f(x)$ olur.

(2). N, A-injektif bir modül ve B, A nın bir altmodülü olsun. Önce N nin B-injektif olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ B_1 \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & B \arrow[ur, dotted, "g_{|_B}"'] \arrow[r, "i_2"'] & A \arrow[u, dotted, "g"'] \end{tikzcd}$$

N, A-injektif olduğundan $gi_2i_1 = f$ olacak şekilde $g : A \to N$ homomorfizması vardır. Buradan $g_{|_B} = gi_2$ olduğundan $gi_2i_1 = (g_{|_B})i_1 = f$ bulunur. Buradan N,

B-injektif olur.

Şimdi N nin A/B-injektif olduğunu gösterelim. X/B, A/B nin bir altmodülü ve $\varphi : X/B \to N$ bir homomorfizma olsun. π, A dan A/B ye doğal homomorfizmayı göstersin ve $\pi' = \pi_{|_X}$ olsun. N, A-injektif olduğundan $\varphi\pi'$, bir $\theta : A \to N$ homomorfizmasına genişler. $\theta(B) = \varphi\pi'(B) = \varphi(0) = 0$ dır. Buradan $B \leq Ker(\theta)$ olur. Böylece $\overline{\theta}\pi = \theta$ olacak şekilde $\overline{\theta} : A/B \to N$ homomorfizması vardır (Teorem 3.1.6 dan).

$$\begin{tikzcd}
 & & N \\
 & X/B \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & A/B \arrow[u, dotted, "\overline{\theta}"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\pi'"'] \arrow[r] & A \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Her $x \in X$ için $\overline{\theta}(x+B) = \overline{\theta}\pi(x) = \theta(x) = \varphi\pi'(x) = \varphi(x+B)$ olur. Yani, $\overline{\theta}(x+B) = \varphi(x+B)$ dir. Böylece φ, $\overline{\theta}$ ye genişler. O halde N, A/B-injektif olur.
$\square$

Önerme 3.1.8 [13]. *(Baer Kriteri) Bir N modülünün A-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için N nin aR-injektif olmasıdır.*

İspat. N modülü A-injektif olsun. Önerme 3.1.7 den, N modülünün aR-injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $a \in A$ için N modülü aR-injektif olsun.

$S = \{(B, \psi) : X \leq B \leq A$ ve $\psi : B \to N, \varphi$ nin genişlemesi$\}$ kümesini tanımlayalım. $X \leq X \leq A$ alırsak $\varphi : X \to N$ kendisinin (φ nin) genişlemesidir. Buradan $(X, \varphi) \in S$ olur. Yani S kümesi boştan farklıdır. Şimdi $C = \bigcup B_i$ olsun. $\psi : C \to N$, φ nin genişlemesidir. Buradan $(C, \psi) \in S$ olur ve S kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma'dan $X \leq B \leq A$ ve $\psi : B \to N$ homomorfizması φ nin genişlemesi olacak şekilde bir maksimal (B, ψ) çifti vardır. $B \leq_e A$ olduğunu gösterelim. Bunun için sıfırdan farklı her $a \in A$ için $aR \leq A$ olmak üzere $aR \cap B \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $aR \cap B = 0$ olduğunu kabul edelim. $aR \neq 0$ olduğundan $B = 0$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir. O halde $aR \cap B \neq 0$ dır. $B \neq A$ olduğunu varsayalım ve $a \in A \setminus B$ elemanını göz önüne alalım. $K = \{r \in R : ar \in B\}$ olsun. Buradan $aK \neq 0$ olduğu açıktır. $\mu(ak) = \psi(ak)$ olacak şekilde $\mu : aK \to N$ tanımlayalım. Hipotezden μ, $\nu : aR \to N$ homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi $\chi(b + ar) = \psi(b) + \nu(ar)$ olacak şekilde $\chi : B + aR \to N$ homomorfizması tanımlayalım. $r \in K$ için $b + ar = 0$ ise $\chi(b + ar) = \psi(b) + \nu(ar) = \psi(b) + \mu(ar) = \psi(b) + \psi(ar) = \psi(b + ar) = \psi(0) = 0$ olduğundan χ iyi tanımlıdır. Ancak $(B + aR, \chi)$ çiftinin varlığı, (B, ψ) nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $B = A$ dır ve φ, $\psi : A \to N$ ye genişler. $\square$

Tanım 3.1.9 [13]. M ve E iki modül olsun. Eğer $f : M \to E$ bir monomorfizma ise (E, f) çiftine M modülünün bir *genişlemesi* denir. Eğer $Im(f) \leq_e E$ ise bu genişlemeye M modülünün *essential genişlemesi* denir. Eğer $Im(f)$ injektif ise bu genişlemeye M nin *injektif genişlemesi* denir. [6] her modülün bir minimal injektif ve aynı zamanda bir maksimal essential genişlemeye sahip olduğunu göstermişlerdir. Bu genişleme M nin *injektif hullu* olarak adlandırılır ve $E(M)$ ile gösterilir. İnjektif hull, izomorfizma farkıyla tek türlüdür.

Lemma 3.1.10 [13]. *Bir N modülünün A-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in Hom(E(A), E(N))$ için $f(A) \leq N$ olmasıdır.*

İspat. $E(N)$ nin injektif olduğunu biliyoruz. $f \in Hom(A, E(N))$ homomorfizmasını göz önüne alalım. $X \leq A$ ve $g : X \to N$ bir homomorfizması varsa aşağıdaki diyagramda olduğu gibi $E(N)$ injektif olduğundan g, $f : A \to E(N)$

homomorfizmasına genişler.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r] & E(N) \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & A \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Hipotezden, $f(A) \leq N$ olduğundan $f : A \to N$, g nin bir genişlemesidir. Böylece N, A-injektif olur.

Karşıt olarak, N, A-injektif bir modül ve $X = \{a \in A : f(a) \in N\} \leq A$ olsun. N, A-injektif olduğundan aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir g homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r] & E(N) \\
X \arrow[ur] \arrow[r] & A \arrow[u, dotted, "g"'] \arrow[r] & E(A) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

$f_{|A} = g$ alırsak g, X den N ye homomorfizmanın bir genişlemesidir.

Burada $N \cap (g-f)A = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $n \in N \cap (g-f)A$ alalım. Böylece $n \in N$ ve $n = (g-f)(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. O zaman $f(a) = g(a) - n \in N$ dir. Buradan, X kümesinin tanımından $a \in X$ olur. Böylece $n = g(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$ olur. Yani, $N \cap (g-f)A = 0$ bulunur. Buradan, $N \leq_e E(N)$ ve $(g-f)A \leq E(N)$ olduğundan $(g-f)A = 0$ olur. O halde $f(A) = g(A) \leq N$ olur. Buradan istenen sağlanır. $\square$

Tanım 3.1.11 [12]. M bir modül ve X, M nin bir altmodülü olsun. X, M nin bir Y altmodülü için $X \cap Y = 0$ özelliğine göre maksimal ise X altmodülüne Y nin *tümleyeni (complement)* denir.

Tanım 3.1.12 [13]. A ve B iki modül ve $f : A \to B$ bir homomorfizma olsun. $< f >= \{a + f(a) : a \in A\}(= \{a - f(a) : a \in A\})$ kümesi $A \oplus B$ toplamının bir altmodülüdür ve f nin *grafi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.13 [13]. A ve B iki modül ve $f : A \to B$ bir homomorfizma olsun. $X \leq A$ olmak üzere $g : X \to B$ homomorfizmasına A dan B ye *kısıtlanmış (partial) homomorfizma* denir. Ayrıca g nin bir *genişlemesi*, $X \leq Y \leq A$ ve $h_{|X} = g$ olacak şekilde $h : Y \to B$ bir homomorfizmadır. $X \leq A$ olsun. Eğer bir $f : X \to B$ kısıtlanmış homomorfizma için f nin A da öz genişlemesi yoksa f ye *maksimal kısıtlanmış homomorfizma* denir.

Lemma 3.1.14 [13]. *A ve B bir M modülünün altmodülleri ve $M = A \oplus B$ olsun. M nin bir C altmodülünün B nin M de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul C nin, A dan B ye maksimal kısıtlanmış homomorfizmasının grafi olmasıdır.*

İspat. C, A dan B ye maksimal kısıtlanmış homomorfizmasının bir grafı olsun. $f : X \to B$, A dan B ye bir maksimal kısıtlanmış homomorfizma ve $b \in < f > \cap B$ olsun. O zaman $b = x + f(x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buradan $x = b - f(x) \in B \cap A = 0$ dır. Buradan f homomorfizma olduğundan $x = 0$ için $f(x) = 0$ dır. Böylece $b = 0$ olacağından $< f > \cap B = 0$ dır. Şimdi $< f > \leq C \leq M$ ve $C \cap B = 0$ olduğunu varsayalım. π_A ve π_B sırasıyla A ve B üzerine M nin projeksiyonlarını belirtsin. Yani $\pi_A : A \oplus B \to A$, $\pi_B : A \oplus B \to B$ olsun. $\pi_{A|_C} : C \to A$ bir monomorfizmadır. Çünkü $Ker(\pi_{A|_C}) = C \cap B = 0$ dır. $Y = \pi_A(C)$ ve $X = \pi_A(< f >)$ olsun. O zaman $X = \pi_A(< f >) \leq \pi_A(C) = Y$ dir. Her $y \in Y$, $c \in C$ için $y = \pi_A(c)$ iken $g : Y \to B$; $g(y) = \pi_B(c)$ ile tanımlansın. O zaman her $x \in X$ için $g(x) = \pi_B(x + f(x)) = f(x)$ olur. Buradan $g : Y \to B$, f ye genişler. $f : X \to B$ nin maksimalliğinden $X = Y$ bulunur. O zaman $C = \pi_A^{-1}(Y) = \pi_A^{-1}(X) =< f >$ dir. Buradan $< f >$, B nin M de tümleyeni olur. Karşıt olarak C, M de B nin tümleyeni olsun. $X = A \cap (C \oplus B)$ ve $\pi : C \oplus B \to B$ projeksiyonunu alalım. $\pi_{|X} = f$ maksimal kısıtlanmış homomorfizma olsun. O zaman $< f >$, B nin tümleyenidir. $C \leq M = A \oplus B$ olduğundan verilen bir $c \in C$ elmanını $a \in A$, $b \in B$ için $c = a + b$ şeklinde yazarız. O zaman $c - b = a \in A \cap (C \oplus B) = X$ dir. Buradan $\pi(a) = \pi(c-b) = \pi(c) - \pi(b) = 0 - b$ bulunur. Böylece $c = a - f(a) \in < f >$ olur. O zaman $C \subseteq < f >$ olup $C = < f >$ dir. Yani C, B nin bir tümleyeni olur. $\square$

Önerme 3.1.15 [13]. *A ve B bir M modülünün altmodülleri ve $M = A \oplus B$ olsun. B nin A-injektif olması için gerek ve yeter koşul B nin M de her C tümleyeni için $M = C \oplus B$ olmasıdır.*

İspat. B, A-injektif ve C, B nin M de tümleyeni olsun. O zaman Lemma 3.1.14 ten, $X \leq A$ olmak üzere $C = < f >$ olacak şekilde $f : X \to B$ bir maksimal kısıtlanmış homomorfizması vardır. B, A-injektif olduğundan $X = A$ olur ve buradan $C = \{a + f(a) \colon\ a \in A\}$ dır. Her $a \in A$ için $a = a + f(a) - f(a) \in C \oplus B$ olur. Böylece 3.1.14 gereğince $M = C \oplus B$ bulunur.

Karşıt olarak, $X \leq A$ ve $f : X \to B$ dönüşümü, A dan B ye homomorfizmanın maksimal kısıtlanmışı olsun. Lemma 3.1.14 ten $< f >$, M de B nin bir tümleyeni olur. Böylece hipotezden, $M = < f > \oplus B$ olur. Şimdi $A = X$ olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir $a \in A$ alalım. O zaman bazı $x \in X$ ve $b \in B$ için $a = x + f(x) + b$ dir. Buradan $a - x = f(x) + b \in A \cap B = 0$ olur. Böylece $a = x \in X$ dir. Böylece $A = X$ bulunur. $\square$

3.2. A-Essential İnjektif Modüller

Tanım 3.2.1 [13]. A ve B iki modül olsun. $Ker(f) \leq_e X$ olacak şekilde A nın her X altmodülü için $f : X \to B$ kısıtlanmış homomorfizması A ya genişletilebiliyorsa, B ye *A-essential injektif modül* denir. Yani $Ker(f) \leq_e X$ olacak şekilde aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $g : A \to B$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd}
 & & B \\
0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & A \arrow[u, dotted, "g"']
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.2.2 [13]. *A, B herhangi iki modül ve $M = A \oplus B$ olsun. O zaman B nin A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul A nın her X altmodülü için B nin (A/X)-injektif olmasıdır.*

İspat. B, A-essential injektif ve $X \leq_e A$ olmak üzere $X \leq C \leq A$ olsun.
$\Phi : C/X \to B$ homomorfizması ve her $c \in C$ için $\overline{c} = c + X$ iken $\phi : C \to B$; $\phi(c) = \Phi(\overline{c})$ ile tanımlansın. $X \leq Ker(\phi)$ olduğu açıktır. $X \leq Ker(\phi)$ ve Lemma 2.1.17 gereğince $Ker(\phi) \leq_e C$ olur. Hipotezden her $c \in C$ için $\phi(c) = \psi(c)$ olacak şekilde $\psi : A \to B$ homomorfizması vardır. Her $c \in C$ için $\Psi : A/X \to B$ dönüşümünü $\Psi(\overline{c}) = \psi(c)$ ile tanımlayalım. ψ homomorfizma olduğundan Ψ iyi tanımlıdır. Böylece her $\overline{c} \in C/X$ için $\Psi(\overline{c}) = \psi(c) = \phi(c) = \Phi(\overline{c})$ bulunur. O halde her $X \leq_e A$ için B, A/X-injektif olur.
Karşıtı için $C \leq A$ ve $Ker(\alpha) \leq_e C$ olacak şekilde $\alpha : C \to B$ bir homomorfizma olsun. $\overline{\alpha} : C/Ker(\alpha) \to B$, $\overline{\alpha}(c + Ker(\alpha)) = \alpha(c)$ ile tanımlayalım. Şimdi D, C nin A da bir tümleyeni olsun ve $X = Ker(\alpha) \oplus D$ şeklinde tanımlayalım. Buradan $X \leq_e C \oplus D \leq_e A$ olduğundan $X \leq_e A$ olur. $\phi : C/Ker(\alpha) \to A/X$ $\phi(c + Ker(\alpha)) = c + X$ ile tanımlayalım. ϕ iyi tanımlı ve monomorfizmadır. Hipotezden diyagram değişmeli olacak şekilde $\overline{\beta} : A/X \to B$ vardır. Yani her $c \in C$ için $\overline{\alpha}(c + Ker(\alpha)) = \overline{\beta}\phi(c + Ker(\alpha)) = \overline{\beta}(c + X)$ dir. $\beta : A \to B$, $\beta(c) = \overline{\beta}(c + X)$ ile tanımlayalım. O zaman her $c \in C$ için $\beta(c) = \alpha(c)$ dir. Böylece β, A-essential injektif olur. □

Teorem 3.2.3 [13]. *A, B iki modül ve $M = A \oplus B$ olsun. B nin A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul $C \cap A \leq_e A$ olacak şekilde B nin her tümleyen C altmodülü için $M = C \oplus B$ olmasıdır.*

İspat. B, A-essential injektif ve $C \cap A \leq_e A$ olacak şekilde C, B nin M de tümleyeni olsun. $X = A \cap (C \oplus B)$ ve $\varphi : X \to B$ dönüşümü, $C \oplus B \to B$ projeksiyonunun kısıtlanışı olsun.
$Ker(\varphi) = C \cap X = C \cap A \cap (C \oplus B) = C \cap A \leq_e A$ dır. O zaman hipotezden φ dönüşümü, $\phi : A \to B$ homomorfizmasına genişletilebilir. Böylece B, A-injektif

olur. Önerme 3.1.15 gereğince $M = C \oplus B$ bulunur.

Karşıt olarak, $X \leq A$ ve $Ker(\varphi) \leq_e X$ olacak şekilde $\varphi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. φ nin bu şartı sağlayan maksimal homomorfizma olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $Ker(\varphi) \leq_e A$ olur. Buradan $Ker(\varphi) \leq A \cap <\varphi>$ dir. O halde $Ker(\varphi) \leq A \cap <\varphi> \leq A$ ve $Ker(\varphi) \leq_e A$ olacağından $A \cap <\varphi> \leq_e A$ bulunur. Açıkça $<\varphi> \cap B = 0$ olur. Şimdi C, B nin $<\varphi>$ yi içeren bir tümleyeni olsun. O zaman $A \cap <\varphi> \leq A \cap C \leq A$ ve $A \cap <\varphi> \leq_e A$ olduğundan $A \cap C \leq_e A$ dır. Hipotezden $M = C \oplus B$ dir. Şimdi $\phi : A \to B$ dönüşümü, $C \oplus B \to B$ projeksiyonunun kısıtlanışı olsun. $x \in X$ alalım. O zaman $x - \varphi(x) \in <\varphi> \leq C$ olduğundan $\phi(x) = \varphi(x)$ olur.

□

Önerme 3.2.4 [13]. *Bir B modülünün A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul $Ker(\psi) \leq_e A$ olacak şekilde her $\psi \in Hom(A, E(B))$ için $\psi(A) \leq B$ olmasıdır.*

İspat. $Ker(\psi) \leq_e A$ olacak şekilde her $\psi \in Hom(A, E(B))$ için $\psi(A) \leq B$ olsun ve $\psi_{|X} = f$ alalım. $Ker(f) = X \cap Ker(\psi) \leq_e X \cap A = X$ olduğundan $Ker(f) \leq_e X$ dır. $\varphi \in Hom(E(A), E(B))$ alalım. Buradan $\varphi_{|A} = \psi$ olur. $\varphi(A) = \psi(A) \leq B$ olduğu görülür. $\varphi \in Hom(E(A), E(B))$ için $\varphi(A) \leq B$ olduğundan Lemma 3.1.10 gereğince B, A-injektiftir. Burada $Ker(f) \leq_e X$ olduğundan B, A-essential injektif olduğu aşağıdaki diyagramda da görülür.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r] & E(B) \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & A \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Karşıt olarak, $X = \{a \in A : \psi(a) \in B\}$, $\psi : A \to E(B)$ ve $Ker(\psi) \leq_e A$ olsun. Buradan $Ker(\psi_{|X}) = X \cap Ker(\psi) \leq_e X \cap A = X$ dir. Hipotezden $\psi_{|X}$ dönüşümü $\phi : A \to B$ ye genişletilebilir.

İddia. $B \cap (\phi - \psi)A = 0$.

$b \in B \cap (\phi - \psi)A$ ise $b = (\phi - \psi)(a)$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. O zaman $b = \phi(a) - \psi(a)$ ise $\psi(a) = \phi(a) - b \in B$ dir. Buradan $a \in X$ tir. O zaman $b = \phi(a) - \psi(a) = \psi(a) - \psi(a) = 0$ dır. Böylece $B \cap (\phi - \psi)A = 0$ bulunur. $B \leq_e E(B)$ olduğundan $(\phi - \psi)A = 0$ olur ve $\psi(A) = \phi(A) \leq B$ olduğundan $\psi(A) \leq B$ dir. □

Önerme 3.2.5 [13]. *A ve B modülleri için B, A-essential injektif modül olsun. $C \leq A$ ise B, C-essential injektiftir.*

İspat. X, C nin bir altmodülü ve $Ker(\phi) \leq_e C$ olacak şekilde $\phi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. B, A-essential injektif olduğundan her $x \in X$ için $\phi(x) = \psi(x)$ olacak şekilde $\psi : A \to B$ vardır. $\psi_{|C} : C \to B$ homomorfizmasını göz önüne alalım. O zaman her $x \in X$ için $\psi_{|C}(x) = \psi(x) = \phi(x)$ dir. Buradan B, C-essential injektif bulunur. □

Aşağıdaki Önerme Baer Kriterinin essential-injektifliğe bir genellemesi olarak verilebilir.

Önerme 3.2.6 [13]. *Bir B modülünün A-essential injektif olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için B nin aR-essential injektif olmasıdır.*

İspat. B modülü A-essential injektif ise Önerme 3.2.5 ten B nin aR-essential injektif olduğu açıktır.

Karşıt olarak, her $a \in A$ için B modülü aR-essential injektif olsun. $X \leq A$ ve $Ker(\phi) \leq_e X$ olacak şekilde $\phi : X \to B$ bir homomorfizma olsun. $S = \{(Y, \psi) : X \leq Y \leq A, \psi : Y \to B$ homomorfizması ϕ nin genişlemesi, $Ker(\psi) \leq_e Y\}$ kümesini göz önüne alalım. $(X, \phi) \in S$ olduğundan S kümesi boştan farklıdır. Zorn Lemma'dan ψ, ϕ nin genişlemesi olacak şekilde (Y, ψ) maksimal çiftini seçebiliriz. Buradan $Y \leq_e A$ olduğu açıktır. $Y \neq A$ olduğunu kabul edelim ve $a \in A \setminus Y$ elemanını göz önüne alalım. $K = \{r \in R : \ ar \in Y\}$ olsun. O zaman $aK \neq 0$ dır. $\mu : aK \to B$, $\mu(ak) = \psi(ak)$ olarak tanımlayalım. $Ker(\mu) = aK \cap Ker(\psi)$ ve $Ker(\psi) \leq_e Y$ olduğundan $Ker(\mu) \leq_e aK$ dır. Açıkça $aK \leq aR$ dir ve hipotezden μ, $\nu : aR \to B$

homomorfizmasına genişletilebilir. $\chi : Y + aR \to B$ dönüşümü $\chi(y+ar) = \psi(y) + \nu(ar)$ ile tanımlayalım. Eğer $y + ar = 0$ ise $ar = -y \in Y$ olduğundan $r \in K$ olur ve böylece $\chi(y+ar) = \psi(y) + \nu(ar) = \psi(y) + \mu(ar) = \psi(y) + \psi(ar) = 0$ olur. Böylece χ iyi tanımlıdır. Ayrıca $Y \leq_e A$ olduğundan $Ker(\psi) \leq_e Y \leq_e Y + aR \leq A$ olur. Buradan $Ker(\psi) \leq_e Y + aR$ dir. O halde $(\chi, Y + aR) \in S$ olur. Bu durum (Y, ψ) çiftinin maksimalliği ile çelişir. Böylece $Y = A$ olur. O zaman $\psi : A \to B$ dönüşümü, ϕ nin genişlemesidir. O halde B modülü A-essential injektif olur. $\square$

4. PRINCIPALLY İNJEKTİF MODÜLLER

Bu bölümde Nicholson ve Yousif'un kullandığı principally injektif (P-injektif) modüller ile ilgili karakterizasyonlar incelenmiştir [14]. Principally injektif modüller için denk koşullar çalışılmıştır [8]. P-injektif modüller için dengelenmiş (balanced) modül ve sadık (faithfull) modül tanımları kullanılarak P-injektif modüllere örnekler verilmiştir. Ayrıca her cismin bir sağ P-injektif halka olduğu görülmüştür. Son olarak, endomorfizma halkalarının P-injektifliği ile ilgili denk şartlar çalışılmıştır.

Bir M modülünün bir X altkümesi için $\mathbf{r}(X)$, X in sağ sıfırlayanını ve $\mathbf{l}(X)$ sol sıfırlayanını göstersin. Bir R halkası için $J(R)$, R nin Jacobson radikalini, $Z(R_R)$ ve $Z(_RR)$ sırasıyla sağ ve sol singular ideallerini, $Soc(R_R)$ ile $Soc(_RR)$ de R nin sağ ve sol socle'larını belirtsin.

4.1. P-İnjektif Modülün Temel Özellikleri

Tanım 4.1.1 [14]. R bir halka, M_R bir R-modül olsun. Eğer $a \in R$ için aR den M ye her R-homomorfizması α, R ye genişletilebiliyorsa M_R ye *principally injektif (*kısaca *P-injektif) modül* denir. Yani aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir f homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & & M \\ 0 \arrow[r] & aR \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"] & R \arrow[u, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

Açıkça her injektif modül P-injektiftir.

Tanım 4.1.2 [1]. R bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $a \in aRa$ ise R halkasına *von Neumann regular halka* denir.

R nin von Neumann regular halka olması için gerek ve yeter koşulun her esas sağ idealin direk toplanan olması gerektiğini biliyoruz.

Ayrıca "R nin von Neumann regüler olması için gerek ve yeter koşul her sağ modülün P-injektif olmasıdır".

Şimdi P-injektifliği karakterize eden aşağıdaki temel Lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1.3 [14]. *Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:*

(1). *R_R, P-injektiftir.*

(2). *Her $a \in R$ için $\mathbf{lr}(a) = Ra$ dır.*

(3). *Eğer $a, b \in R$ için $\mathbf{r}(b) \subseteq \mathbf{r}(a)$ ise $Ra \subseteq Rb$ dir.*

(4). *Her $a, b \in R$ için $\mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] = \mathbf{l}(b) + Ra$ dır.*

İspat. (1), (2), (3)'ün birbirine denkliği ve (4) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesi [8] çalışmasında gösterilmiştir. Biz burada aşağıdaki gerektirmeyi göstereceğiz.

(3) $\Rightarrow$ (4). $a, b \in R$ için $\mathbf{r}(b) \subseteq \mathbf{r}(a)$ ise $Ra \subseteq Rb$ dir. $\mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] = \mathbf{l}(b) + Ra$ olduğunu gösterelim. $bR \cap \mathbf{r}(a) = \{t | t \in bR$ ve $t \in \mathbf{r}(a)\} = \{t | t = br, r \in R$ ve $at = 0\} = \{br | abr = 0, r \in R\}$ dir. $x \in \mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)]$ olsun. Buradan $xbr = 0$ dır. O halde $\mathbf{r}(ab) \subseteq \mathbf{r}(xb)$ olur. (3) ten, $R(xb) \subseteq R(ab)$ sağlanır. Böylece $r_1 \in R$ için $1xb = r_1 ab$ olur. Buradan $xb - r_1 ab = (x - r_1 a)b = 0$ bulunur. O halde $x - r_1 a \in \mathbf{l}(b)$ dir. Böylece $x \in \mathbf{l}(b) + Ra$ olur. Yani $\mathbf{l}[bR \cap \mathbf{r}(a)] \subseteq \mathbf{l}(b) + Ra$ elde edilir. □

Tanım 4.1.4 [14]. Lemma 4.1.3 ün denk koşullarından herhangi birini sağlayan bir R halkası *sağ principally injektif (*kısaca *sağ P-injektif)* olarak adlandırılır ve *sağ principal genişleme (extension) özelliğini sağlar* denir.

Teorem 4.1.5 [10, 13.2.1 Teorem]. *R bir halka ve R_R bir Noether modül olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*

(1). *R_R injektiftir.*

(2). R_R *bir eşüreteçtir.*

(3). $_RR$ *injektiftir.*

(4). $_RR$ *bir eşüreteçtir.*

(5). R_R *nin her A altmodülü için* $\boldsymbol{rl}(A) = A$ *ve* $_RR$ *nin her B altmodülü için* $\boldsymbol{lr}(B) = B$ *dir.*

Tanım 4.1.6 [10]. Teorem 4.1.5 in denk koşullarından birini sağlayan bir R halkasına *quasi-Frobenius halka* denir, kısaca R, QF halka olarak ifade edilir. Açıkça bir QF halkası sağ self injektif olan bir sağ Noether halkadır.

Tanım 4.1.7 [4]. Bir R halkasının her bölüm halkası (quotient ring) quasi-Frobenius ise R halkasına *(dengelenmiş) balanced halka* denir.

Tanım 4.1.8 [4]. M bir R-modül olsun. M nin her R-endomorfizması ile değişmeli olan M nin abel grup olarak her endomorfizması bir halka elemanı ile çarpım biçiminde veriliyorsa M ye *dengelenmiş modül (balanced module)* ya da başka bir deyişle *M çifte merkezleyen özelliğine (double centralizer property) sahiptir* denir. Yani her toplamsal f endomorfizması, her R-endomorfizması g için $fg = gf$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman her $x \in M$ için $f(x) = xr$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Balanced olmayan modüller durumunda böyle bir f bulunamaz.

Şimdi bu tanım yardımıyla balanced halka aşağıdaki biçimde de tanımlanabilir.

Tanım 4.1.9 [4]. Bir R halkası için her sağ R-modül balanced ise bu halkaya *balanced halka* denir.

Tanım 4.1.10 Sıfırdan başka sıfırlayanı olmayan bir modüle *sadık (faithful) modül* denir.

Açıkça sağ self-injektif ve von Neumann regüler halkalar sağ P-injektif halkalara birer örnektir. Ancak sağ P-injektif olan fakat sağ self-injektif olmayan halkalar vardır.

Örnek 4.1.11 [14]. Değişmeli QF-1 halkaları (yani sadık (faithful) modülleri balanced olan halkalar) P-injektiftir.

Örnek 4.1.12 [14]. R bir sağ P-injektif halka olsun. $U \subseteq R$ bir sol çarpımsal altküme (denominator set) olsun. Bu durumda bölüm halkası
$Q = \{u^{-1}r : u \in U, r \in R\}$ sağ P-injektiftir.

Lemma 4.1.13 [14]. *Her i indisi için R_i halka olmak üzere, ΠR_i çarpımının sağ P-injektif olması için gerek ve yeter koşul her R_i nin sağ P-injektif olmasıdır.*

İspat. $\prod R_i$, sağ P-injektif olsun. R_i nin her i indisi için sağ P-injektif olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
& R_i \arrow[r, "i_1"] & \prod R_i \\
aR_i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & R_i \arrow[u, dotted, "g"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$fi = i_1\alpha$ vardır. Şimdi $gi = \alpha$ olacak şekilde g nin var olduğunu gösterelim. $\pi_i : \prod R_i \to R_i$ kanonik dönüşümü için $\pi_i f = g$ tanımlayalım. O zaman $gi = \pi_i fi = \pi_i i_1 \alpha = \alpha$ olduğundan R_i, sağ P-injektif olur. Karşıt olarak, her i için R_i sağ P-injektif olsun.

$$\begin{tikzcd}
& \prod R_i \arrow[r, "\pi_i"] & R_i \\
aR_i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "i"'] & R_i \arrow[u, dotted, "k"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Buradan $hi = \pi_i\beta$ vardır. İlk kısımdaki gibi $ki = \beta$ olacak şekilde
$k : R_i \to \prod R_i$ homomorfizmasının var olduğunu gösterelim. $i_1 : R_i \to \prod R_i$ doğal

içerim dönüşümü olmak üzere $k = i_1 h$ olsun. O zaman $ki = i_1 hi = i_1 \pi_i \beta = \beta$ olduğundan istenen gösterilmiş olur. $\square$

4.2. P-İnjektif Modül Karakterizasyonu

Lemma 4.2.1 [14]. *Herhangi bir tamlık bölgesi D nin sağ P-injektif olması için gerek ve yeter koşul D nin bir bölümlü halka (division ring) olmasıdır.*

Lemma 4.2.1 gereğince her cisim açıkça bir sağ P-injektif halkadır. Ayrıca polinom halkası P-injektif olmak zorunda değildir.

Lemma 4.2.2 [14]. *R, her sonlu üretilmiş ideali esas ideal olan bir tamlık bölgesi olsun. O zaman R nin sıfırdan farklı her m elemanı için R/mR, P-injektif bir halkadır.*

İspat. R halkasının her m elemanı için R/mR nin P-injektif olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 4.1.3.(2) den, $\mathbf{lr}(\overline{a}) = (R/mR)(\overline{a})$ olduğunu göstermeliyiz. $R/mR = \overline{R}$ yazalım. $\overline{b} = b + mR \in R/mR$ olmak üzere $\overline{b} \in \mathbf{lr}(\overline{a})$ olsun. Hipotezden R nin sonlu üretilmiş ideali esas ideal olduğundan $mR + aR$ ideali dR idealine eşit olur. Yani, $mR + aR = dR$ dir. Şimdi $m = dm_1$, $a = dm_2$ olsun. $\overline{b} \in \mathbf{lr}(\overline{a})$ olduğundan $\overline{ax} = \overline{0}$ ve $\overline{b}\overline{x} = \overline{0}$ olacak şekilde $\overline{x} \in \overline{R}$ vardır. $\overline{x} = m_1 + mR$ için $\overline{0} = (a + mR)(m_1 + mR) = am_1 + mR$ dir. Buradan $\overline{am_1} = \overline{0}$ olur. Benzer şekilde, $\overline{0} = (b + mR)(m_1 + mR) = bm_1 + mR$ olduğundan $\overline{b}\overline{m_1} = \overline{0}$ bulunur. R tamlık bölgesi olduğundan $b \in dR$ olur. Buradan $\overline{b} \in \overline{dR} = \overline{a}\overline{R}$ dir. O zaman R değişmeli olduğundan $\overline{a}\overline{R} = \overline{R}\overline{a}$ dir. O halde $\mathbf{lr}(\overline{a}) \subseteq \overline{a}\overline{R}$ sağlanır. Karşıt olarak, $\overline{a}\overline{R} \subseteq \mathbf{lr}(\overline{a})$ olduğu benzer şekilde gösterilir. $\square$

Örnek 4.2.3 Lemma 4.2.2 den sıfırdan farklı her n tamsayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ P-injektiftir. Yani $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ olduğundan sıfırdan farklı her $n \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}_n$ P-injektif halka olur.

Teorem 4.2.4 [14]. *R bir sağ P-injektif halka ve $a, b \in R$ olsun.*

(1). *Eğer bR, aR ye gömülürse Rb, Ra nın homomorf görüntüsüdür.*

(2). *Eğer aR, bR nin homomorf görüntüsü ise Ra, Rb ye gömülür.*

(3). *Eğer $bR \cong aR$ ise $Ra \cong Rb$ dir.*

İspat. (1). Eğer $\sigma : bR \to aR$ monomorfizma ise $v \in R$ için $\sigma = v\cdot$ olsun. O zaman $\sigma(br) = vbr = aur$ olduğundan $u \in R$ olmak üzere $vb = au$ bulunur. Buradan $\varphi : Ra \to Rb$, $(ra)\varphi = (ra)u = r(vb)$ tanımlanır. $\mathbf{r}(vb) \subseteq \mathbf{r}(b)$ olduğundan ve Lemma 4.1.3 (3) ten $Rb \subseteq Rvb$ dir. O zaman her $b \in Rb$ için $1.b = rvb = (ra)\varphi$ olacak şekilde $ra \in Ra$ vardır. Buradan φ örten olur. Dolayısıyla φ epimorfizmadır.

(2). Eğer $\sigma : bR \to aR$ epimorfizma ise (1) deki gibi $u, v \in R$ olmak üzere $\sigma = v\cdot$, $vb = au$ ve $\varphi : Ra \to Rb$, $(ra)\varphi = r(vb)$ olsun. Buradan $s \in R$ olmak üzere $a = \sigma(bs) = vbs$ yazarız. O zaman $(ra)\varphi = 0$ ise $rau = rvb = 0$ olur. Buradan $ra = r(vbs) = r\sigma(bs) = 0$ bulunur. Böylece φ birebir olur. Dolayısıyla φ monomorfizmadır.

(3). (1) ve (2) den açıktır. □

Aşağıdaki teorem [12] de verilen C_2 ve C_3 şartlarının bir P-injektif halka için sağlandığını gösterir.

Teorem 4.2.5 [14]. *R bir sağ P-injektif halka ve $a, b \in R$ olsun.*

(1). *$aR \cong bR$ ve $bR \leq_d R$ ise $aR \leq_d R$ dir.*

(2). *$aR \leq_d R$, $bR \leq_d R$ ve $aR \cap bR = 0$ ise $(aR \oplus bR) \leq_d R$ dir.*

İspat. (1). $aR \cong bR$ ve $bR \leq_d R$ olsun. $bR = eR$, $e^2 = e$ ve $\sigma : aR \to bR$ bir izomorfizma iken $\sigma(a) = bd$ ve $\sigma^{-1}(e) = ac$ olsun. O zaman $bdc = \sigma(a)c = \sigma(ac) = \sigma(\sigma^{-1}(e)) = e$ olur. Şimdi $f = cbd$ iken f nin bir idempotent olduğunu gösterelim. $f^2 = (cbd)(cbd) = c\sigma(a)cbd = c\sigma(ac)bd = cebd$ olur. $bR = eR$ olduğundan $bd = es$ olacak şekilde $d, s \in R$ vardır. Buradan $cebd = cees = ces = cbd = f$ bulunur. Ayrıca $af = a(cbd) = \sigma^{-1}(e)bd = \sigma^{-1}(e)es = \sigma^{-1}(e^2)s = \sigma^{-1}(e)s = \sigma^{-1}(es) = \sigma^{-1}(bd) = a$ dır. Her $r \in R$ için $fr = cbdr = c\sigma(a)r =$

$c\sigma(ar)$ dir. Bu durum her $r \in R$ için sağlandığından özel olarak a nın sağ sıfırlayanı $x \in R$ için de sağlanır. $x \in \mathbf{r}(a)$ ise $ax = 0$ dır. Yani $fx = cbdx = c\sigma(a)x = c\sigma(ax) = c\sigma(0) = 0$ dır. O halde $x \in \mathbf{r}(f)$ dir. Buradan $\mathbf{r}(a) \subseteq \mathbf{r}(f)$ ve Lemma 4.1.3 (3) gereği $Rf \subseteq Ra$ olur. Ayrıca $af = a$ olduğundan $Ra \subseteq Rf$ dir. Yani $Ra = Rf$ dir. Teorem 4.2.4 ten $fR \cong aR$ ve f idempotent olduğundan $R = fR \oplus (1-f)R = aR \oplus (1-f)R$ olur. Böylece $aR \leq_d R$ olur.

(2). $aR \leq_d R$, $bR \leq_d R$ ve $aR \cap bR = 0$ olsun. $aR \oplus bR = eR \oplus (1-e)bR$ olacak şekilde $aR = eR$, $e^2 = e$ alalım. Buradan $(1-e)bR \cong bR$ olur. Böylece (1) den $(1-e)bR = gR$, $g^2 = g$ dir. O halde $(1-e)br = gt$ olacak şekilde $r, t \in R$ vardır. Buradan $e(1-e)br = egt = (e-e^2)br = 0$ bulunur. Yani $eg = 0$ dır. O zaman $h = e + g - ge$ alalım. $h^2 = (e+g-ge)(e+g-ge) = e^2 + eg - ege + ge + g^2 - g^2e - ge^2 - geg + gege = e + ge + g - ge - ge = e + g - ge = h$ olup h bir idempotenttir. O halde $aR \oplus bR = hR$ olur. Yani $(aR \oplus bR) \leq_d R$ bulunur. □

Sonuç 4.2.6 [14, Corollary 1.2]. *R bir sağ P-injektif halka olmak üzere $a \in R$ için aşağıdakiler denktir:*

(1). *aR projektiftir.*

(2). *$aR \leq_d R$ dir.*

(3). *aR, P-injektiftir.*

Teorem 4.2.7 [14]. *R bir halka, M_R bir sağ R-modül ve $S = EndM_R$ iken β, $\gamma \in S$ olsun.*

(1). *Her $\beta \in S$ için M, $Ker\beta$ yı üretiyorsa, o zaman S nin sağ P-injektif olması için gerek ve yeter koşul $Ker\beta \subseteq Ker\gamma$ ise $\gamma \in S\beta$ olmasıdır.*

(2). *Her $\beta \in S$ için M, $M/\beta M$ nin eşüreteci olsun. O zaman S nin sol P-injektif olması için gerek ve yeter koşul $\gamma M \subseteq \beta M$ ise $\gamma \in \beta S$ olmasıdır.*

İspat. (1). S sağ P-injektif olsun. O zaman Lemma 4.1.3 ten $\mathbf{lr}(\beta) = S\beta$ dır. $Ker\beta \subseteq Ker\gamma$ ise $\gamma \in \beta S$ olduğunu gösterelim. $\varphi \in \mathbf{lr}(\beta)$ alalım ve $x \in Ker\beta$ ise $Ker\beta$, M ile üretildiğinden $m_i \in M$, $\lambda_i : M \to Ker\beta$ için $x = \Sigma_i \lambda_i m_i$ dir. $\beta(x) = 0$

olduğundan her i için $\beta\lambda_i = 0$ dır. $\lambda_i \in \mathbf{r}(\beta)$ ve $\varphi \in \mathbf{lr}(\beta)$ olduğundan $\varphi\lambda_i = 0$ bulunur. Diğer yandan $Ker\beta \subseteq Ker\gamma$ olduğundan $x \in Ker\gamma$ ise $\gamma(x) = 0$ yani, her i için $\gamma\lambda_i = 0$ ve $\beta\lambda_i = 0$ olduğundan $\gamma \in \mathbf{lr}(\beta) = S\beta$ ise $\gamma \in S\beta$ olur.

Karşıt olarak her $\beta \in S$ için M, $Ker\beta$ yı üretsin ve $Ker\beta \subseteq Ker\gamma$ ise $\gamma \in S\beta$ olsun. S nin sağ P-injektif olduğunu göstermek için Lemma 4.1.3 (1) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesinden $\mathbf{lr}(\beta) = S\beta$ olduğunu göstermeliyiz. $\gamma \in \mathbf{lr}(\beta)$ olsun. $\gamma \in S\beta$ olması için $Ker\beta \subseteq Ker\gamma$ olduğu gösterilmelidir. $x \in Ker\beta$ alalım. $x = \Sigma_i\lambda_i m_i$ olarak yazılır. $\beta(x) = 0$ olduğundan her i için $\beta\lambda_i = 0$ ise $\lambda_i \in \mathbf{r}(\beta)$ ve $\gamma \in \mathbf{lr}(\beta)$ olduğundan her i için $\gamma\lambda_i = 0$ dır. $\gamma(x) = 0$ ise $x \in Ker\gamma$ olduğundan $\gamma \in S\beta$ dır. Yani $\mathbf{lr}(\beta) \subseteq S\beta$ dir. Tersi için $\alpha \in S\beta$ ise $\alpha = f\beta$ olacak şekilde $f \in S$ yani $f : M \to M$ endomorfizması vardır. $x \in Ker\beta$ için $x = \Sigma_i\lambda_i m_i$ alınırsa $\beta(x) = 0$ olduğundan her i için $\beta\lambda_i = 0$ dır. α homomorfizma olduğundan $\alpha(x) = f\beta(x) = 0$ dır. Böylece her i için $\alpha\lambda_i = 0$ olur. Buradan $\beta\lambda_i = 0$ ve $\alpha\lambda_i = 0$ olduğundan $\alpha \in \mathbf{lr}(\beta)$ dır. Yani $S\beta \subseteq \mathbf{lr}(\beta)$ olur. Sonuç olarak $\mathbf{lr}(\beta) = S\beta$ bulunur.

(2). Her $\beta \in S$ için M, $M/\beta M$ yi eşüretsin ve $\gamma M \subseteq \beta M$ ise $\gamma \in \beta S$ olsun. S nin sol P-injektif olduğunu göstermek için Lemma 4.1.3 (1) $\Rightarrow$ (2). gerektirmesinden $\mathbf{rl}(\beta) = \beta S$ olduğunu göstermeliyiz. $\gamma \in \mathbf{rl}(\beta)$ olsun. $\gamma \in \beta S$ olması için $\gamma M \subseteq \beta M$ olduğu gösterilmelidir. m_0, M nin elemanı olmak üzere γm_0, βM nin elemanı olmasın. Önerme 2.1.9 dan $\sigma : M/\beta M \to M$, $\sigma(\gamma m_0 + \beta M) \neq 0$ sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer $\lambda : M \to M$, $\lambda(m) = \sigma(m + \beta M)$ ile tanımlanırsa, o zaman $\lambda\gamma \neq 0$ dır. Bu durum $\gamma \in \mathbf{rl}(\beta)$, $\lambda\beta = 0$ ve $\lambda\gamma = 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır ve $\gamma m_0 \in \beta M$ dir. Yani $\gamma \in \beta S$ dir. Buradan $\mathbf{rl}(\beta) \subseteq \beta S$ bulunur. $\beta S \subseteq \mathbf{rl}(\beta)$ olduğu benzer şekilde gösterilir. $\square$

5. ÇEŞİTLİ İNJEKTİF MODÜL KARAKTERİZASYONLARI

5.1. Quasi-İnjektif Modüller ve Pseudo-İnjektif Modüller

Bu bölümde S. K. Jain ve Surjeet Singh'nın [9] çalışması incelenmiştir. Quasi-injektif ve pseudo-injektif modül tanımları verilerek pseudo-injektif bir modülün bir direk toplananının da pseudo-injektif olup olmadığı araştırılmıstır. Aynı zamanda hangi şartlar altında pseudo-injektif bir modülün direk toplananının quasi-injektif olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte quasi-injektif olmayan bir pseudo-injektif modülün karakterizasyonu Lemma 5.1.6 da ifade edilmiştir.

Tanım 5.1.1 [9]. R, sıfırdan farklı birimli bir halka olsun. Eğer bir sağ R-modül M nin her N altmodülü için N den M içine her R-homomorfizması M nin bir R-endomorfizmasına genişletilebiliyorsa M ye *quasi-injektif modül* denir. Eğer M nin her N altmodülü için N den M içine her R-monomorfizması M nin bir R-endomorfizmasına genişletilebiliyorsa M ye *pseudo-injektif modül* denir. Yani M nin her N altmodülü için her $f : N \to M$ monomorfizması için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $f' : M \to M$ endomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd}
 & M \\
N \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & M \arrow[u, dotted, "f'"']
\end{tikzcd}$$

Örnek 5.1.2 $F = \mathbb{Z}/ < 2 >$ ve $A = F[x]$ olsun. O zaman $A/ < x >$,
$(A/ < x > -A/ < x^2 >)-$ bimodül ve
$R = \{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & w \end{bmatrix} : u, v \in A/ < x >, w \in A/ < x^2 >\}$ bilinen matris toplama ve
çarpma işlemleri ile birlikte bir halkadır.
$M = \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & w \end{bmatrix} : v \in A/ < x >, w \in A/ < x^2 >\}$ sağ ideal olsun. O zaman M_R,

bir pseudo-injektif modüldür fakat quasi-injektif modül değildir.

Lemma 5.1.3 [9]. *Bir pseudo-injektif modülün her direk toplananı da pseudo-injektiftir.*

İspat. $M = M_1 \oplus M_2$ pseudo-injektif modül olsun. Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi f' endomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1 & \xrightarrow{i} & M \\ & \nearrow^{f} & \uparrow g & & \uparrow f' \\ N_1 & \xrightarrow[i_1]{} & M_1 & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

M, pseudo-injektif olduğundan if monomorfizması için $f'ii_1 = if$ dir. $f'_{|M_1} = g$ olsun. Buradan $if(n_1) = f'ii_1(n_1) = f'i_1(n_1) = g(n_1)$ ve $if(n_1) = f(n_1)$ olduğundan $f(n_1) = g(n_1)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.1.4 [9]. *N_1 ve N_2 modülleri için $N_1 \oplus N_2$ pseudo-injektif bir modül ve $\sigma : N_1 \to N_2$ bir monomorfizma olsun. O zaman σ parçalanabilirdir ve N_1 quasi-injektiftir.*

İspat. $\eta : \sigma(N_1) \to N_1 \oplus N_2$ dönüşümü $x \in N_1$ için $\eta(\sigma(x)) = (x,0)$ ile tanımlanan bir monomorfizmadır ve $N_1 \oplus N_2$ pseudo-injektif olduğundan η, $N_1 \oplus N_2$ nin bir η' endomorfizmasına genişletilebilir. Eğer $q : N_2 \to N_1 \oplus N_2$ doğal içerim dönüşümü ve $p : N_1 \oplus N_2 \to N_1$ doğal epimorfizma ise o zaman $\lambda\sigma = 1_{N_1}$ olacak şekilde $\lambda = p\eta'q : N_2 \to N_1$ vardır. Sonuç 2.1.8 gereğince σ, parçalanabilirdir. Şimdi N_1 in quasi-injektif olduğunu gösterelim. Bunun için $N_1 \oplus N_1' = N_2$ olsun. Böylece $N_1 \oplus N_2 = N_1 \oplus N_1 \oplus N_1'$ olur ve Lemma 5.1.3 ten, $T = N_1 \oplus N_1$ pseudo-injektiftir. $M_1 = M_2 = N_1$ olmak üzere $T = M_1 \oplus M_2$ yazalım. $N \leq N_1$ ve $\sigma : N \to N_1$ bir R-homomorfizması olsun. Burada N yi M_1 de içerilen T nin bir altmodülü olarak görürsek o zaman $\eta : N \to T$ dönüşümü $x \in N$ için $\eta(x) = (x, \sigma(x))$ ile tanımlanan bir monomorfizma olur. Buradan

T, pseudo-injektif olduğundan η, T nin bir λ endomorfizmasına genişletilebilir. Eğer $q_1 : M_1 \to T$ doğal içerim dönüşümü ve $p_2 : T \to M_2$ doğal epimorfizma ise $\mu = p_2 \lambda q_1$, N_1 in bir endomorfizmasıdır ve σ nın bir genişlemesidir. Böylece N_1, quasi-injektif bulunur. □

Şimdi bu teorem yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1.5 [9]. *M bir R-modül olsun. M nin quasi-injektif olması için gerek ve yeter koşul $M \oplus M$ nin pseudo-injektif olmasıdır.*

İspat. M quasi-injektif ise $M \oplus M$ de quasi-injektif modüldür. Buradan $M \oplus M$ pseudo-injektif bulunur.
Karşıt olarak, $M \oplus M$ pseudo-injektif modül olsun. Teorem 5.1.4 gereğince M quasi-injektif olur. □

Son olarak pseudo-injektif modül için aşağıdaki karakterizasyon verilebilir.

Lemma 5.1.6 [9, Lemma 2]. *N_1, N_2 birbirine izomorf olmayan M nin iki altmodülü ve M nin altmodüllerinin aşağıda verilen kafesini (lattice) göz önüne alalım:*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d] & \\
& N_1 \oplus N_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
N_1 \arrow[dr] & & N_2 \arrow[dl] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1). *M quasi-injektif değildir.*

(2). *M nin pseudo-injektif olması için gerek ve yeter koşul $i = 1,2$ için N_i nin endomorfizma halkasının $\mathbb{Z}/ < 2 >$ ye izomorf olmasıdır.*

5.2. I-İnjektif ve f-İnjektif Modüller

Bu bölümde Ram Niwas Gupta'nın f-injektif modül ile ilgili [7] çalışması incelenmiştir. I-injektif modül kullanılarak f-injektif modül tanımlanmıştır. Karakterizasyon için gerekli olan [2] de verilen "$p \in R$ ise M modülü, pR-injektiftir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{lr}(p) \subseteq Mp$" ifadesi kullanılarak I-injektif modül için bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca Noether halkalar I-injektif modüller yardımıyla karakterize edilmiştir.

Tanım 5.2.1 [7]. R birimli bir halka ve M bir birimsel sağ R-modül olsun. R nin bir I sağ ideali için her $f : I \to M$ R-homomorfizma ve her $x \in I$ için $f(x) = mx$ olacak şekilde $m \in M$ varsa M ye *I-injektif modül* denir. Başka bir deyişle, M nin I-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f : I \to M$ R-homomorfizmasının R den M ye R-homomorfizmasına genişletilebilmesidir. Yani aşağıdaki diyagram değişmeli yapan bir $\overline{f}$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} & M \\ I \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & R \arrow[u, dotted, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Ayrıca R nin her sonlu üretilmiş sağ I ideali için M modülü I-injektif ise M ye *f-injektif modül* denir.

Bir M modülü R nin her sağ I ideali için I-injektif ise M ye *injektif modül* denir. Bu durum biraz farklı olarak "Eğer $p \in R$ ise M, pR-injektiftir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{lr}(p) \subseteq Mp$" biçiminde de ifade edilmiştir ([2], Teorem 2). Diğer yandan $Mp \subseteq \mathbf{lr}(p)$ olduğundan M, pR-injektiftir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{lr}(p) = Mp$ dir.

Bir M modülünün $S \subseteq M$ altkümesi için $\mathbf{r}(S) = \{r \in R : Sr = 0\}$ tanımlansın. M nin bir X altkümesi için $\mathbf{l}(X) = \{m \in M : mX = 0\}$ biçiminde tanımlanır.

Teorem 5.2.2 [7]. *M bir modül ve M, R nin her sonlu üretilmiş sağ I ideali için I-injektiftir ancak ve ancak aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1). *Her $p \in R$ için $\mathbf{lr}(p) = Mp$ dir,*

(2). *R nin her sonlu üretilmiş A ve B sağ idealleri için $\mathbf{l}(A \cap B) = \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ dir.*

İspat. R nin her sonlu üretilmiş sağ I ideali için M, I-injektif olsun. Buradan her $p \in R$ için M, pR-injektif olur. Böylece [2] gereğince "$p \in R$ için M, pR-injektif olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{lr}(p) \subset Mp$" olduğundan ve $Mp \subset \mathbf{lr}(p)$ olduğu açıktır. Böylece $\mathbf{lr}(p) = Mp$ bulunur.

Şimdi A ve B, R nin sonlu üretilmiş sağ idealleri olsun. $x \in \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ alalım. O zaman $x = a + b$ olacak şekilde $a \in \mathbf{l}(A)$ ve $b \in \mathbf{l}(B)$ vardır. $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan $(a+b)(A \cap B) = 0$ ise $x(A \cap B) = 0$ bulunur. Yani $x \in \mathbf{l}(A \cap B)$ olup $\mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B) \subset \mathbf{l}(A \cap B)$ dir. Tersine $m \in \mathbf{l}(A \cap B)$ olsun. $m_1 \in M$ sabit elemanını seçelim. Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $f_1(a) = m_1 a$ ve $f_2(b) = (m + m_1)b$ olacak şekilde $f_1 : A \to M$, $f_2 : B \to M$ dönüşümlerini tanımlayalım. Açıkça f_1 ve $f_2, A \cap B$ üzerinde eşittir. Böylece her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $f : A + B \to M$, $f(a+b) = f_1(a) + f_2(b)$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Buradan her $a \in A$, $b \in B$ için $n(a+b) = f(a+b)$ olacak şekilde bir $n \in M$ vardır. Böylece $na = f(a) = m_1 a$ olur.

Yani $(n - m_1)A = 0$ bulunur. Aynı zamanda her $b \in B$ için $nb = f(b) = f_2(b) = (m + m_1)b$ olur. Yani $(m + m_1 - n)B = 0$ bulunur. O zaman $m = (n - m_1) + (m + m_1 - n) \in \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ dir. O halde $\mathbf{l}(A \cap B) = \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ elde edilir.

Karşıt olarak (1). ve (2). özellikleri sağlansın. O zaman [2] gereğince her $p \in R$ için M, pR-injektif olur. Şimdi I, $(n-1)$ eleman tarafından üretilen bir sağ ideal olmak üzere M nin, I-injektif olduğunu kabul edelim. Böylece $f : I \to M$, $I = a_1R + a_2R + \ldots + a_nR$ olsun. $J = a_1R + \ldots + a_{n-1}R$ ve $K = a_nR$ alalım. $f_{|_J} = f_1$, $f_{|_K} = f_2$ olarak gösterelim. O zaman her $x \in J$ için $f_1(x) = m_1 x$, her $y \in K$ için $f_2(y) = m_2 y$ olacak şekilde M de m_1, m_2 elemanları vardır. f_1 ve $f_2, J \cap K$ üzerinde eşittir. Buradan her $x \in J \cap K$ için $f_1(x) = f_2(x)$ olup $m_1 x = m_2 x$ dir. O zaman $(m_1 - m_2)x = 0$ ise $(m_1 - m_2)(J \cap K) = 0$ olur. Bu durumda $m_1 - m_2 = n_1 - n_2$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbf{l}(J)$ ve $n_2 \in \mathbf{l}(K)$ vardır. $m = m_1 - n_1 (= m_2 - n_2)$ olsun. O zaman her $x \in J$ için $mx = (m_1 - n_1)x = m_1x - n_1x = m_1x = f_1(x) = f(x)$ dir. Aynı şekilde $my = f(y)$ bulunur. Buradan her $x \in I$ için $f(x) = mx$ yani M, I-injektif modül olur. □

Sonuç 5.2.3 [7]. *R bir Noether halka ve M bir R-modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter koşul*
(1). *Her $p \in R$ için $\mathbf{lr}(p) = Mp$,*
(2). *R nin I ve J sağ idealleri için $\mathbf{l}(I \cap J) = \mathbf{l}(I) + \mathbf{l}(J)$*
olmasıdır.

İspat. R bir Noether halka olduğundan her sağ ideali sonlu üretilmiştir. Teorem 5.2.2 gereğince M, her sağ I ideali için I-injektif olduğundan M, injektif olur. □

Teorem 5.2.4 [7]. *M bir injektif sağ R-modül olsun. O zaman,*
(i). *R nin her A ve B sağ idealleri için $\mathbf{l}(A \cap B) = \mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B)$ dir.*
(ii). *R nin her sonlu S altkümesi için $\mathbf{lr}(S) = MS$ dir.*

İspat. (i). Teorem 5.2.2 den açıktır.
(ii). $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, R nin bir sonlu altkümesi olsun. O zaman
$\mathbf{lr}(S) = \mathbf{l}[\mathbf{r}(s_1) \cap \mathbf{r}(s_2) \cap ... \cap \mathbf{r}(s_n)] = \mathbf{lr}(s_1) + \mathbf{lr}(s_2) + ... + \mathbf{lr}(s_n) =$
$Ms_1 + Ms_2 + ... + Ms_n = MS$ olur. □

İnjektif modüllerde olduğu gibi f-injektif modül için aşağıdaki temel özellikler verilebilir.

Teorem 5.2.5 [7]. *$\{M_i\}_{i \in I}$, R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\prod_{i \in I} M_i$ nin f-injektif olması için gerek ve yeter koşul her M_i modülünün f-injektif olmasıdır.*

İspat. Genel injektif modül diyagramlarını kullanarak elemanter olarak kolayca gösterilebilir. □

Teorem 5.2.6 [7]. *$\{M_i\}_{i\in I}$, R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ nin f-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için M_i nin f-injektif olmasıdır.*

İspat. Her $i \in I$ için M_i, f-injektif olsun. I, R nin sonlu üretilmiş ideali olmak üzere $g : I \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olsun. $J \subseteq I$ sonlu bir altküme olmak üzere $g(I) \subseteq \bigoplus\limits_{j\in J} M_j$ olur. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi"] & \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \\
I \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & R \arrow[u, dotted, "f"'] \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorem 5.2.5 te olduğu gibi $h_{|_I} = \pi g$ olacak şekilde h homomorfizması vardır.
$i : \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ olmak üzere $f = ih$ alınırsa $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, f-injektif olur. □

Teorem 5.2.7 [7]. *Bir R halkasının Noetherian olması için gerek ve yeter koşul her f-injektif R-modülün injektif olmasıdır.*

İspat. R bir Noether halka olduğundan f-injektif R-modül injektif olur.
Karşıt olarak her f-injektif modül injektif olsun. [5] te verilen aşağıda belirtilen Bass'ın teoremini kullanarak R nin Noether halka olduğunu gösterelim: "R nin Noether halka olması için gerek ve yeter koşul injektif modüllerin her ailesinin direk toplamının da injektif olmasıdır". $\{M_i\}_{i\in I}$ injektif modüllerin bir ailesi olsun. Teorem 5.2.6 gereğince $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ f-injektif olur. Hipotezden $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ injektif olur. Buradan Bass'ın teoremi gereğince R, bir Noether halka olur. □

5.3. Small PPQ-İnjektif Modüller

Bu bölümde S. Wongwai ve O. Sthityanak'ın [16] çalışması incelenmiştir. Burada small PP-M-injektif ve small PPQ-injektif modüller tanımlanmış ve bu modüller ile ilgili karakterizasyonlar çalışılmıştır. Ayrıca SP-M-injektif ve relatif SP-injektif modül tanımları yapılarak small PP-M-injektif bir modülün bölüm modülünün small PP-M-injektif olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Tanım 5.3.1 [16]. M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin bir small ve principal altmodülünden N ye her R-monomorfizması M den N ye bir R-homomorfizmasına genişletilebiliyorsa N ye *small pseudo principally M-injektif (*kısaca, *small PP-M-injektif) modül* denir. Eğer M modülü small PP-M-injektif ise M ye *small pseudo principally quasi-injektif (*kısaca, *small PPQ-injektif) modül* denir.

$$\begin{tikzcd} & N \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & M \arrow[u, dotted, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 5.3.2 [16].

(1). *Bir N modülü small PP-M-injektif ise o zaman N, M nin her X altmodülü için small PP-X-injektiftir.*

(2). *Bir small PP-M-injektif modülün her direk toplananı da small PP-M-injektiftir.*

İspat. (1). X, M nin bir altmodülü olsun. $m \in X$ olmak üzere $mR \ll X$ için $\alpha : mR \to N$ bir R-monomorfizması olsun. Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi $mR \ll M$ olduğundan $i_1 : mR \to X$, $i_2 : X \to M$ içerim dönüşümleri olmak üzere $\alpha = \widehat{\alpha} i_2 i_1$ olacak şekilde $\widehat{\alpha} : M \to N$ bir R-homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & & N \\ mR \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[r, "i_1"'] & X \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "i_2"'] & M \arrow[u, dotted, "\widehat{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

O zaman α, $\widehat{\alpha} i_2$ ye genişler. Böylece istenen gösterilmiş olur.

(2). N bir small PP-M-injektif modül ve X, N nin bir direk toplananı olduğunu kabul edelim. $m \in M$ olmak üzere $mR \ll M$ için $\alpha : mR \to X$ bir R-monomorfizma olsun. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\varphi"] & N \\ mR \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi : X \to N$ doğal içerim dönüşümü olsun. $\varphi\alpha$ dönüşümü bir monomorfizma olduğundan $i : mR \to M$ bir içerim dönüşümü olmak üzere $\varphi\alpha = \beta i$ olacak şekilde $\beta : M \to N$ bir R-homomorfizması vardır. Bu durumda $\pi : N \to X$ doğal epimorfizma olmak üzere α, $\pi\beta$ ya genişler. Böylece X, small PP-M-injektif modül olur. □

Örnek 5.3.3 [16]. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$,

$M_R = R_R$ ve $N_R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman,

(1) N, small PP-M-injektiftir.

(2) N, small PPQ-injektiftir.

İspat.

(1). $0 \neq x \in F$ için $m = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $mR = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, M nin sıfırdan farklı small ve principal altmodülüdür. $\varphi : mR \to N$ bir R-homomorfizması olsun. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in mR$ olduğundan $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $x_{11}, x_{12} \in F$ vardır. $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Buradan $x_{11} = 0$ bulunur. Her $a, b, c \in F$ için $\widehat{\varphi} : M \to N$ dönüşümü,

$\widehat{\varphi}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_{11} & bx_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlayalım. $\widehat{\varphi}$ nın bir R-homomorfizma olduğu açıktır ve φ, $\widehat{\varphi}$ ye genişler. O halde N, small PP-M-injektiftir.

(2). N, bir small PP-M-injektif modül olduğundan $N \leq M$ için Lemma 5.3.2.(1) gereğince N, small PP-N-injektif olur. Yani N, small PPQ-injektif modüldür. □

Tanım 5.3.4 [16]. Bir M modülünün bir small ve principal altmodülünden N ye olan her R-homomorfizması M den N ye genişletilebiliyorsa N ye *small principally M-injektif* (kısaca *SP-M-injektif) modül* denir. İki M ve N sağ R-modülü için M, SP-N-injektif ve N, SP-M-injektif ise M ve N ye *relatif SP-injektif modüller* denir.

Önerme 5.3.5 [16]. *Eğer $M_1 \oplus M_2$ small PPQ-injektif modül ise M_1 ve M_2 modülleri relatif SP-injektiftir.*

İspat. $M_1 \oplus M_2$ bir small PPQ-injektif modül olsun. M_1 modülünün SP-M_2-injektif olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r] & M_1 \oplus M_2 \\ aR \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & M_2 \arrow[u, dotted] \arrow[ur, dotted, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$a \in M_2$ ve $aR \ll M_2$ olmak üzere $\varphi : aR \to M_1$ bir R-homomorfizma olsun. Her $x \in aR$ için $\alpha : aR \to M_1 \oplus M_2$, $\alpha(x) = (\varphi(x), x)$ ile tanımlansın. α bir R-monomorfizmadır. Lemma 5.3.2 den $M_1 \oplus M_2$, small PP-M_2-injektif olur. O zaman $i : aR \to M_2$ içerim dönüşümü ile $\alpha = \beta i$ olacak şekilde $\beta : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ R-homomorfizması vardır. $\pi : M_1 \oplus M_2 \to M_1$ doğal epimorfizma olsun. O zaman $\varphi = \pi\alpha = \pi\beta i$ olur. Böylece M_1, SP-M_2-injektif olur. Benzer şekilde M_2 nin de SP-M_1-injektif olduğu gösterilir. □

Teorem 5.3.6 [16]. *M bir sağ R-modül olsun. M nin her small ve principal altmodülü projektif ise o zaman bir small PP-M-injektif modülün her bölüm modülü small PP-M-injektif olur.*

İspat. N bir small PP-M-injektif modül olsun. X, N nin bir altmodülü ve $a \in M$ için $aR \ll M$ olmak üzere $\varphi : aR \to N/X$ bir R-monomorfizma olsun.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\eta"] & N/X \\ aR \arrow[ur, "\widehat{\varphi}"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[u, dotted, "\beta"'] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi $\varphi = \eta\widehat{\varphi}$ olacak şekilde $\eta : N \to N/X$ doğal R-epimorfizması için bir $\widehat{\varphi} : aR \to N$ R-homomorfizması vardır. $x \in Ker(\widehat{\varphi})$ ise

$\varphi(x) = \eta\widehat{\varphi}(x) = X$ olur. Buradan $x = 0$ dır. Böylece $\widehat{\varphi}$ bir monomorfizmadır. N small PP-M-injektif olduğundan $\beta : M \to N$ R-homomorfizması vardır. Bu durumda $\widehat{\varphi}$, β ya genişler. O zaman $\eta\beta$, φ nin M ye genişlemesidir. Buradan N/X, bir small PP-M-injektif modül olur. $\square$

6. SONUÇ

Bu bölümde halkalar birimli ve modüller birimsel sağ modüller olmak üzere literatürde karşılaştığımız farklı injektif modüller arasındaki geçişler çalışılarak yeni karakterizasyonlara fayda sağlamak amaçlanmıştır.

6.1. Bazı Karşılaştırmalar

Lemma 6.1.1 *R bir halka, A ve B iki R-modül olsun.*
B, A-injektif modül $\Rightarrow$ B, A-essential injektif modüldür.

Lemma 6.1.1 in karşıtı A modülünün bir uniform modül olması durumunda geçerlidir. Bu durum için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 6.1.2 *A ve B herhangi iki modül ve A uniform olsun.*
O zaman B, A-injektif modüldür $\Leftrightarrow$ B, A-essential injektif modüldür.

Lemma 6.1.3 *R bir halka, M bir sağ R-modül ve I, R nin bir sağ ideali olsun.*
O zaman M, f-injektif modül $\Rightarrow$ M, I-injektif modül $\Rightarrow$ M, P-injektif modüldür.

Lemma 6.1.4 *Her injektif modül f-injektiftir.*

Lemma 6.1.4 ün karşıtı, R halkasının Noether olması durumunda geçerlidir.
Şimdi aşağıdaki karakterizasyonlar verebiliriz.

Sonuç 6.1.5 *R bir halka, M bir sağ R-modül olsun.*
M, injektif modüldür $\Leftrightarrow$ M, f-injektif modül ve R, bir Noether halkadır.

Sonuç 6.1.6 *R bir halka, M bir sağ R-modül olsun.*
R, bir Noether halka ve M, I-injektif modüldür $\Leftrightarrow$ M, f-injektif modüldür.

Lemma 6.1.7 *R birimli bir halka ve M, bir modül olsun.*

M, quasi-injektif modül $\Rightarrow$ *M, pseudo-injektif modüldür.*

Lemma 6.1.8 *M bir sağ R-modül olsun.*

M, SP-M-injektif modül $\Rightarrow$ *M, small PP-M-injektif modüldür.*

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer Verlag, New York.

[2] Baer, R. 1940. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. **Bull. Am. Math. Soc.**, 46: 800-806.

[3] Burgess, W. D., Raphael, R. 1993. On modules with the absolute direct summand property. In **Proceedings of the Biennial Ohio State-Denison Conferance** (1992). World Scientific, 137-148.

[4] Camillo, V. P. 1970. Balanced rings and a problem of Thrall. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 149: 143-153.

[5] Chase, S. U. 1960. Direct product of modules. **Trans. Am. Math. Soc.**, 97: 457-473.

[6] Eckmann, B., Schopf, A. 1953. Über injective moduln. **Arch. Math.**, 4: 75-78.

[7] Gupta, R. N. 1967. On f-injective modules and semi-hereditary rings. **Fridtjof Nonsens Institutt Publications**, 35 (2): 323-328.

[8] Ikeda, M., Nakayama, T. 1954. On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 5: 15-19.

[9] Jain, S. K., Singh, S. 1975. Quasi-injective and pseudo-injective modules. **Canad. Math. Bull.**, 18 (3): 359-366.

[10] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no.17.

[11] Matlis, E. 1958. İnjective modules over Noetherian rings. **Pacific Journal Math.**, 8: 511-528.

[12] Mohamed, S. H., Müller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. Cambridge at the University Press, Cambridge.

[13] Moharam, M. R. 2004. On generalized injective modules and related concepts. Faculty of Education Ain Shams University, Cairo.

[14] Nicholson, W. K., Yousif, M. F. 1995. Principally injective rings. **Journal of Algebra**, 174: 77-93.

[15] Sharpe, D. W., Wamos, P. 1972. İnjective Modules. Cambridge at the University Press, Cambridge.

[16] Wongwai, S., Sthityanak, O. 2012. Small PPQ-injective modules. **Science and Technology RMUTT Journal**, 2 (1): 29-38.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Ülkü Rabia KUŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Ankara, 06.03.1990

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Aydın Birey Dergisi Dershaneleri	2013

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	ulku0306@gmail.com
Tarih	:	08.01.2015