T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2015-DR-008

GAMMA HALKALARININ YAPISI VE DEĞİŞMELİLİĞİ

Okan ARSLAN

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

AYDIN

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı öğrencisi Okan ARSLAN tarafından hazırlanan "Gamma Halkalarının Yapısı ve Değişmeliliği" başlıklı tez, 20.08.2015 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Neşet AYDIN	ÇOMÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT	ADÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Doktora tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

20.08.2015

Okan ARSLAN

ÖZET

GAMMA HALKALARININ YAPISI VE DEĞİŞMELİLİĞİ

Okan ARSLAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
2015, 79 sayfa

Bu tezin amacı, karakteristiği 2 den farklı olan türevli gamma halkalarda değişmelilik koşullarını araştırmaktır. Bunun için gamma halkalarda γ-Lie idealleri tanımlanmış ve gamma halkalarda yeni bazı özellikler elde edilmiştir.

Çalışma temel olarak beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, gamma halkaların ortaya çıkışı özetlenmiş ve gamma halkalarla ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, halkalar ve gamma halkalar ile ilgili bu çalışmanın temelini oluşturan bazı tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gamma halkalar için bazı yeni kavramlar tanıtılmıştır ve bu kavramlar yardımıyla gamma halkalarda yeni özellikler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, türevli gamma halkalarda γ-Lie idealler üzerindeki özellikler yardımıyla gamma halkanın yapısı ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir. Son bölümde, gamma halkalar ile gamma halkaya bağlı olarak tanımlanan halkalar arasında ilişkiler kurulmuş ve gamma halkalarda literatürde var olan radikaller ile gamma halkanın γ-radikalleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Gamma halka, Asal gamma halka, k-türev, Lie ideal, Değişmelilik

ABSTRACT

COMMUTATIVITY AND STRUCTURE OF GAMMA RINGS

Okan ARSLAN

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Hatice KANDAMAR
2015, 79 pages

The objective of this thesis is to find commutativity conditions in prime gamma rings with derivation of characteristic not 2. For this reason, a γ-Lie ideal of a gamma ring is introduced and some new properties have been obtained in gamma rings.

The study consists of five sections basically. In the first chapter, the emergence of the gamma ring is summarized and and some works which have been done in the literature about the gamma rings have been mentioned.

In the second chapter, some definitions and properties have been given which are the basis of this work.

In the third chapter, some new notions have been introduced and get new properties in gamma rings with the help of these notions.

In the forth chapter, some results have been given about the structure of the gamma rings by the help of the properties of γ-Lie ideals in the gamma rings with derivation. In the last chapter, the relations between the rings and the gamma rings have been established and the relations between the radicals and the γ-radicals of gamma rings have been investigated.

Key Words: Gamma ring, Prime gamma ring, k-derivation, Lie ideal, Commutativity

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşturulmasında derin bilgi ve birikiminden faydalandığım, değerli görüşlerini ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) yürekten teşekkür ederim. Tüm yaşamım boyunca bana duydukları güvenle, her zaman desteklerini yanımda hissettiğim aileme ve hayatıma girdiğinden beri her koşulda yanımda olan, bu çalışma süresince hayatımı kolaylaştıran sevgili eşim Berna ARSLAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) göstermiş oldukları sabır ve anlayışlarından ötürü şükranlarımı sunarım.

Bu tez Adnan Menderes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından FEF-14008 kod numaralı bilimsel araştırma projesi olarak desteklenmiştir.

Okan ARSLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$C_R(R) = C(R)$	R halkasının merkezi
$C_R(X)$	X kümesinin merkezi
$C_\gamma(M) = C_\gamma$	M gamma halkasının γ-merkezi
$C_\gamma(X)$	X kümesinin γ-merkezi
$\mathrm{Ker}(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{char}(R)$	R halkasının karakteristiği
$\mathrm{char}(M)$	M gamma halkasının karakteristiği
$\overline{X}$	X kümesi ile üretilen althalka
$[a,b]$	$= ab - ba$
$\mathrm{Ann}_l(B)$	B kümesinin sol sıfırlayanı
$(\Gamma, M)_N$	Nobusawa anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_B$	Barnes anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_{wN}$	zayıf Nobusawa anlamında gamma halka
$[\gamma, x]$	M nin sağ çarpım endomorfizması
$[y, \beta]$	M nin sol çarpım endomorfizması
(a)	a ile üretilen ideal
$(a)_\gamma$	a ile üretilen γ-ideal
$[u,v]_\gamma$	$= u\gamma v - v\gamma u$
$[\alpha, \beta]_a$	$= \alpha a \beta - \beta a \alpha$
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$ üzerinde $n \times m$ tipinde matrislerin kümesi
$\mathcal{B}_\gamma(A)$	A nın γ-asal radikali
$\mathcal{B}_\gamma(M)$	M gamma halkasının γ-asal radikali
$\mathcal{S}_\gamma(M)$	M gamma halkasının γ-nilpotent radikali
$\mathcal{S}(M)$	M gamma halkasının güçlü nilpotent radikali
$\mathcal{L}_\gamma(M)$	M gamma halkasının γ-Levitzki nil radikali
$\mathcal{L}(M)$	M gamma halkasının Levitzki nil radikali
$\mathcal{J}_\gamma(M)$	M gamma halkasının γ-Jacobson radikali
$\mathcal{J}(M)$	M gamma halkasının Jacobson radikali

1. GİRİŞ

Üçlü cebirsel yapı olarak gamma halkası kavramı ilk olarak 1964 yılında N. Nobusawa tarafından ortaya konmuştur [17]. Bu kavram verilirken, A ve B toplamsal değişmeli iki grup, $\mathrm{Hom}(A,B)$ ve $\mathrm{Hom}(B,A)$ sırasıyla A dan B grubuna ve B den A grubuna grup homomorfizmalarının kümesi olmak üzere, $\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,A)\times\mathrm{Hom}(A,B)$ kümesinden $\mathrm{Hom}(A,B)$ toplamsal grubu içine $(f,\gamma,g)\mapsto f\circ\gamma\circ g$ (fonksiyonların bileşke işlemi) ile tanımlanan üçlü çarpım model olarak alınmıştır. Nobusawa, gamma halkasının tanımını verdiği çalışmasında Wedderburn-Artin teoremini genelleştirmiştir. 1964 yılından günümüze kadar gamma halkalarının yapısı hakkında birçok çalışma yapılmıştır. W. Barnes, Γ ve M toplamsal iki grup olmak üzere Nobusawa'nın verdiği gamma halka tanımında yer alan $M\times\Gamma\times M\to M$ ve $\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$ üçlü çarpımından ikincisini kaldırarak gamma halkası tanımını genelleştirmiştir [2]. Barnes aynı çalışmada, gamma halka homomorfizmasını tanımlayarak gamma halkalarda homomorfizma teoremlerini ele almıştır. Barnes ayrıca gamma halkalarda asal ideal ile m-sistem tanımlarını vermiş ve bir A idealinin asal radikalinin, A yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimi olduğunu ispatlamıştır. W. E. Coppage ve J. Luh, gamma halkalarda Jacobson radikal, Levitzki nil radikal, nil radikal ve güçlü nilpotent radikal kavramlarını tanıtmış ve W. Barnes'ın [2] deki çalışmasında verdiği asal radikal kavramı üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmada, halkalarda radikallerin sahip olduğu özelliklere benzer özellikler, gamma halkalardaki radikaller için elde edilmiştir. Ayrıca gamma halkalardaki radikaller arasındaki ilişkileri incelemişler ve gamma halkanın radikalleri ile bu gamma halkanın operatör halkasının radikalleri arasındaki ilişkileri araştırmışlardır [4]. S. Kyuno, [10] daki çalışmasında, yarı asal idealleri üzerinde çalışmış ve W. E. Coppage ve J. Luh'un [4] teki çalışmalarında gamma halkanın radikalleri ile bu gamma halkanın operatör halkasının radikalleri arasında kurduğu ilişkinin duali olan özellikler ispatlamıştır. T. S. Ravisankar ve U. S. Shukla [21] ile S. Kyuno [11] birbirinden bağımsız olarak gamma halkası üzerinde modül kavramını tanıtmışlardır ve gamma halkanın Jacobson radikalini, modülleri kullanarak yeniden tanımlamış ve bu tanımın, daha önce [4] te sağ (sol) yarı regüler elemanlar üzerinden yapılan tanıma denk olduğunu göstermişlerdir. S. Kyuno, gamma halkalarının asal idealleri üzerine çalışmıştır [12]. S. Kyuno bu çalışmasında, gamma halkanın asal idealleri ile gamma halkanın operatör halkalarının asal idealleri arasında birebir eşleme var olduğunu ispatlamıştır.

Gamma halkalarda türev tanımı ilk kez F. J. Jing tarafından 1987 yılında aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

M Barnes anlamında bir Γ-halka olsun. Bu durumda $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y)$ özelliğini sağlayan M den M ye d toplamsal dönüşümüne türev denir [8].

Ancak M bir zayıf Nobusawa asal Γ-halka olarak alınırsa yukarıda tanımlanan türev sıfır olmaktadır. Barnes anlamında her Γ-halkanın Nobusawa anlamında bir Γ'-halka olduğu [13, 1.2.3] göz önüne alınarak bu çalışmada H. Kandamar'ın 2000 yılındaki çalışmasında tanımladığı aşağıda verilen k-türev tercih edilmiştir:

M bir Γ-halka, d, M den M ye ve k da Γ dan Γ ya toplamsal dönüşümler olmak üzere $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + xk(\gamma)y + x\gamma d(y)$ özelliğini sağlayan d dönüşümüne k-türev denir [9].

H. Kandamar bu çalışmasında, k-türevin sağladığı bazı özellikleri vermiştir ve karakteristiği 2 den farklı olan asal bir gamma halka üzerinde sıfırdan farklı bir d k-türevi verildiğinde herhangi bir $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $k(\gamma) \neq 0$ ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ ise M Γ-halkasının değişmeli olduğunu ispatlamıştır.

Gamma halkalarda Lie idealler ile ilgili ilk çalışma, A. C. Paul ve Md. S. Uddin tarafından 2010 yılında yapılmıştır [18]. Ancak, bu çalışmada yapılan Lie ideal tanımı ve bu tanıma bağlı olarak elde edilen bazı özelliklerin ispatlarında hatalar saptanmıştır. Türevli asal gamma halkalarda değişmelilik koşullarını araştırılırken veya gamma halkalarda A. C. Paul tarafından verilen Lie idealler üzerinde çalışılırken, M Γ-halkasında her $a,b,c \in M$ ve her $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

$$a\alpha b\beta c = a\beta b\alpha c$$

koşulunun sağlandığı kabul edilmiştir. Ancak, M Nobusawa anlamında asal Γ-halka ise bu koşul altında M Γ-halkası değişmeli olur. Dolayısıyla gamma halkası üzerinde değişmelilik koşulları araştırılırken yukarıda verilen koşul altında çalışılması uygun olmayacaktır. Bu nedenlerle gamma halkalarda Lie idealinin yeniden tanımlanması ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

Bir matematiksel yapı üzerinde çalışırken bu yapının sağladığı özelliklerin bilinmesi o yapı üzerinde yeni çalışmalar yapılmasını kolaylaştırmaktadır. Bu düşünceden yola çıkarak, bu tezin oluşturulma amacı, gamma halkaların yapısı ile ilgili yeni bilgiler elde edilmesi olarak belirlenmiştir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Gamma halkaların γ-birimli, γ-değişmeli, γ-asal, γ-basit olması ve γ-althalka, γ-ideal, γ-nilpotent ideal, γ-Lie ideal gibi yeni kavramların tanımlandığı 3. bölümde, γ-Lie idealin sağladığı özellikler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde; U, karakteristiği 2 den farklı olan bir M zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-althalkası ve aynı zamanda bir γ-Lie ideali ise $U \subseteq C_\gamma$ dır veya U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsadığı ispatlanmıştır.

4. bölümde, halkalarda geçerli olan özelliklerin tamamının gamma halkalarda her zaman geçerli olmadığı, bir örnek verilerek gösterilmiştir ve türevli gamma halkalarda γ-Lie idealler üzerindeki bazı özellikler yardımıyla gamma halkanın yapısı ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bu bağlamda, karakteristiği 2 den farklı olan bir M zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halkasında, U bir γ-Lie ideal ve d, $k(\gamma) = 0$

şartını sağlayan sıfırdan farklı bir k-türev olmak üzere $d^2(U) = 0$ ise $U \subseteq C_\gamma$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde; U, C_γ tarafından kapsanmayan bir γ-Lie ideal ise $C_\gamma(d(U)) = C_\gamma$ olduğu ve $d^3 \neq 0$ iken $d(U)$ tarafından üretilen γ-althalkanın, M nin sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsadığı ispatlanmıştır.

5. bölümde, gamma halkalar ile gamma halkaya bağlı olarak tanımlanan halkalar arasında bazı ilişkiler kurulmuştur ve halkaların bilinen özellikleri yardımıyla gamma halkanın yapısı ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

(i) M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olmak üzere sıfırdan farklı herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası yarı-asal halka ise M, Γ-halkası yarı-asal olur.
(ii) M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olmak üzere sıfırdan farklı herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası yarı-basit halka ise M, Γ-halkası yarı-basit olur.

Ayrıca bu bölümde, 3. bölümde verilen tanımlar yardımıyla gamma halkanın yapısı ile ilgili olarak aşağıdaki özellikler elde edilmiştir:

(i) M bir γ-asal Γ-halka ise bu durumda M Γ-halkası asaldır.
(ii) M bir γ-basit Γ-halka ise bu durumda M Γ-halkası basittir.

Diğer taraftan, karakteristiği 2 den farklı olan bir M Nobusawa anlamında γ-asal Γ-halkası üzerindeki bir d, k-türevi için $d^2 = 0$ ise $d = 0$ veya $k^2 = 0$ olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde ayrıca, gamma halkalarda literatürde var olan radikaller ile gamma halkanın bir elemanına bağlı tanımlanan radikalleri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır ve bu bağlamda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

(i) M Γ-halkasının asal radikali M nin γ-asal radikali tarafından kapsanır.
(ii) M Γ-halkasının güçlü nilpotent radikali M nin γ-nilpotent radikali tarafından kapsanır.
(iii) M Γ-halkasının Levitzki-nil radikali M nin γ-Levitzki-nil radikali tarafından kapsanır.

(iv) M Γ-halkasının Jacobson radikali M nin γ-Jacobson radikali tarafından kapsanır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kısımda, halkalar ve gamma halkalarda bazı temel tanımlar ile diğer kısımlarda gerekli olacak bazı özellikler alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1. R halkasının bir S altkümesi, R halkasındaki işlemlere göre halka oluyorsa S kümesine R halkasının *althalkası* denir.

Tanım 2.2. R bir halka olsun. $C(R) = \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$ kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.3. R ve S herhangi iki halka ve $f : R \to S$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise o zaman f dönüşümüne bir *halka homomorfizması* denir. Özel olarak, $R = S$ ise f dönüşümüne R halkasının *endomorfizması* denir. $Kerf = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\}$ kümesine de f homomorfizmasının *çekirdeği* denir.

Tanım 2.4. R halkasının her a elemanı için $na = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif n tamsayısına R halkasının *karakteristiği* denir ve $\mathrm{char} R = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. R halkasının bir X altkümesini içeren tüm alt halkalarının kesişimine *X kümesi ile üretilen (doğurulan) althalka* denir ve $\overline{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. R bir halka olsun. Her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına *asal halka*, her $a \in R$ için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına *yarı-asal halka* denir.

Tanım 2.7. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $ab - ba$ ifadesine a ile b elemanlarının *komütatör çarpımı* denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. R bir halka ve U, R halkasının bir toplamsal altgrubu olsun. Eğer $[U,R] \subseteq U$ ise U ya R halkasının bir *Lie ideali* denir. Burada $[U,R]$ kümesi, $u_i \in U$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n}[u_i,r_i]$ şeklindeki sonlu toplamlardan oluşur.

Tanım 2.9. R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer $I^n = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa I idealine R halkasının *nilpotent ideali* denir.

Tanım 2.10. M bir toplamsal değişmeli grup ve R bir halka olmak üzere $R \times M \to M$ fonksiyonu her $a,b \in M$ ve $r,s \in R$ için,

(i) $r(a+b) = ra+rb$

(ii) $(r+s)a = ra+sa$

(iii) $r(sa) = (rs)a$

koşullarını sağlıyorsa M grubuna *sol R-modül* denir. Ayrıca, R birimli halka olmak üzere her $a \in M$ için, $1_R a = a$ koşulu da sağlanıyorsa M sol R-modülüne *birimsel sol R-modül* denir. Benzer şekilde sağ R-modül ve birimsel sağ R-modül tanımları da yapılabilir.

Tanım 2.11. M toplamsal değişmeli bir grup olsun. R ve S herhangi iki halka olmak üzere,

(i) M bir sol R-modül,

(ii) M bir sağ S-modül,

(iii) Her $m \in M$, $r \in R$ ve $s \in S$ için $r(ms) = (rm)s$

koşulları sağlanıyorsa M ye R-S-bimodül denir.

Tanım 2.12. M bir R-modül ve N kümesi M modülünün boş olmayan bir altkümesi olsun. N, M toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubu olmak üzere her $r \in R$ ve $n \in N$ için, $rn \in N$ oluyorsa N kümesine M modülünün bir *altmodülü* denir.

Tanım 2.13. M bir sol R-modül ve $B \subseteq M$ olmak üzere, $Ann_l(B) = \{r \in R \mid rb = 0, \forall b \in B\}$ kümesine B nin *sol sıfırlayanı* denir.

Tanım 2.14. M sol R-modülünün sol sıfırlayanı sıfır ise M modülüne *vefalı (faithful)* sol R-modül denir.

Tanım 2.15. R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ sağlanıyorsa d fonksiyonuna R halkasının bir *türevidir* denir.

Lemma 2.16. *R sıfırdan farklı nilpotent ideal içermeyen ve $2x = 0$ iken $x = 0$ koşulunu sağlayan bir halka olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı bir althalkası ve Lie ideali ise $U \subset C(R)$ veya U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.*

İspat: [5, Lemma 1.3] □

Teorem 2.17. *R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka olmak üzere R halkasının herhangi iki türevi d_1 ve d_2 olsun. Eğer $d_1 \circ d_2$, R halkasının bir türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

İspat: [19, Teorem 1] □

Teorem 2.18. *R herhangi bir halka, d, R nin bir türevi ve $d^3 \neq 0$ olsun. Bu durumda $\overline{d(R)}$, R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.*

İspat: [6, Teorem 1] □

Teorem 2.19. *R bir asal halka, d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $ad(x) = d(x)a$ eşitliği geçerli olsun. Bu durumda;*

(i) R halkasının karakteristiği 2 den farklı ise $a \in C(R)$ dir.

(ii) R halkasının karakteristiği 2 ise $a^2 \in C(R)$ dir. Üstelik, $a \notin C(R)$ ise bu durumda λ, R halkasının genişletilmiş merkezindeki bir eleman olmak üzere d türevi, $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ ile tanımlı iç türev olur.

İspat: [7, Teorem] □

Teorem 2.20. *R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka olsun. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $d^2(U) = 0$ ise $U \subset C(R)$ dir.*

İspat: [3, Teorem 1] □

Teorem 2.21. *R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka olsun. d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve U, R halkasının bir Lie ideali olmak üzere $U \nsubseteq C(R)$ ise $C_R(d(U)) = C(R)$ dir.*

İspat: [3, Teorem 2] □

Teorem 2.22. *R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka olsun. d, R halkasının bir türevi, $d^3 \neq 0$ ve U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideal ise $\overline{d(U)}$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.*

İspat: [3, Teorem 3] □

Teorem 2.23. *R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve U, R halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideal olsun. Eğer d_1 ve d_2, R halkasının $d_1 d_2 (U) = 0$ koşulunu sağlayan türevleri ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

İspat: [3, Teorem 4] □

Teorem 2.24. *R karakteristiği 2 ve 3 ten farklı olan bir asal halka ve U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in C(R)$ ise $U \subset C(R)$ dir.*

İspat: [1, Teorem 1] □

Teorem 2.25. *R karakteristiği 2 olan bir asal halka ve d, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. U, R halkasının bir Lie ideali ve alt halkası olmak üzere her $u \in U$ için $[u, d(u)] \in C(R)$ ise U değişmelidir.*

İspat: [1, Teorem 4] □

2.2. Gamma Halkaları

Bir gruptan başka bir gruba tanımlı homomorfizmaların oluşturduğu küme toplamaya göre kapalı olup toplamsal bir grup oluşturur. Fakat bu grup fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre kapalı değildir. A ve B toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere A dan B ye tanımlı tüm otomorfizmaların kümesi M, B den A ya tanımlı tüm otomorfizmaların kümesi Γ olsun. Buna göre $f,g \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $f\alpha g \in M$ ve $\alpha f\beta \in \Gamma$ sağlanacağından $M \times \Gamma \times M \to M$ ile $\Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$ üçlü işlemleri tanımlanabilir. Bu düşünceden hareketle Nobusawa 1964 yılında halkaların bir genelleştirilmesi olan gamma halkanın tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir [17].

Tanım 2.26. M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar olsun. Eğer,

$$\begin{array}{ccc} M \times \Gamma \times M \to M & \quad ve \quad & \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma \\ (a,\alpha,b) \mapsto a\alpha b & & (\alpha,a,\beta) \mapsto \alpha a\beta \end{array}$$

fonksiyonları her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

(i) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$
$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$
$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(ii) $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c = a\alpha(b\beta c)$

(iii) $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere her $a,b \in M$ için $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$

koşullarını sağlıyorsa M ye *Nobusawa* Γ*-halka* denir ve $(\Gamma,M)_N$ ile gösterilir.

Barnes 1966 yılında, Nobusawa'nın yaptığı tanımdaki ikinci fonksiyonu kaldırarak Nobusawa Γ-halka tanımını aşağıdaki şekilde zayıflatmıştır [2].

Tanım 2.27. M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar olsun. Eğer,

$$\begin{array}{c} M \times \Gamma \times M \to M \\ (a,\alpha,b) \mapsto a\alpha b \end{array}$$

fonksiyonu her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için,

(i) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$
$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$
$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(ii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

koşullarını sağlarsa M ye *Barnes* Γ*-halka* denir ve $(\Gamma,M)_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.28. M bir Barnes Γ-halka olmak üzere her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c$ koşulu sağlanıyorsa M ye *zayıf Nobusawa* Γ*-halka* denir ve $(\Gamma,M)_{wN}$ ile gösterilir.

Önerme 2.29. *(i) [13, 1.2.1] M bir Nobusawa* Γ*-halka ise* Γ*, zayıf Nobusawa* M*-halkadır.*

(ii) [13, 1.2.2] M bir zayıf Nobusawa Γ*-halka ise* $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \mid M\gamma M = 0\}$ *olmak üzere M, Nobusawa* Γ/Λ*-halkadır.*

(iii) [13, 1.2.3] M bir Barnes Γ*-halka olsun. Bu durumda M Nobusawa* Γ'*-halka olacak biçimde* Γ *grubuna bağlı bir* Γ' *toplamsal değişmeli grubu vardır.*

Tanım 2.30. M bir Γ-halka, $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. $[\gamma,x] : M \to M$ fonksiyonu her $m \in M$ için $m[\gamma,x] = m\gamma x$ olarak tanımlanırsa $[\gamma,x]$, M Γ-halkasının bir endomorfizması olur.

(i) $R = \left\{ \sum_i [\gamma_i,x_i] \mid \gamma_i \in \Gamma, x_i \in M \right\}$ kümesi M toplamsal değişmeli grubunun sağ çarpım endomorfizmalar halkasının bir alt halkasıdır. Bu alt halkaya M Γ-halkasının *sağ operatör halkası* denir.

(ii) $L = \left\{ \sum_j [y_j,\beta_j] \mid y_j \in M, \beta_j \in \Gamma \right\}$ kümesi M toplamsal değişmeli grubunun sol çarpım endomorfizmalar halkasının bir alt halkasıdır. Bu alt halkaya M Γ-halkasının *sol operatör halkası* denir.

Özellik 2.31. *[13, 1.4.2] M bir* Γ*-halka olsun.*

(i) M Γ*-halkasının sağ operatör halkası üzerindeki çarpma işlemi,* $\sum_i [\gamma_i,x_i], \sum_j [\mu_j,y_j] \in R$ *olmak üzere,*

$$\sum_i [\gamma_i,x_i] \sum_j [\mu_j,y_j] = \sum_{i,j} [\gamma_i,x_i\mu_j y_j]$$

olarak tanımlıdır. Benzer şekilde sol operatör halkasındaki çarpma işlemi de,

$$\sum_i [x_i,\gamma_i] \sum_j [y_j,\mu_j] = \sum_{i,j} [x_i\gamma_i y_j,\mu_j]$$

şeklinde tanımlıdır.

(ii) $x,y \in M$ *ve* $\gamma,\mu \in \Gamma$ *için,*

$$[\gamma,x]+[\gamma,y]=[\gamma,x+y]\ ;\ [x,\gamma]+[y,\gamma]=[x+y,\gamma]$$

$$[\gamma,x]+[\mu,x]=[\gamma+\mu,x]\ ;\ [x,\gamma]+[x,\mu]=[x,\gamma+\mu]$$

eşitlikleri geçerlidir.

(iii) M *vefalı L-R-bimodüldür.*

(iv) $N \subseteq M$ *ve* $\Lambda \subseteq \Gamma$ *altkümeleri için* $[\Lambda,N]$ *kümesi,* $\gamma_i \in \Gamma$ *ve* $x_i \in M$ *olmak üzere* $[\gamma_i,x_i]$ *elemanlarının sonlu toplamlarından oluşur. Benzer şekilde* $[N,\Lambda]$ *kümesi de tanımlanır. Buna göre sağ operatör halka* $R=[\Gamma,M]$ *ve sol operatör halka da* $L=[M,\Gamma]$ *olarak gösterilebilir.*

Tanım 2.32. M bir Γ-halka olsun. Toplamsal M grubunun bir I altgrubu verildiğinde her $a \in I$, $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $a\gamma m \in I$ $(m\gamma a \in I)$ oluyorsa I kümesine M, Γ-halkasının *sağ(sol) ideali* denir. I, M nin hem sağ hem de sol ideali ise I ya M Γ-halkasının *ideali* denir ve $I < M$ ile gösterilir. M Γ-halkasının bir S altkümesi verildiğinde S kümesini içeren M Γ-halkasının tüm ideallerinin kesişimine *S tarafından üretilen ideal* denir ve (S) ile gösterilir.

Önerme 2.33. *[2]M bir* Γ*-halka olsun.* $a \in M$ *ile üretilen ideal,*

$$(a)=\left\{\sum_{sonlu} na+x\alpha a+a\beta y+u\gamma a\delta v \mid x,y,u,v \in M, \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

kümesine eşittir.

Tanım 2.34. M bir Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, $C_\gamma=\{x \in M \mid x\gamma m=m\gamma x, \forall m \in M\}$ kümesine M Γ*-halkasının* γ*-merkezi* denir. Ayrıca, $C_\Gamma=\{x \in M \mid x\gamma m=m\gamma x, \forall m \in M, \forall \gamma \in \Gamma\}$ kümesine de M Γ*-halkasının merkezi* denir. Benzer şekilde herhangi bir $a \in M$ için C_a kümesi ile C_Γ kümesi de tanımlanabilir.

Tanım 2.35. M bir Γ-halka ve P, M Γ-halkasının bir ideali olsun. M Γ-halkasının herhangi iki A ve B ideali için $A\Gamma B \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P idealine *asal ideal* denir.

Tanım 2.36. Bir M Γ-halkasının sıfır ideali asal ideal ise M ye *asal* Γ-halka denir.

Tanım 2.37. M bir Γ-halka olsun. Eğer $M\Gamma M \neq 0$ ve M Γ-halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa M ye *basit* Γ-halka denir.

Tanım 2.38. M bir Γ-halka, $a,b \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. $a\gamma b - b\gamma a$ ifadesine *komütatör çarpımı* denir ve $[a,b]_\gamma$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\alpha,\beta \in \Gamma$ ve $a \in M$ için $\alpha a\beta - \beta a\alpha$ ifadesine de *komütatör çarpımı* denir ve $[\alpha,\beta]_a$ ile gösterilir.

Tanım 2.39. [9] M bir Γ-halka, $d : M \to M$ ve $k : \Gamma \to \Gamma$ toplamsal fonksiyonlar olsun. Eğer her $a,b \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $d(a\beta b) = d(a)\beta b + ak(\beta)b + a\beta d(b)$ oluyorsa d fonksiyonuna M Γ-halkasının *k-türevi* denir.

Lemma 2.40. *[9, Lemma 3] M bir Γ-halka ve d, M Γ-halkası üzerinde bir k-türev olsun. Bu durumda, her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

(i) $[a,b]_\alpha = -[b,a]_\alpha, \quad [\beta,\gamma]_a = -[\gamma,\beta]_a$

(ii) $[a+b,c]_\gamma = [a,c]_\gamma + [b,c]_\gamma, \quad [\alpha+\beta,\gamma]_a = [\alpha,\gamma]_a + [\beta,\gamma]_a$

(iii) $[a\alpha b,c]_\gamma = a\alpha[b,c]_\gamma + a[\alpha,\gamma]_c b + [a,c]_\gamma \alpha b$

(iv) $[\alpha a\beta,\gamma]_b = \alpha a[\beta,\gamma]_b + \alpha[a,b]_\gamma \beta + [\alpha,\gamma]_b a\beta$

(v) $[[a,b]_\gamma,c]_\gamma + [[b,c]_\gamma,a]_\gamma + [[c,a]_\gamma,b]_\gamma = 0$

(vi) $[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a + [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a = 0$

(vii) $d([a,b]_\gamma) = [d(a),b]_\gamma + [a,b]_{k(\gamma)} + [a,d(b)]_\gamma$

(viii) $k([\gamma,\beta]_a) = [k(\gamma),\beta]_a + [\gamma,\beta]_{d(a)} + [\gamma,k(\beta)]_a$

Tanım 2.41. M bir Γ-halka olsun ve $a \in M$ ile $\gamma \in \Gamma$ sabit elemanları verilsin. $I_{a\gamma} : M \to M$ ve $I_{\gamma a} : \Gamma \to \Gamma$ dönüşümleri sırasıyla her $m \in M$ için $I_{a\gamma}(m) = [a,m]_\gamma$

ve $I_{\gamma a}(\beta)=[\gamma,\beta]_a$ olarak tanımlansın. $I_{a\gamma}$ dönüşümüne γ ve a elemanları tarafından belirlenmiş $I_{\gamma a}$-iç türev denir.

Tanım 2.42. [2] M bir Γ-halka ve S, M Γ-halkasının bir alt kümesi olsun. Eğer $S=\emptyset$ veya $a,b\in S$ için $(a)\Gamma(b)\cap S\neq\emptyset$ ise S kümesine bir *m-sistem* denir.

Özellik 2.43. *M bir Γ-halka ve P, M Γ-halkasının M ye eşit olmayan bir ideali olsun. Bu durumda P idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul P nin tümleyeninin bir m-sistem olmasıdır.*

Tanım 2.44. [2] M bir Γ-halka olsun. M Γ-halkasının *asal radikali*,

$$\{m\in M \mid m\in S \text{ olacak şekilde her } S\ \gamma\text{-}m\text{-sistemi 0 elemanını içerir}\}$$

kümesi olarak tanımlanır ve $\mathcal{B}(M)$ ile gösterilir.

Teorem 2.45. *[13, Teorem 3.1.7] M bir Γ-halka olsun. M Γ-halkasının asal radikali $\mathcal{B}(M)$, M Γ-halkasının bütün asal ideallerinin kesişimidir.*

Tanım 2.46. [4] M bir Γ-halka ve S, M Γ-halkasının bir alt kümesi olsun.

(i) Sonlu herhangi $F\subseteq S$ ve $\lambda\subseteq\Gamma$ alt kümeleri için $(F\lambda)^nF=0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı varsa S kümesine *yerel nilpotent altküme* denir.
(ii) M Γ-halkasının bütün yerel nilpotent ideallerinin toplamına M Γ-halkasının *Levitzki nil radikali* denir ve $\mathcal{L}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.47. [4] M bir Γ-halka ve $a\in M$ olsun.

(i) Herhangi bir $\gamma\in\Gamma$ ve her $x\in M$ için,

$$x\gamma a+\sum_i x\xi_i x_i-\sum_i x\gamma a\xi_i x_i=0$$

olacak şekilde $x_i\in M$ ve $\xi_i\in\Gamma$ varsa x elemanına *sağ yarı regüler* eleman denir. M Γ-halkasının bir S alt kümesinin her elemanı sağ yarı regüler ise S kümesine *sağ yarı regüler altküme* denir.

(ii) M Γ-halkasının *Jacobson radikali*,

$$\{a \in M \mid (a)\,\text{sağ yarı regüler ideal}\}$$

kümesi olarak tanımlanır ve $\mathcal{J}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.48. [4] M bir Γ-halka ve $a \in M$ olsun.

(i) Her bir $\alpha \in \Gamma$ için $(a\alpha)^n a = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa a elemanına M Γ-halkasının bir *nilpotent elemanı* denir. M Γ-halkasının bir I idealinin her elemanı nilpotent ise I idealine *nil ideal* denir.
(ii) M Γ-halkasının bütün nil ideallerinin toplamına M Γ-halkasının *nil radikali* denir ve $\mathcal{N}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.49. [4] M bir Γ-halka ve $a \in M$ olsun. $(a\Gamma)^n a = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa a ya M Γ-halkasının bir *güçlü nilpotent elemanı* denir. M Γ-halkasının bir I idealinin her elemanı güçlü nilpotent ise I idealine *güçlü nil ideal* denir.

Tanım 2.50. [4] M bir Γ-halka ve I, M Γ-halkasının bir ideali olsun.

(i) Eğer $(I\Gamma)^n I = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa I idealine M Γ-halkasının bir *güçlü nilpotent ideali* denir.
(ii) M Γ-halkasının bütün güçlü nilpotent ideallerinin toplamına M Γ-halkasının *güçlü nilpotent radikali* denir ve $\mathcal{S}(M)$ ile gösterilir.

3. GAMMA HALKALARININ γ-LIE IDEALLERI

Bu bölümde, M bir Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olmak üzere M nin γ-değişmeli, γ-birimli, γ-asal, γ-basit olması ile M nin γ-althalkası, γ-ideali, γ-Lie ideali gibi kavramlar ilk kez tanımlanacak ve γ-Lie idealler ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.

3.1. Tanımlar ve Bazı Özellikler

Tanım 3.1. M bir Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. Eğer $C_\gamma = M$ ise M Γ-halkasına *γ-değişmelidir* denir.

Tanıma göre, bir M Γ-halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her $\gamma \in \Gamma$ için M Γ-halkasının γ-değişmeli olmasıdır.

Örnek 3.2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}, \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \\ z & t \end{pmatrix} \mid x,y,z,t \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Buna göre M bir Γ-halkadır ve $C_\gamma = M$ olduğundan M Γ-halkası γ-değişmelidir.

Tanım 3.3. M bir Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. Her $x \in M$ için $x\gamma e = e\gamma x = x$ olacak şekilde bir $e \in M$ varsa M Γ-halkasına *γ-birimlidir* denir.

Örnek 3.4. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Buna göre M bir Γ-halkadır. Eğer $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$ alınırsa her $m = \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \in M$ için $m\gamma e = e\gamma m = m$ eşitliği sağlanır. O halde M Γ-halkası γ-birimlidir.

Tanım 3.5. M bir Γ-halka, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve A, M Γ-halkasının toplamsal bir altgrubu olsun.

(i) Her $a,b \in A$ için $a\gamma b \in A$ ise A ya M Γ-halkasının bir *γ-althalkası* denir.

(ii) Her $a \in A$ ve $m \in M$ için $a\gamma m \in A$ $(m\gamma a \in A)$ ise A ya M Γ-halkasının bir *sağ(sol) γ-ideali* denir. A, M nin hem sağ hem de sol γ-ideali ise A ya M Γ-halkasının *γ-ideali* denir.

M bir Γ-halka ve A, M Γ-halkasının bir toplamsal altgrubu olsun. Tanıma göre, A nın M Γ-halkasının bir ideali olması için gerek ve yeter koşul her $\gamma \in \Gamma$ için A nın γ-ideal olmasıdır.

Örnek 3.6. $M = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z})$ ve $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ olmak üzere M, Γ-halkasını düşünelim. $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi M Γ-halkasının hem bir γ-althalkası hem de bir γ-idealidir. Ancak A, M Γ-halkasının bir ideali değildir.

Tanım 3.7. M bir Γ-halka, $a \in M$ ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. M Γ-halkasının a elemanını içeren bütün γ-ideallerinin kesişimine *a elemanı tarafindan üretilen ideal* denir ve $(a)_\gamma$ ile gösterilir.

Önerme 3.8. *M bir Γ-halka, $a \in M$ ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. Bu durumda,*

$$(a)_\gamma = \left\{ na + m\gamma a + a\gamma x + \sum_{i=1}^{k} u_i \gamma a \gamma v_i \mid m, x, u_i, v_i \in M, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

dir.

Tanım 3.9. M bir Γ-halka, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve $U \subset M$ verilsin. Eğer U, M Γ-halkasının toplamsal bir altgrubu ve $[U,M]_\gamma \subseteq U$ oluyorsa U kümesine M Γ-halkasının bir *γ-Lie ideali* denir.

Örnek 3.10. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ kümesi M Γ-halkasının bir γ-Lie idealidir ve γ-althalkasıdır. Ancak, U bir γ-ideal değildir.

Tanım 3.11. M bir Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun.

(i) Herhangi bir $a \in M$ için $a^n := (a\gamma)^n a = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı varsa a elemanına M Γ-halkasının *γ-nilpotent elemanı* denir.
(ii) S, M Γ-halkasının bir γ-ideali olmak üzere S nin her elemanı γ-nilpotent ise S γ-idealine *γ-nil ideal* denir.
(iii) I, M Γ-halkasının bir γ-ideali olmak üzere $I^n := (I\gamma)^n I = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı varsa I γ-idealine M Γ-halkasının *γ-nilpotent ideali* denir.

Tanıma göre, I nın M Γ-halkasının bir güçlü nil ideali olması için gerek ve yeter koşul her $\gamma \in \Gamma$ için I nın γ-nil ideal olmasıdır.

Örnek 3.12. $M = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z})$ ve $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ve $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \mid k,a,b,c \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq M$ olsun. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere $I^3 = 0$ olur. O halde I, M Γ-halkasının bir γ-nilpotent ideali olur.

Tanım 3.13. M bir Γ-halka ve P, M Γ-halkasının bir γ-ideali olsun. M Γ-halkasının A ve B γ-idealleri için $A\gamma B \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ koşulu sağlanıyorsa P γ-idealine *γ-asal ideal* denir.

Örnek 3.14. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in 3\mathbb{Z} \right\}$ kümesi M Γ-halkasının bir γ-idealidir. Ayrıca, M Γ-halkasından alınan herhangi iki A ile B elemanları için $A\gamma M\gamma B \in P$ ve $A \notin P$ olduğunda $B \in P$ olmak zorundadır. Dolayısıyla P, M Γ-halkasının bir γ-asal ideali olur.

Tanım 3.15. M bir Γ-halka, $\gamma \in \Gamma$ ve $M\gamma M \neq 0$ olsun. M Γ-halkasının $(0)_\gamma$ ile kendisinden başka γ-ideali yoksa M Γ-halkasına *γ-basit* *Γ-halka* denir.

Örnek 3.16. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q} \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Q})$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda, M bir γ-basit Γ-halka olur.

Önerme 3.17. *M bir Γ-halka ve P, M Γ-halkasının bir γ-ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) P, γ-asal idealdir.

(ii) $a,b \in M$ olmak üzere $a\gamma M\gamma b \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $a,b \in M$ olmak üzere $(a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) I ve J, M Γ-halkasının sağ γ-idealleri olmak üzere $I\gamma J \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

(v) U ve V, M Γ-halkasının sol γ-idealleri olmak üzere $U\gamma V \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

İspat:

$(i) \Rightarrow (ii)$ P γ-asal ideal ve $a,b \in M$ olmak üzere $a\gamma M\gamma b \subseteq P$ olsun. Buna göre, $a\gamma M\gamma M\gamma b \subseteq a\gamma M\gamma b \subseteq P$ olur. Burada P nin M Γ-halkasının bir γ-ideali olması kullanılırsa $(M\gamma(a\gamma M\gamma M\gamma b))\gamma M \subseteq P$ elde edilir. $M\gamma a\gamma M$ ile $M\gamma b\gamma M$ kümeleri M Γ-halkasının γ-idealleri ve P γ-asal ideal olduğundan $(M\gamma(a\gamma M\gamma M\gamma b))\gamma M = (M\gamma a\gamma M)\gamma(M\gamma b\gamma M) \subseteq P$ ifadesi $M\gamma a\gamma M \subseteq P$ veya $M\gamma b\gamma M \subseteq P$ olmasını gerektirir. $M\gamma a\gamma M \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. a ile üretilen γ-ideal A olsun. Buna göre $A\gamma A$, M Γ-halkasının γ-ideali olur. P γ-asal ideal ve $(A\gamma A)\gamma(A\gamma A) \subseteq A\gamma A\gamma A \subseteq M\gamma a\gamma M \subseteq P$ olduğundan $A \subseteq P$ elde edilir. Böylece $a \in P$ olur. Eğer $M\gamma b\gamma M \subseteq P$ olduğunu kabul edilirse benzer şekilde $b \in P$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $a,b \in M$ olmak üzere $(a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \subseteq P$ olsun. Bu durumda $a\gamma M\gamma b \subseteq (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \subseteq P$ olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ M Γ-halkasının A ve B γ-idealleri için $A\gamma B \subseteq P$ iken $A \nsubseteq P$ olsun. O zaman $x \in A$ ve $x \notin P$ olacak şekilde en az bir $x \in M$ vardır. $y \in B$ alalım.

$(x)_\gamma \gamma (y)_\gamma \subseteq A\gamma B \subseteq P$ olduğundan (iii) gereği $y \in P$ olur. O halde $B \subseteq P$ elde edilir. Dolayısıyla P, γ-asal ideal olur.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ I ve J, M Γ-halkasının sağ γ-idealleri olmak üzere $I\gamma J \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ olsun. Bu durumda $x \in I$ ve $x \notin P$ olacak şekilde en az bir $x \in M$ vardır. Herhangi bir $y \in J$ için $(x\gamma M)\gamma y \subseteq I\gamma J \subseteq P$ olduğundan (ii) gereği $y \in P$ olur. O halde $J \subseteq P$ dir.

$(iv) \Rightarrow (i)$ M Γ-halkasının A ve B γ-idealleri için $A\gamma B \subseteq P$ olsun. Bu durumda (iv) gereği $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. O halde P bir γ-asal idealdir.

Benzer şekilde $(ii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$ olduğu kanıtlanabilir. □

Tanım 3.18. M bir Γ-halka olsun. Her $m, n \in M$ için $m\gamma M\gamma n = 0$ iken $m = 0$ veya $n = 0$ ise M Γ-halkasına γ-*asaldır* denir.

Örnek 3.19. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Buna göre $A, B \in M$ için $A\gamma M\gamma B = 0$ ve $A \neq 0$ ise $B = 0$ olmak zorundadır. O halde M, γ-asal Γ-halkadır.

3.2. Gamma Halkalarda γ-Lie İdealler

Lemma 3.20. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-althalkası ve aynı zamanda γ-Lie ideali ise $U \subseteq C_\gamma$ dır veya U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

İspat: U, γ-althalkası γ-değişmeli olmasın. O zaman $[u,v]_\gamma \neq 0$ olacak şekilde $u, v \in U$ vardır. U, γ-Lie ideal olduğundan herhangi bir $m \in M$ için $[u, v\gamma m]_\gamma \in U$ dur.

$$[u, v\gamma m]_\gamma = v\gamma [u,m]_\gamma + [u,v]_\gamma \gamma m$$

eşitliği ve U nun γ-althalka olduğu kullanılırsa her $m \in M$ için $v\gamma[u,m]_\gamma \in U$ olduğundan $[u,v]_\gamma \gamma M \subseteq U$ olduğu görülür. Böylece her $a, b \in M$ için

$\left[[u,v]_\gamma \gamma a, b\right]_\gamma \in U$ olur.

$$\left[[u,v]_\gamma \gamma a, b\right]_\gamma = [u,v]_\gamma \gamma a \gamma b - b\gamma [u,v]_\gamma \gamma a \in U$$

ifadesinde $[u,v]_\gamma \gamma a \gamma b \in U$ olduğu kullanılırsa her $a,b \in M$ için $b\gamma[u,v]_\gamma \gamma a \in U$ elde edilir. Bu ise $M\gamma[u,v]_\gamma \gamma M \subseteq U$ olmasını gerektirir. Burada $M\gamma[u,v]_\gamma \gamma M$ kümesi M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealidir. Eğer $M\gamma[u,v]_\gamma \gamma M = 0$ olsaydı; M, γ-asal Γ-halka olduğundan $[u,v]_\gamma = 0$ elde edilirdi. Oysa bu $[u,v]_\gamma \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde U, γ-değişmeli değilse, M Γ-halkasının sıfırdan farklı $M\gamma[u,v]_\gamma \gamma M$ γ-idealini kapsar.

Şimdi U nun γ-değişmeli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $U \subseteq C_\gamma$ olduğunu göstereceğiz. U, γ-Lie ideal olduğundan $u \in U$ ve $x \in M$ için $[u,x]_\gamma \in U$ olur. U, γ-değişmeli olduğundan $\left[u,[u,x]_\gamma\right]_\gamma = 0$ dır. Son ifadede $y \in M$ olmak üzere x yerine $x\gamma y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[u,[u,x\gamma y]_\gamma\right]_\gamma \\ &= \left[u, x\gamma[u,y]_\gamma + [u,x]_\gamma \gamma y\right]_\gamma \\ &= [u,x]_\gamma \gamma [u,y]_\gamma + x\gamma\left[u,[u,y]_\gamma\right]_\gamma + \left[u,[u,x]_\gamma\right]_\gamma \gamma y + [u,x]_\gamma \gamma [u,y]_\gamma \\ &= 2\,[u,x]_\gamma \gamma [u,y]_\gamma \end{aligned}$$

bulunur. M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan son eşitlik her $x,y \in M$ için $[u,x]_\gamma \gamma [u,y]_\gamma = 0$ olmasını gerektirir. Bu eşitlikte $m \in M$ olmak üzere y yerine $m\gamma x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [u,x]_\gamma \gamma [u,m\gamma x]_\gamma \\ &= [u,x]_\gamma \gamma [u,m]_\gamma \gamma x + [u,x]_\gamma \gamma m \gamma [u,x]_\gamma \\ &= [u,x]_\gamma \gamma m \gamma [u,x]_\gamma \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. O halde her $x \in M$ için $[u,x]_\gamma \gamma M \gamma [u,x]_\gamma = 0$ olur. Burada M, Γ halkasının γ-asal olduğu kullanılırsa her $u \in U$ için $[u,x]_\gamma = 0$ elde edilir. Bu ise $U \subseteq C_\gamma$ olmasını gerektirir. □

Sonuç 3.21. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka olsun. Eğer bir a elemanı, her $x \in M$ için $[a,x]_\gamma$ ile γ-değişmeli ise $a \in C_\gamma$ dır.*

Lemma 3.22. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali olmak üzere $U \nsubseteq C_\gamma$ ise $[K,M]_\gamma \subset U$ ve $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olacak şekilde M Γ-halkasının bir K γ-ideali vardır.*

İspat: İlk olarak $[U,U]_\gamma \neq 0$ olduğunu gösterelim. $[U,U]_\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $a \in U$ ve $m \in M$ için $\left[a,[a,m]_\gamma\right]_\gamma = 0$ dır. Burada Sonuç 3.21 kullanılırsa $a \in C_\gamma$ olur. Bu ise $U \subset C_\gamma$ olmasını gerektirir. Oysa bu hipotezle çelişir. O halde $[U,U]_\gamma \neq 0$ olmak zorundadır. $K = M\gamma[U,U]_\gamma\gamma M$ alınırsa K, M nin bir γ-ideali olur ve $[U,U]_\gamma \neq 0$ olduğundan $K \neq 0$ dır.

$T(U) = \left\{x \in M \mid [x,M]_\gamma \subseteq U\right\}$ olsun. Bu tanıma göre, $U \subseteq T(U)$ ve $T(U)$ kümesi M Γ-halkasının hem γ-althalkası hem de γ-Lie idealidir. $[U,U]_\gamma \neq 0$ olduğundan $[u,v]_\gamma \neq 0$ olacak şekilde $u,v \in U$ vardır. U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali olduğundan her $m \in M$ için $[u,v\gamma m]_\gamma \in U$ olur.

$$[u,v\gamma m]_\gamma = [u,v]_\gamma\gamma m + v\gamma[u,m]_\gamma$$

ifadesinde $T(U)$, γ-althalka olduğundan $v\gamma[u,m]_\gamma \in T(U)$ olduğu kullanılırsa $[u,v]_\gamma\gamma M \subseteq T(U)$ elde edilir. Buradan her $m,n \in M$ için $\left[[u,v]_\gamma\gamma m,n\right]_\gamma \in T(U)$ olur. Böylece,

$$\left[[u,v]_\gamma\gamma m,n\right]_\gamma = [u,v]_\gamma\gamma[m,n]_\gamma + \left[[u,v]_\gamma,n\right]_\gamma\gamma m$$

eşitliğinde $[u,v]_\gamma\gamma[m,n]_\gamma \in T(U)$ olduğundan $\left[[u,v]_\gamma,n\right]_\gamma\gamma m \in T(U)$ bulunur. Bu ifadeyi açarsak her $m,n \in M$ için,

$$\left[[u,v]_\gamma,n\right]_\gamma\gamma m = [u,v]_\gamma\gamma n\gamma m - n\gamma[u,v]_\gamma\gamma m$$

eşitliği elde edilir. Burada $[u,v]_\gamma\gamma n\gamma m \in T(U)$ olduğu kullanılırsa $M\gamma[U,U]_\gamma\gamma M = K \subseteq T(U)$ bulunur. O halde $[K,M]_\gamma \subseteq U$ olur.

Şimdi $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olduğunu gösterelim. $[K,M]_\gamma \subseteq C_\gamma$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\left[K,[K,M]_\gamma\right]_\gamma = 0$ olur. Buradan her $x \in K$ ve her $m \in M$ için $\left[x,[x,m]_\gamma\right]_\gamma = 0$ olduğu açıktır. Öyleyse Sonuç 3.21 gereği $x \in C_\gamma$ bulunur. Böylece $K \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Herhangi bir $x \in M$ alalım. K, M Γ-halkasının bir γ-ideali olduğundan her $m,n \in M$ ve $k \in K$ için $n\gamma k\gamma m \in K$ dır. Burada $K \subseteq C_\gamma$ olduğu kullanılırsa $[x,n\gamma k\gamma m]_\gamma = 0$ bulunur. Son ifade açılırsa her $m,n \in M$ ve $k \in K$ için,

$$0 \;=\; [x,n\gamma k\gamma m]_\gamma = [x,n\gamma k]_\gamma \gamma m + n\gamma k\gamma [x,m]_\gamma$$

olur. Burada $[x,n\gamma k]_\gamma \gamma m = 0$ ve $k \in K \subseteq C_\gamma$ olduğundan her $m \in M$ için $K\gamma M\gamma [x,m]_\gamma = 0$ olduğu görülür. M, γ-asal Γ-halka olduğundan her $m \in M$ için $[x,m]_\gamma = 0$ elde edilir. Bu ise her $x \in M$ için $x \in C_\gamma$ olmasını gerektirir. Böylece $M = C_\gamma$ olduğu görülür. Ancak bu $U \nsubseteq C_\gamma$ ile çelişir. O halde $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olmak zorundadır. □

Lemma 3.23. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $U \nsubseteq C_\gamma$ ise $C_\gamma(U) = C_\gamma$ dır.*

İspat: Öncelikle $C_\gamma(U) = \{x \in M \mid x\gamma u = u\gamma x, \forall u \in U\}$ kümesinin M Γ-halkasının bir γ-althalkası olduğunu gösterelim. $x,y \in C_\gamma(U)$ ve her $u \in U$ için,

$$\begin{aligned}(x-y)\gamma u &= x\gamma u - y\gamma u = u\gamma x - u\gamma y = u\gamma(x-y),\\ (x\gamma y)\gamma u &= x\gamma(y\gamma u) = x\gamma(u\gamma y) = (x\gamma u)\gamma y = (u\gamma x)\gamma y = u\gamma(x\gamma y)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $x-y$ ile $x\gamma y$ elemanları $C_\gamma(U)$ kümesindedir. O halde $C_\gamma(U)$, M Γ-halkasının bir γ-althalkasıdır.

Şimdi $C_\gamma(U)$ nun M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali olduğunu gösterelim. $x \in C_\gamma(U)$, $m \in M$ ve her $u \in U$ için,

$$\begin{aligned}[x,m]_\gamma \gamma u &= [x\gamma u,m]_\gamma - x\gamma[u,m]_\gamma = [u\gamma x,m]_\gamma - x\gamma[u,m]_\gamma\\ &= [u,m]_\gamma \gamma x + u\gamma[x,m]_\gamma - [u,m]_\gamma \gamma x\\ &= u\gamma[x,m]_\gamma\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $[x,m]_\gamma \in C_\gamma(U)$ olur. O halde $C_\gamma(U)$, M Γ-halkasının bir γ-Lie idealidir.

Şimdi U γ-Lie idealini merkezleyen elemanların kümesinin M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsamadığını gösterelim. M Γ-halkasının $K \subseteq C_\gamma(U)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir K γ-idealinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $u \in U$ ve $k \in K$ için $[u,k]_\gamma = 0$ dır. Bu ifadede $m \in M$ olmak üzere k yerine $k\gamma m$ yazılırsa $k\gamma[u,m]_\gamma = 0$ bulunur. Burada $a \in M$ olmak üzere k yerine $k\gamma a$ yazılırsa $k\gamma a\gamma[u,m]_\gamma = 0$ olur. Son ifade her $m \in M$ ve $u \in U$ için $K\gamma M\gamma[u,m]_\gamma = 0$ olmasını gerektirir. M, Γ-halkasının γ-asal ve $K \neq 0$ olduğu kullanılırsa $U \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla $C_\gamma(U)$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsamaz. Burada Lemma 3.20 kullanılırsa $C_\gamma(U) \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Böylece $C_\gamma(U) = C_\gamma$ olur. □

Lemma 3.24. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, $x \in M$ olmak üzere $a \in C_\gamma$ ve $a\gamma x \in C_\gamma$ ise $a = 0$ veya $x \in C_\gamma$ dır.*

İspat: $a \neq 0$ olsun. $a\gamma x \in C_\gamma$ olduğundan her $m \in M$ için $[a\gamma x,m]_\gamma = 0$ dır. Bu ifade,

$$0 = [a\gamma x,m]_\gamma = a\gamma[x,m]_\gamma + [a,m]_\gamma\gamma x$$

eşitliğinde kullanılırsa $a\gamma[x,m]_\gamma = 0$ elde edilir. Burada $n \in M$ olmak üzere m yerine $m\gamma n$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= a\gamma[x,m\gamma n]_\gamma = a\gamma m\gamma[x,n]_\gamma + a\gamma[x,m]_\gamma\gamma n \\ &= a\gamma m\gamma[x,n]_\gamma + [a\gamma x,m]_\gamma\gamma n - [a,m]_\gamma\gamma x\gamma n \end{aligned}$$

olur. Burada $0 \neq a \in C_\gamma$ ve $a\gamma x \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa son eşitlikten her $n \in M$ için $a\gamma M\gamma[x,n]_\gamma = 0$ olduğu görülür. Bu ise M, γ-asal Γ-halka olduğundan her $n \in M$ için $[x,n]_\gamma = 0$ olmasını gerektirir. O halde $x \in C_\gamma$ elde edilir. □

Lemma 3.25. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ise $C_\gamma\left([U,U]_\gamma\right) = C_\gamma(U)$ olur.*

İspat: $[U,U]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olsun. $[U,U]_\gamma$ kümesi $\sum_i [u_i,v_i]_\gamma$ tipindeki sonlu toplamlardan oluştuğundan M Γ-halkasının bir toplamsal altgrubudur. Ayrıca,

$$\Big[[U,U]_\gamma, M\Big]_\gamma \subseteq \Big[[M,U]_\gamma, U\Big]_\gamma + \Big[[U,M]_\gamma, U\Big]_\gamma \subseteq [U,U]_\gamma$$

olduğundan $[U,U]_\gamma$, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali olur. Böylece $[U,U]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 3.23 gereği $C_\gamma\Big([U,U]_\gamma\Big) = C_\gamma$ olur. O halde $C_\gamma\Big([U,U]_\gamma\Big) = C_\gamma(U)$ elde edilir.

$[U,U]_\gamma \subseteq C_\gamma$ olsun. $u \in U$ ve $x \in M$ olmak üzere $a = \Big[u,[u,x]_\gamma\Big]_\gamma$ diyelim. $[U,U]_\gamma \subseteq C_\gamma$ olduğundan $a \in C_\gamma$ dır. Böylece,

$$a\gamma u = \Big[u,[u,x]_\gamma\Big]_\gamma \gamma u = \Big[u,[u,x]_\gamma \gamma u\Big]_\gamma = \Big[u,[u,x\gamma u]_\gamma\Big]_\gamma$$

ve $[U,U]_\gamma \subseteq C_\gamma$ olduğundan $a\gamma u \in C_\gamma$ bulunur. Buna göre Lemma 3.24 gereği $a = 0$ veya $u \in C_\gamma$ dır. Burada $a = 0$ ise Sonuç 3.21 den $u \in C_\gamma$ olduğu gözönüne alınırsa $U \subseteq C_\gamma$ bulunur. Bu ise $C_\gamma\Big([U,U]_\gamma\Big) = M = C_\gamma(U)$ olmasını gerektirir. □

Lemma 3.26. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $a\gamma U\gamma b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.*

İspat: Lemma 3.22 den $[K,M]_\gamma \subset U$ ve $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olacak şekilde bir M Γ-halkasının bir K γ-ideali vardır. $u \in U$, $k \in K$ ve $m \in M$ için $[k\gamma a\gamma u, m]_\gamma \in [K,M]_\gamma \subset U$ olduğundan $a\gamma[k\gamma a\gamma u, m]_\gamma \gamma b = 0$ olur. Böylece,

$$0 = a\gamma[k\gamma a\gamma u,m]_\gamma \gamma b = a\gamma k\gamma a\gamma[u,m]_\gamma \gamma b + a\gamma[k\gamma a,m]_\gamma \gamma u\gamma b$$

eşitliğinde $a\gamma k\gamma a\gamma[u,m]_\gamma \gamma b = 0$ olduğundan her $u \in U$, $k \in K$ ve $m \in M$ için,

$$a\gamma k\gamma a\gamma m\gamma u\gamma b - a\gamma m\gamma k\gamma a\gamma u\gamma b = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte ikinci terim hipotezden sıfır olduğundan sonuç olarak $a\gamma K\gamma a\gamma M\gamma U\gamma b = 0$ olduğu görülür. M, γ-asal Γ-halka olduğundan son ifade

$a\gamma K\gamma a = 0$ veya $U\gamma b = 0$ olmasını gerektirir. $a\gamma K\gamma a = 0$ olsun. Bu durumda $a\gamma K\gamma M\gamma a = 0$ olur. Buradan M Γ-halkasının γ-asal olduğu kullanılır ve $K \neq (0)$ olduğu göz önüne alınırsa $a = 0$ bulunur. Eğer $U\gamma b = 0$ ise her $u \in U$ ve $m \in M$ için $[u,m]_\gamma \gamma b = 0$ olur. Buradan,

$$0 = [u,m]_\gamma \gamma b = [u\gamma b, m]_\gamma - u\gamma [b,m]_\gamma$$

eşitliğinde $U\gamma b = 0$ olduğu kullanılırsa $U\gamma M\gamma b = 0$ bulunur. Böylece M, γ-asal Γ-halka ve $U \neq 0$ olduğundan $b = 0$ olur. □

Lemma 3.27. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, $a \in M$ sıfırdan farklı bir eleman olmak üzere her $x \in M$ için $a\gamma [u,x]_\gamma = 0$ ise $u \in C_\gamma$ olur.*

İspat: Her $m, x \in M$ için,

$$(a\gamma m)\gamma [u,x]_\gamma = a\gamma \left(m\gamma [u,x]_\gamma \right) = a\gamma [u, m\gamma x]_\gamma - a\gamma [u,m]_\gamma \gamma x = 0$$

olduğundan $a\gamma M\gamma [u,x]_\gamma = 0$ dır. Buna göre M γ-asal Γ-halka ve $a \neq 0$ olduğundan $u \in C_\gamma$ elde edilir. □

4. TÜREVLİ GAMMA HALKALARDA BAZI DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI

Gamma halkalarda gamma türev tanımı ilk olarak F. J. Jing tarafından her $a,b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için;

$$d(a\alpha b) = d(a)\alpha b + a\alpha d(b)$$

koşulunu sağlayan $d : M \to M$ toplamsal fonksiyonu olarak verilmiştir ve türevli gamma halkalarla ilgili bir çok özellik ispatlanmıştır [8]. Ancak, M asal bir zayıf Nobusawa gamma halka ise bu şekilde tanımlanan d türevi sıfıra eşittir. Çünkü, her $x,m,y \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned}
& d(x(\gamma m\beta)y) = d((x\gamma m)\beta y) \\
\Rightarrow\quad & d(x)(\gamma m\beta)y + x(\gamma m\beta)d(y) = d(x\gamma m)\beta y + (x\gamma m)\beta d(y) \\
\Rightarrow\quad & d(x)\gamma m\beta y + x\gamma m\beta d(y) = d(x)\gamma m\beta y + x\gamma d(m)\beta y + x\gamma m\beta d(y) \\
\Rightarrow\quad & x\gamma d(m)\beta y = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $M\Gamma d(M)\Gamma M = 0$ olur. Buna göre M asal Γ-halka olduğundan $d = 0$ bulunur.

Önerme 2.29 gereği her Barnes anlamında Γ-halka uygun bir Γ' toplamsal değişmeli grubu için Nobusawa anlamında Γ'-halkadır. Bu nedenle, gamma halkalarda yukarıda verilen türev tanımı kullanarak çalışmak yerine bu bölümde Kandamar'ın [9] da tanımladığı k-türev kullanılmıştır.

Lemma 4.1. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının bir k-türevi ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $d^2 = 0$ ise $d = 0$ dır.*

İspat: $x,y \in M$ olmak üzere $d^2 = 0$ olduğundan $d^2(x\gamma y) = 0$ dır. Böylece, M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı ve $d^2 = 0$ olduğundan her $x,y \in M$ için,

$$\begin{aligned}
0 = d^2(x\gamma y) &= d^2(x)\gamma y + 2d(x)\gamma d(y) + x\gamma d^2(y) \\
&= d(x)\gamma d(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $m \in M$ olmak üzere y yerine $m\gamma x$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = d(x)\gamma d(m\gamma x) &= d(x)\gamma d(m)\gamma x + d(x)\gamma m\gamma d(x) \\ &= d(x)\gamma m\gamma d(x) \end{aligned}$$

olur. M, γ-asal Γ-halka olduğundan son ifadeden her $x \in M$ için $d(x) = 0$ bulunur. Bu ise $d = 0$ demektir. $\square$

Aşağıda, Lemma 4.1 de $k(\gamma) = 0$ koşulunun hipotezden kaldırılamayacağına ilişkin bir örnek yer almaktadır.

Örnek 4.2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & r & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,r \in \mathbb{Z} \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. Buna göre M bir Γ-halka olur. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix} \in M$ olmak üzere $A\gamma M\gamma B = 0$ ve $A \neq 0$ olsun. Bu durumda A matrisinin girdilerinden en az bir tanesi sıfırdan farklıdır. Şimdi bu durumları inceleyelim.

$a_1 \neq 0$ veya $c_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ alınırsa $A\gamma M\gamma B = 0$ olduğundan $c_2 = r_2 = 0$ bulunur. Eğer $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ alınırsa benzer şekilde $a_2 = b_2 = 0$ olur.

$b_1 \neq 0$ veya $r_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$ alınırsa $A\gamma M\gamma B = 0$ olduğundan $c_2 = r_2 = 0$ bulunur. Eğer $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ alınırsa benzer şekilde $a_2 = b_2 = 0$ olur.

O halde $A\gamma M\gamma B = 0$ ve $A \neq 0$ ise $B = 0$ olmak zorundadır.

Bu durumda M bir γ-asal Γ-halkadır ve $\operatorname{char} M \neq 2$ dir. $d: M \to M$, $d\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & r & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 & -b \\ -r & 0 & -r \end{pmatrix}$ ve $k: \Gamma \to \Gamma$, $k\begin{pmatrix} u & v \\ z & t \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u+m & v+n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix} \in M$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d(A+B) &= d\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & a_1+a_2 \\ c_1+c_2 & r_1+r_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -b_1-b_2 & 0 & -b_1-b_2 \\ -r_1-r_2 & 0 & -r_1-r_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -b_1 & 0 & -b_1 \\ -r_1 & 0 & -r_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_2 & 0 & -b_2 \\ -r_2 & 0 & -r_2 \end{pmatrix} \\
&= d\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= d(A) + d(B)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde d, M üzerinde bir toplamsal fonksiyondur. Ayrıca, $G = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ z_1 & t_1 \\ m_1 & n_1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ z_2 & t_2 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
k(G+H) &= k\begin{pmatrix} u_1+u_2 & v_1+v_2 \\ z_1+z_2 & t_1+t_2 \\ m_1+m_2 & n_1+n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_1+u_2+m_1+m_2 & v_1+v_2+n_1+n_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_1+m_1 & v_1+n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_2+m_2 & v_2+n_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ z_1 & t_1 \\ m_1 & n_1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ z_2 & t_2 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} = k(G) + k(H)
\end{aligned}$$

sağlandığından k, Γ üzerinde bir toplamsal fonksiyondur.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
AG &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ z & t \\ m & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1u+b_1z+a_1m & a_1v+b_1t+a_1n \\ c_1u+r_1z+c_1m & c_1v+r_1t+c_1n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d\left(AGB\right) &= d\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{pmatrix} x_1a_2+x_2c_2 & x_1b_2+x_2r_2 & x_1a_2+x_2c_2 \\ x_3a_2+x_4c_2 & x_3b_2+x_4r_2 & x_3a_2+x_4c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -x_1b_2-x_2r_2 & 0 & -x_1b_2-x_2r_2 \\ -x_3b_2-x_4r_2 & 0 & -x_3b_2-x_4r_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
d\left(A\right)G &= \begin{pmatrix} -b_1 & 0 & -b_1 \\ -r_1 & 0 & -r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ z & t \\ m & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -b_1\left(u+m\right) & -b_1\left(v+n\right) \\ -r_1\left(u+m\right) & -r_1\left(v+n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d\left(A\right)GB &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_1a_2+y_2c_2 & y_1b_2+y_2r_2 & y_1a_2+y_2c_2 \\ y_3a_2+y_4c_2 & y_3b_2+y_4r_2 & y_3a_2+y_4c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$Ak\left(G\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u+m & v+n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 \\ -y_3 & -y_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Ak\left(G\right)B &= \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 \\ -y_3 & -y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & r_2 & c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y_1a_2-y_2c_2 & -y_1b_2-y_2r_2 & -y_1a_2-y_2c_2 \\ -y_3a_2-y_4c_2 & -y_3b_2-y_4r_2 & -y_3a_2-y_4c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$AG = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & r_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ z & t \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
AGd(B) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_2 & 0 & -b_2 \\ -r_2 & 0 & -r_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x_1b_2 - x_2r_2 & 0 & -x_1b_2 - x_2r_2 \\ -x_3b_2 - x_4r_2 & 0 & -x_3b_2 - x_4r_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre,

$$d(AGB) = d(A)GB + Ak(G)B + AGd(B)$$

eşitliği sağlandığından d bir k-türev olur ve

$$k\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Burada $d \neq 0$ olmasına karşın her $\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & r & c \end{pmatrix} \in M$ için,

$$
\begin{aligned}
d^2\left(\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & r & c \end{pmatrix}\right) &= d\left(d\left(\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & r & c \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= d\left(\begin{pmatrix} -b & 0 & -b \\ -r & 0 & -r \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dir.

Lemma 4.3. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi ve $k(\gamma) = 0$ ise $C_\gamma(d(M)) = C_\gamma$ dır.*

İspat: $a \in C_\gamma(d(M))$ olsun ve $a \notin C_\gamma$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in M$ için a elemanı $d(M)$ kümesinin her elemanı ile γ-değişmeli olduğundan $[a, d(x\gamma y)]_\gamma = 0$ dır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
0 &= [a, d(x\gamma y)]_\gamma = [a, d(x)\gamma y + x\gamma d(y)]_\gamma \\
&= d(x)\gamma[a, y]_\gamma + [a, d(x)]_\gamma \gamma y + x\gamma[a, d(y)]_\gamma + [a, x]_\gamma \gamma d(y)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde her $x, y \in M$ için,

$$d(x)\gamma[a, y]_\gamma + [a, x]_\gamma \gamma d(y) = 0$$

olur. Bu eşitlikte x yerine $d(x)$ yazılırsa $d^2(x)\gamma[a,y]_\gamma = 0$ bulunur. Burada $m \in M$ olmak üzere y yerine $m\gamma y$ yazılırsa M γ-asal Γ-halka olduğundan $d^2 = 0$ veya her $y \in M$ için $[a,y]_\gamma = 0$ olur. Eğer $d^2 = 0$ ise Lemma 4.1 den $d = 0$ bulunur. Oysa bu $d \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $a \in C_\gamma$ dır. Dolayısıyla $C_\gamma(d(M)) = C_\gamma$ elde edilir. □

Lemma 4.4. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $k(\gamma) = 0$ ve $d(U) = 0$ ise $U \subseteq C_\gamma$ dır.*

İspat: $u \in U$ ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $d(u) = d\left([u,x]_\gamma\right) = 0$ dır. Buradan her $x \in M$ için,

$$0 = d\left([u,x]_\gamma\right) = [d(u),x]_\gamma + [u,d(x)]_\gamma = [u,d(x)]_\gamma$$

olduğu görülür. Bu ise $u \in C_\gamma(d(M))$ olmasını gerektirir. Burada Lemma 4.3 kullanılırsa $U \subseteq C_\gamma$ elde edilir. □

Lemma 4.5. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $k(\gamma) = 0$ ve $d(U) \subseteq C_\gamma$ ise $U \subseteq C_\gamma$ olur.*

İspat: $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 3.25 ten $V = [U,U]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olur. Ancak $d(U) \subseteq C_\gamma$ olduğundan her $u, v \in U$ için,

$$d\left([u,v]_\gamma\right) = [d(u),v]_\gamma + [u,d(v)]_\gamma = 0$$

olur. Dolayısıyla $d(V) = 0$ dır. Buradan Lemma 4.4 gereği $V \subseteq C_\gamma$ olur. Oysa bu çelişkidir. O halde $U \subseteq C_\gamma$ olmak zorundadır. □

Lemma 4.6. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $k(\gamma) = 0$ ve $U \nsubseteq C_\gamma$ olsun. $t \in M$ için $t\gamma d(U) = 0$ $(veya\ d(U)\gamma t = 0)$ ise $t = 0$ olur.*

İspat: $u \in U$ ve $x \in M$ olsun. Bu durumda $[u,x]_\gamma \gamma u = [u, x\gamma u]_\gamma \in U$ olur. Buna göre $t \in M$ olmak üzere $t\gamma d\left([u,x]_\gamma \gamma u\right) = 0$ dır. Buradan her $x \in M$ ve $u \in U$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= t\gamma d\left([u,x]_\gamma \gamma u\right) = t\gamma d\left([u,x]_\gamma\right)\gamma u + t\gamma [u,x]_\gamma \gamma d(u) \\ &= t\gamma [u,x]_\gamma \gamma d(u) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $v \in U$ ve $y \in M$ olmak üzere x yerine $d(v)\gamma y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= t\gamma [u, d(v)\gamma y]_\gamma \gamma d(u) \\ &= t\gamma d(v)\gamma [u,y]_\gamma \gamma d(u) + t\gamma [u, d(v)]_\gamma \gamma y \gamma d(u) \\ &= t\gamma [u, d(v)]_\gamma \gamma y \gamma d(u) \end{aligned}$$

olur. Böylece her $v,u \in U$ için $t\gamma [u,d(v)]_\gamma \gamma M \gamma d(u) = 0$ olur. M, γ-asal Γ-halka olduğundan son ifade her $v,u \in U$ için $t\gamma [u,d(v)]_\gamma = 0$ veya $d(u) = 0$ olmasını gerektirir. $K = \{u \in U \mid t\gamma[u,d(v)] = 0, \forall v \in U\}$ ve $L = \{u \in U \mid d(u) = 0\}$ kümeleri U toplamsal grubunun iki altgrubudur. Diğer taraftan $U = K \cup L$ olduğu açıktır. Bu durumda $U = L$ veya $U = K$ olmak zorundadır. $U = L$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(U) = 0$ olur. Ancak bu, $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğu göz önüne alındığında Lemma 4.4 ten $d(U) \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $U = K$ olur. Yani her $v,u \in U$ için $t\gamma [u,d(v)]_\gamma = 0$ dır. Bu takdirde,

$$0 = t\gamma u \gamma d(v) - t\gamma d(v)\gamma u = t\gamma u \gamma d(v)$$

olur. Bu ise Lemma 3.26 dan $t = 0$ olmasını gerektirir. □

Teorem 4.7. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise $U \subseteq C_\gamma$ dır.*

İspat: $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 3.25 ten $V = [U,U]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olur. Lemma 3.22 kullanılırsa $[K,M]_\gamma \subset U$ ve $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olacak şekilde M Γ-halkasının bir K γ-idealinin var olduğu görülür. $k' \in [K,M]_\gamma \subset U \cap K$ ve $u \in V$

olsun. U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali olduğundan,

$$w = d(u) \in d\left([U,U]_\gamma\right) \subseteq [d(U),U]_\gamma + [U,d(U)]_\gamma \subseteq U$$

olur. Buna göre, $d(w) = d(d(u)) = d^2(u) \in d^2(U) = 0$ bulunur.

$y \in M$ olsun. $k'\gamma w \in K$ olduğundan $[k'\gamma w, y]_\gamma \in [K,M]_\gamma \subset U$ dur. Böylece,

$$\begin{aligned}
0 &= d^2\left([k'\gamma w, y]_\gamma\right) = d^2\left(k'\gamma[w,y]_\gamma + [k',y]_\gamma \gamma w\right) \\
&= d^2(k')\gamma[w,y]_\gamma + d(k')\gamma d\left([w,y]_\gamma\right) + d(k')\gamma d\left([w,y]_\gamma\right) + k'\gamma d^2\left([w,y]_\gamma\right) \\
&\quad + d^2\left([k',y]_\gamma\right)\gamma w + d\left([k',y]_\gamma\right)\gamma d(w) + d\left([k',y]_\gamma\right)\gamma d(w) + [k',y]_\gamma \gamma d^2(w) \\
&= 2d(k')\gamma d\left([w,y]_\gamma\right)
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan her $k' \in [K,M]_\gamma$, $y \in M$, $w \in d(V)$ için $d(k')\gamma d\left([w,y]_\gamma\right) = 0$ bulunur. Böylece $d\left([K,M]_\gamma\right)\gamma d\left([d(V),M]_\gamma\right) = 0$ olur. Buradan $[K,M]_\gamma$, M Γ-halkasının γ-Lie ideali ve $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 4.6 dan $d\left([d(V),M]_\gamma\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $u \in V$ ve $x \in M$ için $d\left([d(u),x]_\gamma\right) = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
0 &= d\left([d(u),x]_\gamma\right) = \left[d^2(u),x\right]_\gamma + [d(u),d(x)]_\gamma \\
&= [d(u),d(x)]_\gamma
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $d(V) \subseteq C_\gamma(d(M))$ bulunur. Burada Lemma 4.3 ve Lemma 4.5 kullanılırsa $V \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Bu ise $V \nsubseteq C_\gamma$ oluşu ile çelişir. O halde $U \subseteq C_\gamma$ olmak zorundadır. □

Sonuç 4.8. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-ideali ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $d^2(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.*

İspat: Eğer $U \nsubseteq C_\gamma$ ise Teorem 4.7 den $d = 0$ olur. $U \subseteq C_\gamma$ olsun. Buna göre her $u, v \in U$ için $d^2(u\gamma v) = 0$ dır. M nin karakteristiği 2 den farklı olduğundan son ifadeden $d(U)\gamma d(U) = 0$ elde edilir. U bir γ-ideal ve $U \subseteq C_\gamma$ olduğundan her $u \in U$

ve $x,m \in M$ için $[x\gamma u,m]_\gamma = 0$ dır. O halde $[x,m]_\gamma \gamma U = 0$ bulunur. M γ-asal Γ-halka olduğundan $M \subseteq C_\gamma$ olduğu görülür. Bu durumda $d(U)\gamma d(U) = 0$ ifadesinden $d(U) = 0$ sonucuna ulaşılır. Buna göre her $u \in U$ ve $m \in M$ için $d(u\gamma m) = 0$ olup M Γ-halkasının γ-asal olması kullanılırsa $d = 0$ elde edilir. $\square$

Sonuç 4.9. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $U \nsubseteq C_\gamma$ olsun. Bu durumda herhangi bir $a \in M$ için $\left[a,[a,U]_\gamma\right]_\gamma = 0$ ise $[a,U]_\gamma = 0$ dır.*

İspat: $I_{a\gamma} : M \to M$, $I_{a\gamma}(m) = [a,m]_\gamma$ ve $I_{\gamma a} : \Gamma \to \Gamma$, $I_{\gamma a}(\beta) = [\gamma,\beta]_a$ dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda $I_{a\gamma}$, M Γ-halkasının $I_{\gamma a}$-türevidir ve $I_{\gamma a}(\gamma) = 0$ olur. Hipotezden $I^2_{a\gamma}(U) = 0$ dır. $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Teorem 4.7 den $I_{a\gamma} = 0$ olmak zorundadır. O halde $[a,U]_\gamma = 0$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.10. *M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $U \nsubseteq C_\gamma$ ise $C_\gamma(d(U)) = C_\gamma$ dır.*

İspat: $a \in C_\gamma(d(U))$ olsun ve $a \notin C_\gamma$ olduğunu varsayalım. $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 3.25 ten $V = [U,U]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ elde edilir. Üstelik U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali olduğundan,

$$d(V) = d\left([U,U]_\gamma\right) \subseteq [d(U),U]_\gamma + [U,d(U)]_\gamma \subseteq U$$

dur. Böylece her $u \in V$ için $d^2(u) = d(d(u)) \in d(d(V)) \subseteq d(U)$ bulunur. $a \in C_\gamma(d(U))$ olduğundan $a\gamma d^2(u) = d^2(u)\gamma a$ dır. Ayrıca $u \in V$ için $d(u) \in d(V) \subseteq d(U)$ olduğu kullanılırsa $a\gamma d(u) = d(u)\gamma a$ bulunur. Bu eşitlikte her iki tarafın d altındaki görüntüsü alınırsa her $u \in V$ için,

$$\begin{aligned} d(a\gamma d(u)) = d(d(u)\gamma a) \quad &\Rightarrow \quad d(a)\gamma d(u) + a\gamma d^2(u) = d^2(u)\gamma a + d(u)\gamma d(a) \\ &\Rightarrow \quad d(a)\gamma d(u) = d(u)\gamma d(a) \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. O halde $d(a) \in C_\gamma(d(V))$ bulunur.

$a \in C_\gamma(d(U))$, $u \in V$ ve V bir γ-Lie ideal olduğundan $[d(a), u]_\gamma = d\left([a,u]_\gamma\right) \in d(V)$ dir. Buradan $[d(a), V]_\gamma \subseteq d(V)$ olur. $d(a) \in C_\gamma(d(V))$ olduğu kullanılırsa $\left[d(a), [d(a), V]_\gamma\right]_\gamma = 0$ bulunur. Böylece Sonuç 4.9 dan $[d(a), V]_\gamma = 0$ dır, yani $d(a) \in C_\gamma(V)$ elde edilir. Burada $V \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 3.23 gereği $d(a) \in C_\gamma(V) = C_\gamma$ elde edilir.

$a \in C_\gamma(d(U))$ olduğundan $a\gamma a \in C_\gamma(d(U))$ dur. Yukarıda a elemanı için yapılan işlemler burada $a\gamma a$ için tekrarlanırsa $d(a\gamma a) \in C_\gamma$ olduğu görülür. Ayrıca $d(a) \in C_\gamma$ olduğundan $d(a\gamma a) = 2d(a)\gamma a \in C_\gamma$ dır. $2d(a)\gamma a \in C_\gamma$, $d(a) \in C_\gamma$ ve $a \notin C_\gamma$ olduğu kullanılırsa Lemma 3.24 ten $d(a) = 0$ elde edilir. Böylece her $a \in C_\gamma(d(U)) - C_\gamma$ için $d(a) = 0$ dır. Eğer bir $b \in C_\gamma(d(U))$ için $d(b) \neq 0$ ise elde edilen sonuca göre $b \in C_\gamma$ olmak zorundadır. Üstelik bu durumda $a \in C_\gamma(d(U)) - C_\gamma$ iken $d(a) = 0$ olduğu kullanılırsa $d(a+b) = d(b) \neq 0$ bulunur. Buna göre $a+b \in C_\gamma$ elde edilir. Bu ise $a+b \in C_\gamma$ ve $b \in C_\gamma$ iken $a \in C_\gamma$ olmasını gerektirir. Oysa bu bir çelişkidir. Böylece $C_\gamma(d(U)) \nsubseteq C_\gamma$ olarak kabul edildiğinde her $a \in C_\gamma(d(U))$ için $d(a) = 0$ olmak zorundadır.

$W = \{x \in M \mid d(x) = 0\}$ kümesi tanımlansın. Bu tanıma göre $C_\gamma(d(U)) \subseteq W$ dur. Üstelik $a \in C_\gamma(d(U))$ ve $u \in U$ ise,

$$d\left([a,u]_\gamma\right) = [d(a), u]_\gamma + [a, d(u)]_\gamma = 0$$

olur. Bu durumda $[a, U]_\gamma \subseteq W$ elde edilir.

Lemma 3.22 gereği $[K, M]_\gamma \subset U$ ve $[K, M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olacak şekilde M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir K γ-ideali vardır. $k' \in [K, M]_\gamma \subset U \cap K$ ise $k'\gamma a \in K$ olur. Buradan $u \in U$ için $[k'\gamma a, u]_\gamma \in U$ bulunur. Böylece $a \in C_\gamma(d(U))$ olduğundan $\left[a, d\left([k'\gamma a, u]_\gamma\right)\right]_\gamma = 0$ dır. Buradan her $k' \in [K, M]_\gamma$ ve $u \in U$ için,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[a, d\left(\left[k'\gamma a, u\right]_\gamma\right)\right]_\gamma = \left[a, d\left(k'\gamma[a,u]_\gamma + \left[k', u\right]_\gamma \gamma a\right)\right]_\gamma \\
&= \left[a, d\left(k'\gamma[a,u]_\gamma\right)\right]_\gamma + \left[a, d\left(\left[k', u\right]_\gamma \gamma a\right)\right]_\gamma \\
&= \left[a, d\left(k'\right)\gamma[a,u]_\gamma + k'\gamma d\left([a,u]_\gamma\right)\right]_\gamma + \left[a, d\left(\left[k', u\right]_\gamma\right)\gamma a + \left[k', u\right]_\gamma \gamma d\left(a\right)\right]_\gamma \\
&= d\left(k'\right)\gamma\left[a, [a,u]_\gamma\right]_\gamma + \left[a, d\left(k'\right)\right]_\gamma \gamma[a,u]_\gamma + \left[a, d\left(\left[k', u\right]_\gamma\right)\right]_\gamma \gamma a \\
&= d\left(k'\right)\gamma\left[a, [a,u]_\gamma\right]_\gamma
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlandığından $d\left([K,M]_\gamma\right)\gamma\left[a,[a,U]_\gamma\right]_\gamma = 0$ elde edilir. $[K,M]_\gamma$, M Γ-halkasının γ-Lie ideali ve $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 4.6 dan $\left[a,[a,U]_\gamma\right]_\gamma = 0$ bulunur. Burada $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Sonuç 4.9 kullanılırsa $[a,U]_\gamma = 0$ bulunur. Böylece Lemma 3.23 ten $a \in C_\gamma$ olur. Ancak bu $a \notin C_\gamma$ oluşu ile çelişir. Dolayısıyla $a \in C_\gamma(d(U))$ iken $a \in C_\gamma$ olmak zorundadır. O halde $C_\gamma(d(U)) = C_\gamma$ elde edilir. □

d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M nin bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Burada M, γ-asal gamma halka iken $d^3 \neq 0$ ise $\overline{d(U)}$ γ-althalkasının M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsadığını gösterelim.

Lemma 4.11. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka olsun. d, M Γ-halkasının bir k-türevi ve $k(\gamma) = 0$ olmak üzere $d^3 \neq 0$ ise $\overline{d(M)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

İspat: $d^3(M) \neq 0$ olduğundan $d^2(y) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $y \in d(M) \subseteq \overline{d(M)}$ vardır. Her $x \in M$ için $d(x\gamma y)$, $d(x)\gamma y \in \overline{d(M)}$ olduğundan $M\gamma d(y) \subseteq \overline{d(M)}$ olur. Benzer şekilde $d(y)\gamma M \subseteq \overline{d(M)}$ dir. Her $a, b \in M$ için,

$$d(a\gamma d(y)\gamma b) = d(a)\gamma d(y)\gamma b + a\gamma d^2(y)\gamma b + a\gamma d(y)\gamma d(b)$$

ifadesinden $a\gamma d^2(y)\gamma b \in \overline{d(M)}$ bulunur. Dolayısıyla $M\gamma d^2(y)\gamma M \subseteq \overline{d(M)}$ olur. Ayrıca $M\gamma d(y) \subseteq \overline{d(M)}$ ve $d(y)\gamma M \subseteq \overline{d(M)}$ ifadelerinden $M\gamma d^2(y) \subseteq \overline{d(M)}$ ve $d^2(y)\gamma M \subseteq \overline{d(M)}$ elde edilir. Böylece $d^2(y) \neq 0$ elemanı tarafında üretilen γ-ideal $\overline{d(M)}$ tarafından kapsanır. □

Lemma 4.12. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. A, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol γ-ideali, B, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ γ-ideali, $d^3 \neq 0$, $V = [U,U]_\gamma$ olmak üzere $A \subseteq \overline{d(V)}$ ve $B \subseteq \overline{d(V)}$ ise $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

İspat: $d(V) \subseteq U$ olduğundan $\overline{d(d(V))} \subseteq \overline{d(U)}$ dur. $a \in A \subseteq \overline{d(V)}$ ve $x \in M$ olsun. $d(V)$ yi kapsayan en küçük γ-althalka $\overline{d(V)}$ olduğundan $A \subseteq d(V)$ dir. O zaman $d(x\gamma a) \in d(A) \subseteq \overline{d(d(V))} \subseteq \overline{d(U)}$ olur. Buradan $d(x)\gamma a + x\gamma d(a) \in \overline{d(U)}$ yazabiliriz. $d(x)\gamma a \in A \subseteq \overline{d(V)} \subseteq \overline{d(U)}$ olduğundan her $x \in M$ ve $a \in A$ için $x\gamma d(a) \in \overline{d(U)}$ olur. Böylece $M\gamma d(A) \subseteq \overline{d(U)}$ bulunur. Benzer şekilde $d(B)\gamma M \subseteq \overline{d(U)}$ sağlanır. $a \in A$ ve $u \in V$ için,

$$\begin{aligned} d\left([a,u]_\gamma\right) &= [d(a),u]_\gamma + [a,d(u)]_\gamma \\ &= d(a)\gamma u - u\gamma d(a) + a\gamma d(u) - d(u)\gamma a \end{aligned}$$

dir. Burada V bir γ-Lie ideal olduğundan $d\left([a,u]_\gamma\right) \in d(V) \subseteq \overline{d(U)}$ ve $d(u)\gamma a \in A \subseteq \overline{d(V)} \subseteq \overline{d(U)}$, $a\gamma d(u) \in A\gamma d(V) \subseteq \overline{d(V)} \subseteq \overline{d(U)}$, $u\gamma d(a) \in \overline{d(U)}$ olduğundan $d(A)\gamma V \subseteq \overline{d(U)}$ elde edilir. Benzer şekilde $V\gamma d(B) \subseteq \overline{d(U)}$ sağlanır.

$I = M\gamma A\gamma V\gamma B\gamma M$ olsun. Bu takdirde I, M Γ-halkasının bir ideali olup Lemma 3.26 gereği $I \neq 0$ dır. Üstelik,

$$\begin{aligned} d(I) &= d(M\gamma A\gamma V\gamma B\gamma M) \\ &\subseteq d(M\gamma A)\gamma V\gamma B\gamma M + M\gamma A\gamma d(V)\gamma B\gamma M + M\gamma A\gamma V\gamma d(B\gamma M) \\ &\subseteq d(A)\gamma V\gamma B + A\gamma d(V)\gamma B + A\gamma V\gamma d(B) \subseteq \overline{d(U)} \end{aligned}$$

olduğundan $\overline{d(I)} \subseteq \overline{d(U)}$ bulunur.

Lemma 4.11 gereği $\overline{d(I)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar. Dolayısıyla $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar. □

Lemma 4.13. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. I, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-ideali olmak üzere eğer $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ γ-idealini (veya bir sol γ-idealini) kapsamıyorsa ve $[c,I]_\gamma \subseteq \overline{d(U)}$ ise $c \in C_\gamma$ olur.*

İspat: $t \in d(U)$ ve $i \in I$ olsun. Hipotez gereği $[c,t\gamma i]_\gamma \in \overline{d(U)}$ dir.

$$[c,t\gamma i]_\gamma = t\gamma[c,i]_\gamma + [c,t]_\gamma \gamma i$$

ifadesinde $t\gamma[c,i]_\gamma \in \overline{d(U)}$ olduğundan $[c,d(U)]_\gamma \gamma I \subseteq \overline{d(U)}$ bulunur. I, M Γ-halkasının bir γ-ideali olduğundan $[c,d(U)]_\gamma \gamma I$, M Γ-halkasının sağ γ-idealidir. $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı sağ γ-idealini kapsamadığından $[c,d(U)]_\gamma \gamma I = 0$ dır. Buna göre I, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-ideali ve M, γ-asal Γ-halka olduğundan,

$$\begin{aligned} [c,d(U)]_\gamma \gamma I = 0 \quad &\Rightarrow \quad [c,d(U)]_\gamma \gamma M \gamma I = 0 \\ &\Rightarrow \quad [c,d(U)]_\gamma = 0 \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Buna göre $c \in C_\gamma(d(U))$ olur. Burada Teorem 4.10 kullanılırsa $c \in C_\gamma$ elde edilir. □

Lemma 4.14. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. $V = [U,U]_\gamma$ ve $W = [V,V]_\gamma$ olmak üzere $d^2(U)\gamma d^2(U) = 0$ ise $d^3(W) = 0$ dır.*

İspat: $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 3.25 ten V ve W γ-Lie idealleri C_γ tarafından kapsanmaz. Ayrıca $d(W) \subseteq V$ ve $d^2(W) \subseteq d(V) \subseteq U$ olur. $u \in U$, $v \in V$ ve $w \in W$ olmak üzere herhangi bir $t \in U$ için hipotez gereği,

$$d^2(u)\gamma d^2\left(\left[d(v), d^2(w)\gamma t\right]_\gamma\right) = 0 \tag{1}$$

dır. (1) eşitliğini açarsak,

$$d^2(u)\gamma d(v)\gamma\left(d^4(w)\gamma t + 2d^3(w)\gamma d(t)\right) = 0 \tag{2}$$

elde edilir. (2) eşitliğinde $t \in d(V) \subseteq U$ alırsak $d^3(w)\gamma d(t) = 0$ olacağından böyle bir t elemanı için $d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^4(w)\gamma t = 0$ olur. Dolayısıyla $d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^4(w)\gamma d(V) = 0$ olup Lemma 4.6 dan $d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^4(w) = 0$ elde edilir. Bu durumda (2) eşitliği kullanılarak her $t \in U$ için $2d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^3(w)\gamma d(t) = 0$ bulunur. M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan $d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^3(w)\gamma d(U) = 0$ olur. Burada Lemma 4.6 kullanılırsa her $u \in U$, $v \in V$ ve $w \in W$ için $d^2(u)\gamma d(v)\gamma d^3(w) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $d^2\left(\left[d(v), d^2(w)\gamma t\right]_\gamma\right)\gamma d^2(u) = 0$ olmasından yararlanarak her $u \in U$, $v \in V$ ve $w \in W$ için $d^3(w)\gamma d(v)\gamma d^2(u) = 0$ bulunur.

$w,t \in W$ ve $v \in V$ olmak üzere hipotez gereği $d^2(d(t))\gamma d^2\left([v, d(w)]_\gamma\right) = 0$ dır. Buradan her $w,t \in W$ ve $v \in V$ için $d^3(t)\gamma v\gamma d^3(w) = 0$ olur. Buna göre her $w,t \in W$ için $d^3(t)\gamma V\gamma d^3(w) = 0$ dir. Burada Lemma 3.26 kullanılırsa $d^3(W) = 0$ elde edilir. □

Lemma 4.15. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $d^3(U) = 0$ ise $d^3 = 0$ dır.*

İspat: $u \in U$, $m \in M$ olmak üzere hipotez gereği $d^3\left([u,m]_\gamma\right) = 0$ dır. Buna göre,

$$\begin{aligned} 0 &= d^3\left([u,m]_\gamma\right) = d^2\left(d\left([u,m]_\gamma\right)\right) \\ &= d^2\left([d(u), m]_\gamma + [u, d(m)]_\gamma\right) \\ &= d\left(\left[d^2(u), m\right]_\gamma + 2[d(u), d(m)]_\gamma + \left[u, d^2(m)\right]_\gamma\right) \\ &= 3\left[d^2(u), d(m)\right]_\gamma + 3\left[d(u), d^2(m)\right]_\gamma + \left[u, d^3(m)\right]_\gamma \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. O halde,

$$3\left[d^2(u), d(m)\right]_\gamma + 3\left[d(u), d^2(m)\right]_\gamma + \left[u, d^3(m)\right]_\gamma = 0 \qquad (1)$$

olur.

$V = [U,U]_\gamma$ ve $W = [V,V]_\gamma$ olsun. $w \in W$ olmak üzere (1) eşitliğinde u yerine $d^2(w)$ yazılırsa hipotezden $\left[d^2(w), d^3(m)\right]_\gamma = 0$ bulunur. Yine (1) eşitliğinde u yerine $d(w)$ ve m yerine $d(m)$ yazılırsa $\left[d(w), d^4(m)\right]_\gamma = 0$ bulunur.

Lemma 3.25 gereği $W \nsubseteq C_\gamma$ olur. Buna göre Teorem 4.10 kullanılırsa her $w \in W$ ve $m \in M$ için $\left[d(w), d^4(m)\right]_\gamma = 0$ ifadesinden $d^4(M) \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Böylece her $m \in M$ için $d^4(m) \in C_\gamma$ olur. Hipotez gereği her $u \in U$ ve $m \in M$ için $d^4\left([u,m]_\gamma\right) = 0$ dır. Bu durumda $d^4(m) \in C_\gamma$ olması ile hipotezden yararlanılarak,

$$6\left[d^2(u), d^2(m)\right]_\gamma + 4\left[d(u), d^3(m)\right]_\gamma = 0 \tag{2}$$

elde edilir. Ayrıca hipotez gereği $d^3\left([u, d(m)]_\gamma\right) = 0$ dır. Burada $d^4(m) \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa,

$$3\left[d^2(u), d^2(m)\right]_\gamma + 3\left[d(u), d^3(m)\right]_\gamma = 0 \tag{3}$$

olur. (3) eşitliği (2) de kullanılır ve M Γ-halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olduğu göz önüne alınırsa her $u \in U$, $m \in M$ için $\left[d(u), d^3(m)\right]_\gamma = 0$ bulunur. Buna göre Teorem 4.10 dan $d^3(M) \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Böylece her $m \in M$ ve $u \in U$ için $d^3\left(m\gamma d^2(u)\right) \in C_\gamma$ olur ve buradan $d^3(m)\gamma d^2(u) \in C_\gamma$ elde edilir. O halde $d^3(M)\gamma d^2(U) \subseteq C_\gamma$ dır.

$d^3(M) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $d^3(M) \subseteq C_\gamma$ ve $d^3(M)\gamma d^2(U) \subseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 3.24 ten $d^2(U) \subseteq C_\gamma$ olmak zorundadır. $d^4(M) \subseteq C_\gamma$ ifadesi düşünülürse $d^4(m\gamma d(u)) \in C_\gamma$ dır. Bu ifadeyi genişletirsek hipotez de kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
d^4(m\gamma d(u)) &= d^3\left(d(m)\gamma d(u) + m\gamma d^2(u)\right) \\
&= d^2\left(d^2(m)\gamma d(u) + 2d(m)\gamma d^2(u)\right) \\
&= d\left(d^3(m)\gamma d(u) + 3d^2(m)\gamma d^2(u)\right) \\
&= d^4(m)\gamma d(u) + 4d^3(m)\gamma d^2(u)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. $d^4(M) \subseteq C_\gamma$ ve $d^3(M)\gamma d^2(U) \subseteq C_\gamma$ ifadeleri göz önüne alınırsa $d^4(M)\gamma d(U) \subseteq C_\gamma$ bulunur. Buna göre Lemma 3.24 ten $d^4(M) = 0$ veya $d(U) \subseteq C_\gamma$ dır. Ancak Lemma 4.5 göz önüne alındığında $d(U) \subseteq C_\gamma$ olamaz. Dolayısıyla $d^4(M) = 0$ dır. Buradan her $m \in M$ ve $u \in U$ için $d^4(m\gamma d(u)) = 0$ olduğu kullanılırsa $4d^3(m)\gamma d^2(u) = 0$ bulunur. Burada M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olması göz önüne alındığında $d^3(M)\gamma d^2(U) = 0$ olur. Diğer taraftan Teorem 4.7 den $d^2(U) \neq 0$ dır. Böylece M, γ-asal Γ-halka ve $d^2(U) \subseteq C_\gamma$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= d^3(M)\gamma d^2(U) = d^3(M)\gamma d^2(U)\gamma M \\ &= d^3(M)\gamma M\gamma d^2(U) = d^3(M) \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Böylece $d^3 = 0$ elde edilir. □

Teorem 4.16. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, $U \nsubseteq C_\gamma$ ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer $d^3 \neq 0$ ise $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

İspat: $V = [U,U]_\gamma$ ve $W = [V,V]_\gamma$ olmak üzere Lemma 4.12 ye göre $\overline{d(V)}$ γ-althalkasının M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol γ-idealini ve sıfırdan farklı bir sağ γ-idealini kapsadığını göstermek yeterlidir. $\overline{d(V)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ γ-idealini kapsamadığını kabul edelim.

$w \in [W,W]_\gamma$ olmak üzere $a = d(w)$ olsun. $x \in M$ için,

$$a\gamma[a,x]_\gamma = [a, a\gamma x]_\gamma = [d(w), d(w)\gamma x]_\gamma \in W$$

olur. Çünkü $K = [W,W]_\gamma$ olmak üzere $d(w) \in d(K) \subseteq W$ dur. Böylece,

$$d\left(a\gamma[a,x]_\gamma\right) = d(a)\gamma[a,x]_\gamma + a\gamma d\left([a,x]_\gamma\right) \in d(W)$$

dır. Burada $a \in d(W) \subseteq d(V)$ ve $d\left([a,x]_\gamma\right) \in d(V)$ olmasından yararlanılırsa $a\gamma d\left([a,x]_\gamma\right) \in \overline{d(V)}$ olur. Buna göre her $a \in d(K)$ ve $x \in M$ için,

$$d(a)\gamma[a,x]_\gamma \in \overline{d(V)} \tag{1}$$

bulunur. Herhangi bir $u \in V$ için $[a,d(u)]_\gamma \in \overline{d(V)}$ dir. Buna göre $d\left([a,u]_\gamma\right) = [d(a),u]_\gamma + [a,d(u)]_\gamma \in d(V)$ ifadesi göz önüne alınırsa her $a \in d(K)$ için,

$$[d(a),V]_\gamma \subseteq \overline{d(V)} \quad (2)$$

elde edilir. Ayrıca herhangi bir $m \in M$ için $d(a)\gamma d\left([a,m]_\gamma\right) \in \overline{d(V)}$ olduğundan,

$$d(a)\gamma[d(a),m]_\gamma + d(a)\gamma[a,d(m)]_\gamma \in \overline{d(V)}$$

dir. O halde (1) gereği her $a \in d(K)$ ve $m \in M$ için,

$$d(a)\gamma[d(a),m]_\gamma \in \overline{d(V)} \quad (3)$$

olur. (3) eşitliğinde $a,b \in d(K)$ olmak üzere a yerine $a+b$ yazılırsa,

$$d(a)\gamma[d(b),m]_\gamma + d(b)\gamma[d(a),m]_\gamma \in \overline{d(V)}$$

ifadesi elde edilir. Burada $s = d(a)\gamma[d(b),m]_\gamma + d(b)\gamma[d(a),m]_\gamma$ ve $t = [d(a)\gamma d(b),m]_\gamma = d(a)\gamma[d(b),m]_\gamma + [d(a),m]_\gamma \gamma d(b)$ alınırsa,

$$s-t = d(b)\gamma[d(a),m]_\gamma - [d(a),m]_\gamma \gamma d(b) = \left[d(b),[d(a),m]_\gamma\right]_\gamma$$

dir. $a \in d(K) \subseteq W$ olduğu kullanılırsa $d(a) \in d(W) \subseteq V$ olur. Böylece (2) ifadesinden $s-t \in \overline{d(V)}$ bulunur. Dolayısıyla $t \in \overline{d(V)}$ dir. Buradan $[d(a)\gamma d(b),M]_\gamma \subseteq \overline{d(V)}$ elde edilir. $\overline{d(V)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ γ-idealini kapsamadığından Lemma 4.13 ten her $a,b \in d(K)$ için $d(a)\gamma d(b) \in C_\gamma$ olur. $n = d(a)\gamma d(b)$ alalım. (1) gereği $d(b)\gamma[b,x]_\gamma \in \overline{d(V)}$ olur. Böylece $d(a) \in \overline{d(V)}$ olduğundan $n\gamma[b,x]_\gamma = d(a)\gamma d(b)\gamma[b,x]_\gamma \in \overline{d(V)}$ dir. O halde,

$$n\gamma[b,x]_\gamma = [b,n\gamma x]_\gamma - [b,n]_\gamma \gamma x = [b,n\gamma x]_\gamma \in \overline{d(V)}$$

bulunur. Bu ise $[b,n\gamma M]_\gamma \subseteq \overline{d(V)}$ demektir. $I = n\gamma M$ olsun. I kümesinin M Γ-halkasının bir γ-ideali olduğu açıktır. Eğer $I \neq 0$ ise Lemma 4.13 ten her $b \in d(K)$ için $b \in C_\gamma$ olur. O halde Lemma 4.5 ten $K = [W,W]_\gamma \subseteq C_\gamma$

bulunur. Buradan Lemma 3.25 gereği $U \subseteq C_\gamma$ elde edilir. Bu $U \nsubseteq C_\gamma$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $I = n\gamma M = 0$ olmak zorundadır. Buna göre M, γ-asal Γ-halka olduğundan her $a, b \in d(K)$ için $n = d(a)\gamma d(b) = 0$ bulunur. Yani $d^2(K)\gamma d^2(K) = 0$ olur. $K = [W,W]_\gamma$, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali olduğundan $L = [K,K]_\gamma$ ve $T = [L,L]_\gamma$ dersek Lemma 4.14 kullanıldığında $d^3(T) = 0$ olur. Buna göre Lemma 4.15 ten $d^3 = 0$ olur. Oysa bu $d^3 \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $\overline{d(V)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ γ-idealini kapsar. Benzer şekilde $\overline{d(V)}$ γ-althalkasının M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol γ-idealini kapsadığı gösterilir. Dolayısıyla Lemma 4.12 den $\overline{d(U)}$, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar. □

Teorem 4.17. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $U \nsubseteq C_\gamma$ olsun. Eğer d_1 ve d_2, M Γ-halkasının sırasıyla k_1 ve k_2 türevleri, $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

İspat: d_1 ve d_2 türevlerinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. $V = [U,U]_\gamma$ olmak üzere her $u \in U$ ve $v \in V$ için hipotezden $d_1\left(d_2\left([u, d_2(v)]_\gamma\right)\right) = 0$ olur. $d(V) \subseteq U$ ve $d_1 d_2(U) = 0$ olduğu kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
0 &= d_1\left(d_2\left([u, d_2(v)]_\gamma\right)\right) \\
&= d_1\left([d_2(u), d_2(v)]_\gamma + \left[u, d_2^2(v)\right]_\gamma\right) \\
&= [d_1 d_2(u), d_2(v)]_\gamma + [d_2(u), d_1 d_2(v)]_\gamma + \left[d_1(u), d_2^2(v)\right]_\gamma + \left[u, d_1 d_2^2(v)\right]_\gamma \\
&= \left[d_1(u), d_2^2(v)\right]_\gamma
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. O halde Teorem 4.10 dan $d_2^2(V) \subseteq C_\gamma(d_1(U)) = C_\gamma$ olur. Her $v \in V$ ve $m \in M$ için hipotezden $d_1\left(d_2\left([d_2(v), m]_\gamma\right)\right) = 0$ dır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
0 &= d_1\left(d_2\left([d_2(v),m]_\gamma\right)\right) \\
&= d_1\left(\left[d_2^2(v),m\right]_\gamma + [d_2(v),d_2(m)]_\gamma\right) \\
&= \left[d_1 d_2^2(v),m\right]_\gamma + \left[d_2^2(v),d_1(m)\right]_\gamma + [d_1 d_2(v),d_2(m)]_\gamma + [d_2(v),d_1 d_2(m)]_\gamma \\
&= [d_2(v),d_1 d_2(m)]_\gamma
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde Teorem 4.10 dan $d_1 d_2(M) \subseteq C_\gamma(d_2(V)) = C_\gamma$ elde edilir. Buna göre $u \in U$ ve $v \in V$ için $d_1 d_2(d_2(v)\gamma u) \in C_\gamma$ dır. Burada $d_1 d_2(U) = 0$ olduğu kullanılırsa $d_2^2(V)\gamma d_1(U) \subseteq C_\gamma$ bulunur. Ayrıca $U \nsubseteq C_\gamma$ olduğundan Lemma 4.5 ten $d_1(U) \nsubseteq C_\gamma$ dır. Böylece Lemma 3.24 ten $d_2^2(V) = 0$ olur. O halde Sonuç 4.8 den $d_2 = 0$ olur. Oysa bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $d_1 d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olmak zorundadır. □

Lemma 4.18. *M, karakteristiği 2 den farklı bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali, d, M üzerinde $k(\gamma) = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir k-türev olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ ve $u\gamma u \in U$ ise $[u,d(u)]_\gamma = 0$ dır.*

İspat: Herhangi bir $u \in U$ için $u\gamma u$ elemanı u^2 ile gösterilsin. Hipotezden her $u \in U$ için $\left[u+u^2,d(u+u^2)\right]_\gamma \in C_\gamma$ olur. Buradan,

$$
\left[u+u^2,d(u+u^2)\right]_\gamma = [u,d(u)]_\gamma + \left[u,d(u^2)\right]_\gamma + \left[u^2,d(u)\right]_\gamma + \left[u^2,d(u^2)\right]_\gamma
$$

eşitliğinde $[u,d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ ve $\left[u^2,d(u^2)\right]_\gamma \in C_\gamma$ olduğundan $\left[u,d(u^2)\right]_\gamma + \left[u^2,d(u)\right]_\gamma \in C_\gamma$ bulunur. Böylece her $u \in U$ için,

$$
\begin{aligned}
& \left[u,d(u^2)\right]_\gamma + \left[u^2,d(u)\right]_\gamma \in C_\gamma \\
\Rightarrow\ & [u,d(u)\gamma u]_\gamma + [u,u\gamma d(u)]_\gamma + u\gamma[u,d(u)]_\gamma + [u,d(u)]_\gamma\gamma u \in C_\gamma \\
\Rightarrow\ & [u,d(u)]_\gamma\gamma u + u\gamma[u,d(u)]_\gamma + u\gamma[u,d(u)]_\gamma + [u,d(u)]_\gamma\gamma u \in C_\gamma \\
\Rightarrow\ & 4[u,d(u)]_\gamma\gamma u \in C_\gamma
\end{aligned}
$$

gerektirmeleri sağlanır. Buna göre her $m \in M$ için,

$$\begin{aligned} 4[u,d(u)]_\gamma \gamma [u,m]_\gamma &= 4[u,d(u)]_\gamma \gamma u \gamma m - 4[u,d(u)]_\gamma \gamma m \gamma u \\ &= 4m\gamma [u,d(u)]_\gamma \gamma u - 4m\gamma [u,d(u)]_\gamma \gamma u \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece, M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan her $u \in U$ ve $m \in M$ için $[u,d(u)]_\gamma \gamma [u,m]_\gamma = 0$ bulunur. Bu ifadede m yerine $x \in M$ olmak üzere $m\gamma x$ yazılırsa her $m,x \in M$ ve $u \in U$ için,

$$\begin{aligned} & [u,d(u)]_\gamma \gamma [u,m\gamma x]_\gamma = 0 \\ \Rightarrow\quad & [u,d(u)]_\gamma \gamma m \gamma [u,x]_\gamma + [u,d(u)]_\gamma \gamma [u,m]_\gamma \gamma x = 0 \\ \Rightarrow\quad & [u,d(u)]_\gamma \gamma m \gamma [u,x]_\gamma = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan M Γ-halkasının γ-asal Γ-halka olmasından yararlanılarak her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma = 0$ elde edilir. □

Lemma 4.19. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, d, M üzerinde $k(\gamma) = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir k-türev, U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali ve her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ olsun. O zaman her $u \in U$ ve $m \in M$ için $\left[[d(m),u]_\gamma,u\right]_\gamma \in C_\gamma$ dır. Üstelik, her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma = 0$ ise her $m \in M$ ve $u \in U$ için $\left[[d(m),u]_\gamma,u\right]_\gamma = 0$ olur.*

İspat: $u \in U$ ve $m \in M$ olmak üzere hipotezden $\left[u+[u,m]_\gamma, d(u+[u,m]_\gamma)\right]_\gamma \in C_\gamma$ dır. Bu ifade açılırsa,

$$\left[[u,m]_\gamma, d(u)\right]_\gamma + \left[u,[d(u),m]_\gamma\right]_\gamma + \left[u,[u,d(m)]_\gamma\right]_\gamma \in C_\gamma$$

elde edilir. Herhangi bir $u \in U$ ve $m \in M$ için Lemma 2.40 gereği,

$$\left[[u,m]_\gamma, d(u)\right]_\gamma + \left[u,[d(u),m]_\gamma\right]_\gamma = \left[m,[d(u),u]_\gamma\right]_\gamma = 0$$

olduğundan $\left[u,[u,d(m)]_\gamma\right]_\gamma \in C_\gamma$ elde edilir.

Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)]_\gamma = 0$ ise benzer işlemler yapılırsa her $m \in M$ ve $u \in U$ için $\left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma = 0$ olduğu görülür. □

Teorem 4.20. *M, karakteristiği 2 ve 3 ten farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının γ-Lie ideali, d sıfırdan farklı bir k-türev ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u, d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ ise $U \subset C_\gamma$ dır.*

İspat: Lemma 4.19 den her $u \in U$ ve $m \in M$ için $\left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma \in C_\gamma$ dır. O halde,

$$\left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma \gamma u = u\gamma \left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliği açarsak $u^2 = u\gamma u$ ve $u^3 = u\gamma u\gamma u$ olmak üzere,

$$3u^2\gamma d(m)\gamma u + d(m)\gamma u^3 = 3u\gamma d(m)\gamma u^2 + u^3\gamma d(m) \tag{1}$$

olur. $d(m) = m'$ ve $d(u) = u'$ diyelim. (1) eşitliğinde m yerine u alınırsa her $u \in U$ için,

$$u^3\gamma u' - u'\gamma u^3 = 3(u\gamma u' - u'\gamma u)\gamma u^2 \tag{2}$$

elde edilir. Ayrıca $[u, u']_\gamma \gamma u = u\gamma u'\gamma u - u'\gamma u^2$ ile $u\gamma[u, u']_\gamma = u^2\gamma u' - u\gamma u'\gamma u$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2(u\gamma u' - u'\gamma u)\gamma u = u^2\gamma u' - u'\gamma u^2 \tag{3}$$

elde edilir.

(1) eşitliğinde m yerine m' yazılırsa,

$$3u\gamma m''\gamma u^2 + u^3\gamma m'' - 3u^2\gamma m''\gamma u - m''\gamma u^3 = 0 \tag{4}$$

bulunur.

Yine (1) eşitliğinde m yerine $u\gamma m'$ alınırsa (4) eşitliği göz önüne alındığında her $u \in U$ ve $m \in M$ için,

$$3u\gamma u'\gamma m'\gamma u^2 + u^3\gamma u'\gamma m' - 3u^2\gamma u'\gamma m'\gamma u - u'\gamma m'\gamma u^3 = 0 \tag{5}$$

elde edilir.

(1) eşitliği soldan u' ile çarpılırsa,

$$3u'\gamma u\gamma m'\gamma u^2 + u'\gamma u^3\gamma m' - 3u'\gamma u^2\gamma m'\gamma u - u'\gamma m'\gamma u^3 = 0 \tag{6}$$

olur. (5) ile (6) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$3(u\gamma u' - u'\gamma u)\gamma m'\gamma u^2 + (u^3\gamma u' - u'\gamma u^3)\gamma m' - 3(u^2\gamma u' - u'\gamma u^2)\gamma m'\gamma u = 0$$

bulunur. Burada (2) ve (3) eşitlikleri kullanılırsa, M Γ-halkasının karakteristiği 3 ten farklı olduğundan her $u \in U$ ve $m \in M$ için,

$$(u\gamma u' - u'\gamma u)\gamma(m'\gamma u^2 + u^2\gamma m' - 2u\gamma m'\gamma u) = 0$$

elde edilir. Bazı $u \in U$ için $u\gamma u' - u'\gamma u \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $[u,u']_\gamma \in C_\gamma$ ve M, γ-asal Γ-halka olduğundan bu u elemanı için,

$$m'\gamma u^2 + u^2\gamma m' - 2u\gamma m'\gamma u = 0 \tag{7}$$

olur. (7) eşitliğinde m yerine $u\gamma m$ yazılırsa,

$$(u'\gamma m + u\gamma m')\gamma u^2 + u^2\gamma(u'\gamma m + u\gamma m') - 2u\gamma(u'\gamma m + u\gamma m')\gamma u = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik açılırsa (7) eşitliği kullanılarak her $m \in M$ için,

$$u'\gamma m\gamma u^2 + u^2\gamma u'\gamma m - 2u\gamma u'\gamma x\gamma u = 0 \tag{8}$$

bulunur.

(7) eşitliğinde m yerine u alınırsa ve elde edilen eşitlik sağdan m ile çarpılırsa,

$$u'\gamma u^2\gamma m + u^2\gamma u'\gamma m - 2u\gamma u'\gamma u\gamma m = 0 \tag{9}$$

olur. (8) eşitliğinden (9) eşitliği çıkartılırsa her $m \in M$ için,

$$u'\gamma(m\gamma u^2 - u^2\gamma m) - 2u\gamma u'\gamma(m\gamma u - u\gamma m) = 0 \tag{10}$$

olur. (10) eşitliğinde m yerine $u\gamma m$ yazılırsa,

$$u'\gamma u\gamma(m\gamma u^2 - u^2\gamma m) - 2u\gamma u'\gamma u\gamma(m\gamma u - u\gamma m) = 0 \tag{11}$$

olur. (10) eşitliği soldan u ile çarpılırsa bu takdirde,

$$u\gamma u'\gamma(m\gamma u^2 - u^2\gamma m) - 2u^2\gamma u'\gamma(m\gamma u - u\gamma m) = 0 \tag{12}$$

elde edilir. (12) eşitliğinden (11) eşitliği çıkartılırsa her $m \in M$ için,

$$(u\gamma u' - u'\gamma u)\gamma(m\gamma u^2 - u^2\gamma m - 2u\gamma(m\gamma u - u\gamma m)) = 0$$

bulunur. M, γ-asal Γ-halka ve $u\gamma u' - u'\gamma u \neq 0$ olduğundan,

$$m\gamma u^2 - u^2\gamma m - 2u\gamma(m\gamma u - u\gamma m) = 0 \tag{13}$$

bulunur. $I_{u\gamma}$, M üzerinde $I_{\gamma u}$-iç türev olmak üzere (13) eşitliğinden her $m \in M$ için $I^2_{u\gamma}(m) = 0$ elde edilir. Burada Lemma 4.1 kullanılırsa $I_{u\gamma} = 0$ bulunur. O halde $u \in C_\gamma$ dır.

Buraya kadar $u \in U$ için eğer $[u,u']_\gamma \neq 0$ ise $u \in C_\gamma$ olduğu gösterildi. Şimdi her $u \in U$ için $[u,u']_\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde Lemma 4.19 dan her $m \in M$ ve $u \in U$ için,

$$\left[[d(m),u]_\gamma, u\right]_\gamma = 0 \tag{14}$$

dır. (14) eşitliğinde u yerine $w \in U$ olmak üzere $u + w$ yazılırsa,

$$\left[[d(m),u]_\gamma, w\right]_\gamma + \left[[d(m),w]_\gamma, u\right]_\gamma = 0 \tag{15}$$

bulunur. Şimdi $v, w \in U$ elemanlarını $w\gamma v \in U$ olacak şekilde alınırsa ve (15) eşitliğinde w yerine $w\gamma v$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big[[d(m),u]_\gamma, w\gamma v\Big]_\gamma + \Big[[d(m),w\gamma v]_\gamma, u\Big]_\gamma \\
&= w\gamma\Big[[d(m),u]_\gamma, v\Big]_\gamma + \Big[[d(m),u]_\gamma, w\Big]_\gamma \gamma v + \Big[w\gamma[d(m),v]_\gamma, u\Big]_\gamma \\
&\quad + \Big[[d(m),w]_\gamma \gamma v, u\Big]_\gamma \\
&= \left(\Big[[d(m),u]_\gamma, w\Big]_\gamma + \Big[[d(m),w]_\gamma, u\Big]_\gamma\right)\gamma v + [w,u]_\gamma \gamma [d(m),v]_\gamma \\
&\quad + [d(m),w]_\gamma \gamma [v,u]_\gamma + w\gamma\left(\Big[[d(m),u]_\gamma, v\Big]_\gamma + \Big[[d(m),v]_\gamma, u\Big]_\gamma\right) \\
&= [w,u]_\gamma \gamma [d(m),v]_\gamma + [d(m),w]_\gamma \gamma [v,u]_\gamma
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır. $t \in M$ ve $w \in U$ olmak üzere $v = [t,w]_\gamma \in U$ elemanı için $w\gamma v = [w\gamma t, w]_\gamma \in U$ dur. Buna göre her $t,m \in M$ ve $u,w \in U$ için,

$$
[w,u]_\gamma \gamma \Big[d(m),[t,w]_\gamma\Big]_\gamma + [d(m),w]_\gamma \gamma \Big[[t,w]_\gamma, u\Big]_\gamma = 0 \tag{16}
$$

olur. (16) eşitliğinde u yerine w yazılırsa,

$$
[d(m),w]_\gamma \gamma \Big[[t,w]_\gamma, w\Big]_\gamma = 0 \tag{17}
$$

olur. (17) eşitliğinde t yerine $a \in M$ olmak üzere $t\gamma d(a)$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= [d(m),w]_\gamma \gamma \Big[[t\gamma d(a),w]_\gamma, w\Big]_\gamma \\
&= [d(m),w]_\gamma \gamma \left(\Big[t\gamma[d(a),w]_\gamma, w\Big]_\gamma + \Big[[t,w]_\gamma \gamma d(a), w\Big]_\gamma\right) \\
&= [d(m),w]_\gamma \gamma \left(t\gamma\Big[[d(a),w]_\gamma, w\Big]_\gamma + [t,w]_\gamma \gamma [d(a),w]_\gamma\right) \\
&\quad + [d(m),w]_\gamma \gamma \left([t,w]_\gamma \gamma [d(a),w]_\gamma + \Big[[t,w]_\gamma, w\Big]_\gamma \gamma d(a)\right) \\
&= [d(m),w]_\gamma \gamma \Big[[t,w]_\gamma, w\Big]_\gamma \gamma d(a) + 2\,[d(m),w]_\gamma \gamma [t,w]_\gamma \gamma [d(a),w]_\gamma \\
&\quad + [d(m),w]_\gamma \gamma t \gamma \Big[[d(a),w]_\gamma, w\Big]_\gamma
\end{aligned}
$$

olur. Burada (14) ve (17) eşitlikleri ile M Γ-halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olması kullanılarak her $m,t,a \in M$ ve $w \in U$ için,

$$
[d(m),w]_\gamma \gamma [t,w]_\gamma \gamma [d(a),w]_\gamma = 0 \tag{18}
$$

elde edilir. (16) da u yerine $[t,w]_\gamma$ alınırsa $\Big[[t,w]_\gamma,w\Big]_\gamma\gamma\Big[[t,w]_\gamma,d(m)\Big]_\gamma=0$ olur. Bu eşitlikte t yerine $t+d(a)$ alınırsa her $m,t,a\in M$ ve $w\in U$ için,

$$\Big[[t,w]_\gamma,w\Big]_\gamma\gamma\Big[[d(a),w]_\gamma,d(m)\Big]_\gamma=0 \tag{19}$$

bulunur. $s\in M$ olmak üzere (19) eşitliğinde t yerine $d(t)\gamma s$ yazılırsa (14), (18) ve (19) eşitlikleri ile M Γ-halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olması kullanılarak her $m,t,a,s\in M$ ve $w\in U$ için,

$$[d(t),w]_\gamma\gamma[s,w]_\gamma\gamma d(m)\gamma[d(a),w]_\gamma=0 \tag{20}$$

elde edilir.

(18) eşitliğinde t yerine $t\gamma d(s)$ yazılırsa (20) eşitliği kullanılarak her $m,a,s\in M$ ve $w\in U$ için,

$$[d(m),w]_\gamma\gamma M\gamma[d(s),w]_\gamma\gamma[d(a),w]_\gamma=0$$

olur. Buna göre M, γ-asal Γ-halka olduğundan her $m,a,s\in M$ ve $w\in U$ için $[d(m),w]_\gamma=0$ veya $[d(s),w]_\gamma\gamma[d(a),w]_\gamma=0$ olmak zorundadır. Eğer her $m\in M$ ve $w\in U$ için $[d(m),w]_\gamma=0$ ise Lemma 4.3 ten $w\in C_\gamma$ olur ve ispat biter. $[d(m),w]_\gamma\neq 0$ olacak şekilde $m\in M$ ve $w\in U$ eleman çiftinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $w\notin C_\gamma$ olur. Ayrıca M Γ-halkasının γ-asal Γ-halka olmasından her $a,s\in M$ için,

$$[d(s),w]_\gamma\gamma[d(a),w]_\gamma=0 \tag{21}$$

dir. (21) eşitliğinde a yerine $b,c\in M$ olmak üzere $b\gamma c$ yazılırsa,

$$[d(s),w]_\gamma\gamma d(b)\gamma[c,w]_\gamma+[d(s),w]_\gamma\gamma b\gamma[d(c),w]_\gamma+[d(s),w]_\gamma\gamma[b,w]_\gamma d(c)=0$$

olur. Bu eşitlikte b yerine $[t,w]_\gamma$ yazılırsa ve (17) ile (18) eşitlikleri göz önüne alınırsa her $c,t,s\in M$ ve $w\in U$ için,

$$[d(s),w]_\gamma\gamma[t,d(w)]_\gamma\gamma[w,c]_\gamma=0$$

bulunur. Burada c yerine $m_1 \in M$ olmak üzere $c\gamma m_1$ yazılırsa M, γ-asal Γ-halka ve $w \notin C_\gamma$ olduğundan,

$$[d(s),w]_\gamma \gamma [t,d(w)]_\gamma = 0$$

olur. Bu eşitlikte t yerine $k \in M$ olmak üzere $t\gamma k$ yazılırsa $d(w) \in C_\gamma$ elde edilir.

Şimdi $u \in U \cap C_\gamma$ olsun. Buna göre her $a \in M$ için $d([u,a]_\gamma) = 0$ olduğundan $d(u) \in C_\gamma$ dır. O halde her $u \in U$ için $d(u) \in C_\gamma$ dır. Bu durumda $a \in M$ ve $w \in U$ için $d([w,a]_\gamma) \in C_\gamma$ yazılabilir. Her $u \in U$ için $d(u) \in C_\gamma$ olduğundan her $a \in M$ için,

$$d([w,a]_\gamma) = [d(w),a]_\gamma + [w,d(a)]_\gamma = [w,d(a)]_\gamma \in C_\gamma$$

olur. Bu ifadede a yerine $a\gamma w$ yazılırsa,

$$[w,d(a\gamma w)]_\gamma = [w,d(a)]_\gamma \gamma w + [w,a]_\gamma \gamma d(w) \in C_\gamma \tag{22}$$

bulunur. Buna göre (22) ifadesi w elemanı ile γ-değişmeli olacağından her $a \in M$ için,

$$\left[w,[w,a]_\gamma\right]_\gamma \gamma d(w) = 0$$

elde edilir. M, γ-asal Γ-halka olduğundan son eşitlikten yararlanarak $\left[w,[w,a]_\gamma\right]_\gamma = 0$ veya $d(w) = 0$ olur. Eğer $\left[w,[w,a]_\gamma\right]_\gamma = 0$ ise Sonuç 3.21 den $w \in C_\gamma$ olur. Ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $d(w) = 0$ olur. Buna göre (22) den her $a \in M$ için $[w,d(a)]_\gamma \gamma w \in C_\gamma$ dir. Böylece $a,b \in M$ için,

$$\begin{aligned} [d(a),w]_\gamma \gamma [w,b]_\gamma &= [d(a),w]_\gamma \gamma w \gamma b - [d(a),w]_\gamma \gamma b \gamma w \\ &= b\gamma [d(a),w]_\gamma \gamma w - [d(a),w]_\gamma \gamma b \gamma w \\ &= \left[b,[d(a),w]_\gamma\right]_\gamma \gamma w \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikte b yerine $c \in M$ olmak üzere $b\gamma c$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [d(a),w]_\gamma \gamma [w,b\gamma c]_\gamma \\ &= [d(a),w]_\gamma \gamma b \gamma [w,c]_\gamma + [d(a),w]_\gamma \gamma [w,b]_\gamma \gamma c \\ &= [d(a),w]_\gamma \gamma b \gamma [w,c]_\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $[d(a),w]_\gamma \gamma M \gamma [w,c]_\gamma = 0$ dır. M γ-asal Γ-halka olduğundan $[d(a),w]_\gamma = 0$ veya $[w,c]_\gamma = 0$ olur. Dolayısıyla her iki durumda da $w \in C_\gamma$ elde edilir. Ancak bu $w \notin C_\gamma$ oluşu ile çelişir. Böylece her $w \in U$ ve $m \in M$ için $[d(m),w]_\gamma = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $U \subseteq C_\gamma$ olur. □

Teorem 4.20 nin ispatına göre eğer her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma = 0$ ise M Γ-halkasının karakteristiği 3 iken de $U \subseteq C_\gamma$ dır. Buna göre Lemma 4.18 düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.21. *M, karakteristiği 3 olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali, d sıfırdan farklı bir k-türev ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ ve $u\gamma u \in U$ ise $U \subset C_\gamma$ olur.*

Lemma 4.22. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve d, M Γ-halkasının $k(\gamma) = 0$ olacak şekilde bir k-türevi olsun. $a \in M$ olmak üzere her $x \in M$ için $a\gamma d(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.*

İspat: Her $x \in M$ için $a\gamma d(x) = 0$ olduğundan bir $y \in M$ için $a\gamma d(x\gamma y) = 0$ dır. Bu durumda her $x, y \in M$ için,

$$0 = a\gamma d(x\gamma y) = a\gamma d(x)\gamma y + a\gamma x \gamma d(y) = a\gamma x\gamma d(y)$$

bulunur. Buna göre M, γ-asal Γ-halka olduğundan $a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir. □

Teorem 4.23. *M, karakteristiği 2 olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve γ-althalkası, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi ve $k(\gamma) = 0$ olsun. Eğer her $u \in U$ için $[u,d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ ise U, γ-değişmeli olur.*

İspat: Her $u \in U$ için $[u, d(u)]_\gamma \in C_\gamma$ olduğundan Lemma 4.19 gereği her $u \in U$ ve $m \in M$ için $\left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma \in C_\gamma$ dır. M Γ-halkasının karakteristiği 2 olduğundan her $u \in U$ ve $m \in M$ için $u^2 = u\gamma u$ olmak üzere,

$$\left[[d(m), u]_\gamma, u\right]_\gamma = d(m)\gamma u^2 + u^2\gamma d(m) \in C_\gamma \qquad (1)$$

olur. O halde bu elemanın sırasıyla $d(m)$ ve u^2 elemanlarıyla γ-değişmeli olmasından $(d(m))^2 = d(m)\gamma d(m)$ olmak üzere,

$$u^2\gamma(d(m))^2 = (d(m))^2\gamma u^2 \qquad (2)$$

ve $u^4 = u\gamma u\gamma u\gamma u$ olmak üzere,

$$u^4\gamma d(m) = d(m)\gamma u^4 \qquad (3)$$

elde edilir.

$u \in U$ için $d(u^2) = u\gamma d(u) + d(u)\gamma u \in C_\gamma$ dır. Buna göre (2) eşitliğinde m yerine $v \in U$ olmak üzere $v + u^2\gamma v$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& u^2\gamma(d(v+u^2\gamma v))^2 = (d(v+u^2\gamma v))^2\gamma u^2 \\
\Rightarrow\quad & u^2\gamma(d(v))^2 + u^2\gamma d(v)\gamma d\left(u^2\gamma v\right) + u^2\gamma d(u^2\gamma v)\gamma d(v) + u^2\gamma\left(d(u^2\gamma v)\right)^2 \\
& = (d(v))^2\gamma u^2 + d(v)\gamma d\left(u^2\gamma v\right)\gamma u^2 + d(u^2\gamma v)\gamma d(v)\gamma u^2 + \left(d(u^2\gamma v)\right)^2\gamma u^2 \\
\Rightarrow\quad & \left(u^2\gamma d(v)\right)^2 + u^2\gamma d\left(u^2\right)\gamma d(v)\gamma v + u^2\gamma d\left(u^2\right)\gamma v\gamma d(v) + u^4\gamma(d(v))^2 \\
& = \left(d(v)\gamma u^2\right)^2 + d(v)\gamma v d\left(u^2\right)\gamma u^2 + v\gamma d(v)\gamma d\left(u^2\right)\gamma u^2 + u^2\gamma(d(v))^2\gamma u^2 \\
\Rightarrow\quad & \left(u^2\gamma d(v)\right)^2 + \left(d(v)\gamma u^2\right)^2 + u^2\gamma d\left(u^2\right)\gamma[d(v), v]_\gamma + [d(v), v]_\gamma\gamma d\left(u^2\right)\gamma u^2 \\
& + u^4\gamma(d(v))^2 + u^2\gamma(d(v))^2\gamma u^2 = 0
\end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Burada M Γ-halkasının karakteristiğinin 2 olması kullanılarak her $u, v \in U$ için,

$$\left(u^2\gamma d(v) + d(v)\gamma u^2\right)\gamma\left(u^2\gamma d(v) + d(v)\gamma u^2\right) = 0 \qquad (4)$$

bulunur. (1) eşitliği ve M nin γ-asal Γ-halka olması göz önüne alınırsa (4) eşitliğinden $u^2\gamma d(v)+d(v)\gamma u^2=0$ elde edilir. Buna göre her $u,v\in U$ için,

$$u^2\gamma d(v)=d(v)\gamma u^2 \tag{5}$$

olur.

(5) eşitliğinde u yerine $w\in U$ olmak üzere $u+w$ yazılırsa,

$$[u\gamma w+w\gamma u,d(v)]_\gamma=0$$

bulunur. Burada w yerine $w\gamma u$ yazılırsa her $u,v,w\in U$ için,

$$(u\gamma w+w\gamma u)\,\gamma[u,d(v)]_\gamma=0$$

olur. Bu eşitlikte u yerine $u_1\in U$ olmak üzere $u+u_1\gamma u_1=u+u_1^2$ yazılır ve $v=u$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\left(u+u_1^2\right)\gamma w+w\gamma\left(u+u_1^2\right)\right)\gamma\left(\left(u+u_1^2\right)\gamma d\left(u\right)+d\left(u\right)\gamma\left(u+u_1^2\right)\right)\\
&= \left(u\gamma w+u_1^2\gamma w+w\gamma u+w\gamma u_1^2\right)\gamma\left(u\gamma d\left(u\right)+u_1^2\gamma d\left(u\right)+d\left(u\right)\gamma u+d\left(u\right)\gamma u_1^2\right)\\
&= \left(u\gamma w+w\gamma u\right)\gamma\left(u\gamma d\left(u\right)+d\left(u\right)\gamma u\right)+\left(u_1^2\gamma w+w\gamma u_1^2\right)\gamma\left(u\gamma d\left(u\right)+d\left(u\right)\gamma u\right)\\
&\quad+\left(u\gamma w+w\gamma u+u_1^2\gamma w+w\gamma u_1^2\right)\gamma\left(u_1^2\gamma d\left(u\right)+d\left(u\right)\gamma u_1^2\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

eşitlikleri sağlanır. (5) ve (6) eşitlikleri ile M Γ-halkasının karakteristiğinin 2 olduğu göz önüne alınırsa her $u,u_1,w\in U$ için,

$$\left(u_1^2\gamma w+w\gamma u_1^2\right)\gamma[u,d(u)]_\gamma=0$$

elde edilir.

Herhangi bir $a\in U$ için $[a,d(a)]_\gamma\neq 0$ olsun. Bu durumda M bir γ-asal Γ-halka ve $[a,d(a)]_\gamma\in C_\gamma$ olduğundan her $u_1,w\in U$ için $u_1^2\gamma w=w\gamma u_1^2$ olur. Böylece her $m\in M$ ve $u,w\in U$ için $u^2\gamma(w\gamma m+m\gamma w)=(w\gamma m+m\gamma w)\,\gamma u^2$ yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} u^2\gamma(w\gamma m+m\gamma w) &= (w\gamma m+m\gamma w)\gamma u^2 \\ \Rightarrow u^2\gamma w\gamma m+u^2\gamma m\gamma w &= w\gamma m\gamma u^2+m\gamma w\gamma u^2 \\ \Rightarrow w\gamma\left(u^2\gamma m+m\gamma u^2\right) &= \left(u^2\gamma m+m\gamma u^2\right)\gamma w \end{aligned} \quad (7)$$

gerektirmeleri sağlanır. (7) eşitliğinde m yerine $m\gamma u$ yazılırsa her $u,w\in U$ ve $m\in M$ için,

$$\left(u^2\gamma m+m\gamma u^2\right)\gamma(w\gamma u+u\gamma w)=0$$

bulunur. Bu eşitlikte w yerine $t\in M$ olmak üzere $[u,t]_\gamma$ yazılırsa her $u\in U$ ve $m,t\in M$ için,

$$\left(u^2\gamma m+m\gamma u^2\right)\gamma\left(u^2\gamma t+t\gamma u^2\right)=0$$

olur. Burada t yerine $p\in M$ olmak üzere $t\gamma p$ yazılırsa M, γ-asal Γ-halka olduğundan her $u\in U$ için $u^2\in C_\gamma$ elde edilir.

Her $u\in U$ için $[u,d(u)]_\gamma=0$ olduğunu varsayalım. O zaman Lemma 4.19 dan her $u\in U$ ve $m\in M$ için $\left[[d(m),u]_\gamma,u\right]_\gamma=0$ yani $u^2\gamma d(m)=d(m)\gamma u^2$ olur. Burada m yerine $a\in M$ olmak üzere $m\gamma a$ yazılırsa,

$$d(m)\gamma\left(u^2\gamma a+a\gamma u^2\right)+\left(u^2\gamma m+m\gamma u^2\right)\gamma d(a)=0 \quad (8)$$

bulunur. Herhangi bir $v\in U$ için varsayım gereği $v\gamma d(v)=d(v)\gamma v$ dir. Buna göre, M Γ-halkasının karakteristiği 2 olduğundan $d(v\gamma v)=0$ dır. (8) eşitliğinde a yerine $v^2=v\gamma v$ yazılırsa her $u,v\in U$ ve $m\in M$ için $d(m)\gamma\left(u^2\gamma v^2+v^2\gamma u^2\right)=0$ olur. O halde Lemma 4.22 den her $u,v\in U$ için $u^2\gamma v^2=v^2\gamma u^2$ bulunur. Burada v yerine $w\in U$ olmak üzere $v+w$ yazılırsa $u^2\gamma(v\gamma w+w\gamma v)=(v\gamma w+w\gamma v)\gamma u^2$ olur. Bu eşitlikte v yerine $v\gamma w$ yazılırsa $(v\gamma w+w\gamma v)\gamma\left(u^2\gamma w+w\gamma u^2\right)=0$ dır. Son eşitlikte v yerine $m\in M$ olmak üzere $[w,m]_\gamma$ yazılırsa $\left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma\left(u^2\gamma w+w\gamma u^2\right)=0$ olur. Buradan her $u,w\in U,m\in M$ için $I_{w^2\gamma}(m)\gamma\left(u^2\gamma w+w\gamma u^2\right)=0$ olur. O halde Lemma 4.22 den bir $w\in U$ için $w\gamma w=w^2\notin C_\gamma$ ise bu w elemanı için $u^2\gamma w=w\gamma u^2$

olur. Burada u yerine $u+v$ yazılırsa her $u,v\in U$ için $\left[[u,v]_\gamma,w\right]_\gamma=0$ bulunur. Her $u,v\in U$ için Lemma 2.40 tan,

$$\left[[v,w]_\gamma,u\right]_\gamma+\left[[w,u]_\gamma,v\right]_\gamma=0 \tag{9}$$

dir. (9) eşitliğinde v yerine $v\gamma w$ yazılırsa her $u,v\in U$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= \left[[v\gamma w,w]_\gamma,u\right]_\gamma+\left[[w,u]_\gamma,v\gamma w\right]_\gamma\\
&= \left[[v,w]_\gamma\gamma w,u\right]_\gamma+v\gamma\left[[w,u]_\gamma,w\right]_\gamma+\left[[w,u]_\gamma,v\right]_\gamma\gamma w\\
&= [v,w]_\gamma\gamma[w,u]_\gamma+\left[[v,w]_\gamma,u\right]_\gamma\gamma w+v\gamma\left[[w,u]_\gamma,w\right]_\gamma+\left[[w,u]_\gamma,v\right]_\gamma\gamma w\\
&= [v,w]_\gamma\gamma[w,u]_\gamma
\end{aligned} \tag{10}$$

olur. (10) eşitliğinde $m,t\in M$ olmak üzere v yerine $[w,m]_\gamma$ ve u yerine $[w,t]_\gamma$ yazılırsa her $m,t\in M$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= \left[[w,m]_\gamma,w\right]_\gamma\gamma\left[w,[w,t]_\gamma\right]_\gamma\\
&= \left([w,m]_\gamma\gamma w-w\gamma[w,m]_\gamma\right)\gamma\left(w\gamma[w,t]_\gamma-[w,t]_\gamma\gamma w\right)\\
&= \left(\left[w^2,m\right]_\gamma-2w\gamma[w,m]_\gamma\right)\gamma\left(\left[w^2,t\right]_\gamma-2\left[w,t\right]_\gamma\gamma w\right)\\
&= \left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma\left(w^2\gamma t+t\gamma w^2\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

bulunur. (11) eşitliğinde $p\in M$ olmak üzere t yerine $t\gamma p$ yazılırsa her $p,t\in M$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma\left(w^2\gamma t\gamma p+t\gamma p\gamma w^2\right)\\
&= \left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma\left[w^2,t\gamma p\right]_\gamma\\
&= \left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma t\gamma\left[w^2,p\right]_\gamma+\left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma\left[w^2,t\right]_\gamma\gamma p\\
&= \left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma t\gamma\left[w^2,p\right]_\gamma
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\left(w^2\gamma m+m\gamma w^2\right)\gamma M\gamma\left[w^2,p\right]_\gamma=0$ elde edilir. M, γ-asal Γ-halka olduğundan $w^2\in C_\gamma$ olur. Ancak bu bir çelişkidir. O halde her $u\in U$ için $[d(u),u]_\gamma=0$ ise $u^2\in C_\gamma$ olmak zorundadır.

Buna göre her $u \in U$ için $u^2 \in C_\gamma$ olduğu sonucu elde edilir. Burada u yerine $v \in U$ olmak üzere $u+v$ yazılırsa $u\gamma v + v\gamma u \in C_\gamma$ bulunur. Bu ifadede v yerine $v\gamma u$ yazılırsa $(u\gamma v + v\gamma u)\gamma u \in C_\gamma$ bulunur. Bu durumda Lemma 3.24 kullanılırsa $u \in C_\gamma$ veya $u\gamma v + v\gamma u = 0$ olur. O halde U, γ-değişmelidir. □

Teorem 4.23 te U yalnızca γ-Lie ideal veya yalnızca γ-althalka olarak alınırsa U, γ-değişmeli olmayabilir.

Örnek 4.24. R değişmeli olmayan birimli bir asal halka olmak üzere $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(R)$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda M, γ-asal Γ-halkadır. Eğer $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in R \right\}$ ise U, M Γ-halkasının bir γ-althalkasıdır fakat γ-Lie ideali değildir. $n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$ olmak üzere $I_{n\gamma}$, $I_{\gamma n}$-iç türevini tanımlarsak her $u \in U$ için $\left[u, I_{n\gamma}(u)\right]_\gamma \in C_\gamma$ olur. Ancak U, γ-değişmeli değildir.

Örnek 4.25. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda M, γ-asal Γ-halkadır. Eğer $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & a & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ ise U, M Γ-halkasının bir γ-Lie idealidir fakat γ-althalkası değildir. $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ olmak üzere $I_{n\gamma}$, $I_{\gamma n}$-iç türevini tanımlarsak her $u \in U$ için $\left[u, I_{n\gamma}(u)\right]_\gamma \in C_\gamma$ olur. Ancak U, γ-değişmeli değildir. Çünkü; $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ için $u\gamma v \neq v\gamma u$ dur.

Örnek 4.26. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ ve $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda M, γ-asal Γ-halkadır. Eğer $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ ise U, M Γ-halkasının bir γ-Lie idealidir ve γ-althalkasıdır. Ancak U bir γ-ideal değildir. $n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ olmak üzere $I_{n\gamma}$, $I_{\gamma n}$-iç türevini tanımlarsak her $u \in U$ için $\left[u, I_{n\gamma}(u)\right]_{\gamma} \in C_{\gamma}$ olur. Buna göre U, γ-değişmeli olmasına karşın $U \nsubseteq C_{\gamma}$ dır.

5. GAMMA HALKALARA DAYALI HALKALAR VE γ-RADİKALLER

Bu bölümde gamma halkalar ile gamma halkaya bağlı olarak tanımlanacak halkalar arasındaki ilişkiler ile bu ilişkiler yardımıyla gamma halkanın yapısı ile ilgili özellikler incelenecektir. Ayrıca gamma halkalarda γ-radikaller tanımlanacak ve bu radikallerin gamma halkalarda daha önce tanımlanan radikallerle olan ilişkileri araştırılacaktır.

5.1. Gamma Halkalara Dayalı Halkalar

Önerme 5.1. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka ve Γ kümesinin sıfırdan farklı bir γ elemanı verilsin. M üzerinde $\cdot_\gamma$ ikili işlemi her $a,b \in M$ için $a \cdot_\gamma b = a\gamma b$ olarak tanımlanırsa $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ bir halka olur.*

İspat: Gamma halkanın tanımı kullanılarak kolayca ispatlanır. □

Buna göre her $\gamma \in \Gamma$ için uygun bir $\cdot_\gamma$ ikili işlemi tanımlayarak $(M,+)$ toplamsal değişmeli grubunu bir halka yapabiliriz. O halde M Γ-halkasının bir γ-ideali $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının bir ideali olur. Tersine, $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının bir ideali de aynı zamanda M Γ-halkasının bir γ-idealidir. Benzer şekilde M Γ-halkasının γ-Lie idealleri ile $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının Lie idealleri aynıdır. Ayrıca d, M Γ-halkasının bir k-türevi ve $k(\gamma) = 0$ ise d, $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının türevi olur. Böylece, $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının değişmeli, asal veya basit olması gibi özellikleri ile M Γ-halkasının γ-değişmeli, γ-asal veya γ-basit olması özellikleri birbirine denktir. Şimdi bunları bir önerme ile ifade edelim.

Önerme 5.2. $(\Gamma, M)_{wN}$ *gamma halkası verilsin.*

(i) M Γ-halkasının γ-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $\left(M,+,\cdot_\gamma\right)$ halkasının değişmeli olmasıdır.

(ii) M Γ-halkasının γ-birimli olması için gerek ve yeter koşul $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının birimli olmasıdır.

(iii) M Γ-halkasının bir A altkümesinin γ-althalka olması için gerek ve yeter koşul A altkümesinin $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasında bir althalka olmasıdır.

(iv) M Γ-halkasının bir I altkümesinin γ-ideal olması için gerek ve yeter koşul I altkümesinin $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasında bir ideal olmasıdır.

(v) M Γ-halkasının bir U altkümesinin γ- Lie ideal olması için gerek ve yeter koşul U altkümesinin $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasında bir Lie ideal olmasıdır.

(vi) M Γ-halkasının bir P altkümesinin γ-asal ideal olması için gerek ve yeter koşul P altkümesinin $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasında bir asal ideal olmasıdır.

(vii) M Γ-halkasının γ-asal olması için gerek ve yeter koşul $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının asal halka olmasıdır.

(viii) M Γ-halkasının γ-basit olması için gerek ve yeter koşul $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının basit halka olmasıdır.

(ix) d, M Γ-halkasının bir k-türevi ve $k(\gamma)=0$ ise d, $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının bir türevidir.

Lemma 5.3. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

(i) M, γ-asal Γ-halka ise M asal Γ-halkadır.

(ii) M, γ-basit Γ-halka ise M basit Γ-halkadır.

İspat:

(i) M bir γ-asal Γ-halka ve $a,b\in M$ için $a\Gamma M\Gamma b=0$ olsun. Bu durumda $a\gamma M\gamma b=0$ dır. M, γ-asal Γ-halka olduğundan $a=0$ veya $b=0$ elde edilir. Böylece M bir asal Γ-halka olur.

(ii) M bir γ-basit Γ-halka ise $M\gamma M\neq 0$ ve M nin sıfır ve kendisinden başka bir γ-ideali yoktur. Buna göre $M\Gamma M\neq 0$ olur. M Γ-halkasının herhangi bir ideali aynı zamanda bir γ-ideal olduğundan hipotez gereği M basit Γ-halkadır.

□

Örnek 5.4. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ olsun. Bu durumda, M bir asal Γ-halkadır. Ancak, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ alınırsa M Γ-halkasının γ-asal olmadığı görülür.

Örnek 5.5. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q} \right\}$ ve $\Gamma = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{Q})$ olsun. Bu durumda, M bir basit Γ-halkadır. Ancak, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ alınırsa M Γ-halkasının γ-basit olmadığı görülür.

Teorem 5.6. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka olsun. M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde d_1, k_1-türevi ile d_2, k_2-türevleri verilsin. Eğer* $\mathrm{char} M \neq 2$ *ve $d_1 d_2$, M Γ-halkasının $k_1 k_2$-türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

İspat: Hipotezden $(M, +, \cdot_\gamma)$, karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halkadır ve d_1, d_2, $d_1 d_2$ dönüşümleri bu halkanın türevleri olur. Buna göre [19, Teorem 1] den $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasında $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının türevleri ile M Γ-halkasının $k(\gamma) = 0$ özelliğini sağlayan k-türevleri aynı olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur. □

Teorem 5.7. *M, karakteristiği 2 den farklı olan Nobusawa anlamında bir γ-asal Γ-halka, d bir k-türev ve $d^2 = 0$ ise $d = 0$ veya $k^2 = 0$ olur.*

İspat: Eğer $k(\gamma) = 0$ ise Lemma 4.1 den $d = 0$ olur. $k(\gamma) \neq 0$ alalım. Hipotezden, her $x, y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $d^2(x\beta y) = 0$ olur. Buna göre,

$$0 = d^2(x\beta y) = 2d(x)k(\beta)y + 2d(x)\beta d(y) + xk^2(\beta)y + 2xk(\beta)d(y)$$

dir. Burada x yerine $d(x)$ ve y yerine $d(y)$ alınırsa her $x, y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $d(x)k^2(\beta)d(y) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte β yerine $z \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere

$\beta d(z)\alpha$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)k^2(\beta d(z)\alpha)d(y) \\ &= d(x)(k(k(\beta)d(z)\alpha+\beta d(z)k(\alpha)))d(y) \\ &= d(x)\left(k^2(\beta)d(z)\alpha+2k(\beta)d(z)k(\alpha)+\beta d(z)k^2(\alpha)\right)d(y) \\ &= 2d(x)k(\beta)d(z)k(\alpha)d(y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan M Γ-halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan $d(x)k(\beta)d(z)k(\alpha)d(y)=0$ elde edilir. Burada β yerine $m\in M$ ve $\delta\in\Gamma$ olmak üzere $\beta d(m)\delta$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)k(\beta d(m)\delta)d(z)k(\alpha)d(y) \\ &= d(x)(k(\beta)d(m)\delta+\beta d(m)k(\delta))d(z)k(\alpha)d(y) \\ &= d(x)k(\beta)d(m)\delta d(z)k(\alpha)d(y) \end{aligned}$$

olur. M, γ-asal Γ-halka olduğundan Lemma 5.3 ten M bir asal Γ-halkadır. Buna göre son ifade gözönüne alınırsa her $x,m,z,y\in M$ ve $\beta,\alpha\in\Gamma$ için $d(x)k(\beta)d(m)=0$ veya $d(z)k(\alpha)d(y)=0$ olur. Bu her $x,m\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için $d(x)k(\beta)d(m)=0$ olmasını gerektirir. Burada x yerine $d(x)\alpha y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= d(d(x)\alpha y)k(\beta)d(m) \\ &= d(x)k(\alpha)yk(\beta)d(m)+d(x)\alpha d(y)k(\beta)d(m) \\ &= d(x)k(\alpha)yk(\beta)d(m) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte, $\delta\in\Gamma$ ve $z\in M$ olmak üzere y yerine $y\delta z$ yazılırsa $d(x)k(\gamma)y\delta zk(\beta)d(m)=0$ olur. Böylece M asal Γ-halka olduğundan her $x,y,z,m\in M$ ve $\alpha,\beta,\delta\in\Gamma$ için $d(x)k(\alpha)y=0$ veya $zk(\delta)d(m)=0$ elde edilir. $d(x)k(\alpha)y=0$ olsun. Bu eşitlikte α yerine $\alpha mk(\delta)$ yazılırsa her $x,m,y\in M$ ve $\alpha,\delta\in\Gamma$ için $d(x)\alpha mk^2(\delta)y=0$ bulunur. Buradan M Nobusawa anlamında asal Γ-halka olduğundan $d=0$ veya her $m,y\in M$ ve $\delta\in\Gamma$ için $mk^2(\delta)y=0$ olur. Bu ise $d=0$

veya $k^2 = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $zk(\delta)d(m) = 0$ ise benzer şekilde $d = 0$ veya $k^2 = 0$ bulunur. □

Teorem 5.8. *d, bir zayıf Nobusawa M Γ-halkasının $k(\gamma) = 0$ özelliğini sağlayan bir k-türevi ve $d^3 \neq 0$ olsun. Bu durumda $\overline{d(M)}$ γ-althalkası M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

İspat: d, $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının bir türevi ve $d^3 \neq 0$ olduğundan [6, Teorem 1] den her $m \in M$ için $d(m)$ elemanları tarafından üretilen γ-althalka $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Buna göre her $m \in M$ için $d(m)$ elemanları tarafından üretilen γ-althalka, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.□

Sonuç 5.9. *d, bir zayıf Nobusawa M Γ-halkasının $d^3 \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir 0-türevi ise her $a,b \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $d(a\alpha b)$ elemanları tarafından üretilen γ-althalka M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir γ-idealini kapsar.*

Sonuç 5.9 un başka bir ispatı [20] de bulunabilir.

Teorem 5.10. *M bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve d, M Γ-halkasının $k(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir k-türevi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullardan biri geçerli olduğunda M, γ-değişmelidir.*

(i) Her $a \in M$ için $[a,d(a)]_\gamma \in C_\gamma$ dir.

(ii) $\operatorname{char} M \neq 2$ *ve* $[d(M),d(M)]_\gamma \subset C_\gamma$ *dir.*

(iii) $\operatorname{char} M \neq 2$ *ve* $d^2(M) \subset C_\gamma$ *dir.*

(iv) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı k_1 ve k_2-türevleri olmak üzere $\operatorname{char} M \neq 2$ *ve* $d_1 d_2(M) \subset C_\gamma$ *dir.*

İspat: Hipotezden d, $(M,+,\cdot_\gamma)$ asal halkasının sıfırdan farklı bir türevidir.

(i) Her $a \in M$ için $[a,d(a)]_\gamma \in C_\gamma$ olsun. O halde her $a \in M$ için $[a,d(a)]$ elemanı $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının merkezindedir. Bu durumda [19, Teorem 2] kullanılırsa $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının değişmeli olduğu görülür. Dolayısıyla M Γ-halkası γ-değişmeli olur.

(ii) $\mathrm{char} M \neq 2$ ve $[d(M), d(M)]_\gamma \subset C_\gamma$ olsun. Buna göre $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının karakteristiği 2 den farklıdır ve $[d(M), d(M)]$, M halkasının merkezi tarafından kapsanır. O halde [14, Teorem 2] den $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası değişmelidir. Dolayısıyla M Γ-halkası γ-değişmeli olur.

(iii) $\mathrm{char} M \neq 2$ ve $d^2(M) \subset C_\gamma$ olsun. Buna göre $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının karakteristiği 2 den farklıdır ve $d^2(M)$, M halkasının merkezi tarafından kapsanır. O halde [14, Teorem 3] ten $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası değişmelidir. Dolayısıyla M Γ-halkası γ-değişmeli olur.

(iv) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı k_1 ve k_2-türevleri, $\mathrm{char} M \neq 2$ ve $d_1 d_2(M) \subset C_\gamma$ olsun. Buna göre $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının karakteristiği 2 den farklıdır ve $d_1 d_2(M)$, M halkasının merkezi tarafından kapsanır. O halde [14, Teorem 4] ten $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası değişmelidir. Dolayısıyla M Γ-halkası γ-değişmeli olur.

$\square$

Sonuç 5.11. *M, sıfırdan farklı her $\gamma \in \Gamma$ için bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir 0-türevi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullardan biri geçerli olduğunda M Γ-halkası değişmelidir:*

(i) Her $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[a, d(a)]_\gamma \in C_\gamma$ dır.

(ii) $\mathrm{char} M \neq 2$ *ve her $\gamma \in \Gamma$ için $[d(M), d(M)]_\gamma \subset C_\gamma$ dır.*

(iii) $\mathrm{char} M \neq 2$ *ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d^2(M) \subset C_\gamma$ dır.*

(iv) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının sıfırdan farklı 0-türevleri, $\mathrm{char} M \neq 2$ *ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d_1 d_2(M) \subset C_\gamma$ dır.*

Teorem 5.12. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali olsun. Eğer $U \nsubseteq C_\gamma$ ise $[K, M]_\gamma \subseteq U$ fakat $[K, M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ olacak şekilde M Γ-halkasının bir K γ-ideali vardır.*

İspat: Hipotezden U, karakteristiği 2 den farklı olan $(M, +, \cdot_\gamma)$ asal halkasının merkezinde kapsanmayan bir Lie idealdir. O halde [3, Lemma 1] gereği $(M, +, \cdot_\gamma)$

halkasının $[K,M] \subseteq U$ ve $[K,M] \nsubseteq C(M)$ şartlarını sağlayan bir K ideali vardır. Dolayısıyla M Γ-halkasının $[K,M]_\gamma \subseteq U$ fakat $[K,M]_\gamma \nsubseteq C_\gamma$ koşullarını sağlayan K γ-ideali elde edilir. □

Teorem 5.13. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve $U \nsubseteq C_\gamma$ olsun. d_1 ve d_2, M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı k_1 ve k_2-türevleri olmak üzere $d_1 d_2(U) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

İspat: Hipotez gereği d_1 ve d_2, $(M,+,\cdot_\gamma)$ asal halkasının sıfırdan farklı türevleridir ve U, M Γ-halkasının merkezi tarafından kapsanmayan bir Lie ideal olur. Ayrıca $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının karakteristiği 2 den farklı ve $d_1 d_2(U) = 0$ dır. Bu durumda [3, Teorem 4] gereği $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ bulunur. $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının türevleri ile M Γ-halkasının $k(\gamma) = 0$ özelliğindeki d, k-türevleri aynı olduğundan istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 5.14. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali ve d, M nin $k(\gamma) = 0$ olacak şekilde bir k-türevi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullardan biri geçerli ise $U \subseteq C_\gamma$ olur:*

(i) $d^2(U) = 0$ dır.

(ii) $d \neq 0$ ve $d^2(U) \subset C_\gamma$ dır.

(iii) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı k_1 ve k_2-türevleri olmak üzere $d_1 d_2(U) \subset C_\gamma$ dır.

İspat: Hipotezden U, karakteristiği 2 den farklı olan $(M,+,\cdot_\gamma)$ asal halkasının bir Lie ideali ve d, M halkasının bir türevi olur.

(i) $d^2(U) = 0$ olsun. Bu durumda [3, Teorem 1] den U, $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının merkezi tarafından kapsanır. Dolayısıyla $U \subset C_\gamma$ elde edilir.

(ii) $d \neq 0$ ve $d^2(U) \subset C_\gamma$ olsun. Buna göre $d^2(U)$, $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkasının merkezi tarafından kapsanacağından [15, Teorem 1] gereği U da M halkasının merkezi tarafından kapsanır. Böylece $U \subset C_\gamma$ elde edilir.

(iii) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının $k_1(\gamma) = k_2(\gamma) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı k_1 ve k_2-türevleri olmak üzere $d_1 d_2(U) \subset C_\gamma$ olsun. Bu durumda d_1 ve d_2, $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının sıfırdan farklı türevleri olup $d_1 d_2(U)$, M halkasının merkezi tarafından kapsanır. O halde [15, Teorem 4] ten U, M halkasının merkezi tarafından kapsanır. Dolayısıyla $U \subset C_\gamma$ elde edilir.

□

Sonuç 5.15. *M, karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve U, M Γ-halkasının γ-merkezi tarafından kapsanmayan bir γ-Lie ideali olsun. Eğer bir $a \in M$ için $\left[a, [a, U]_\gamma\right]_\gamma = 0$ ise $[a, U]_\gamma = 0$ olur.*

Sonuç 5.16. *Sıfırdan farklı her $\gamma \in \Gamma$ için M karakteristiği 2 den farklı olan bir zayıf Nobusawa γ-asal Γ-halka ve U, M Γ-halkasının bir γ-Lie ideali olsun. Eğer d, M Γ-halkasının bir 0-türevi ise aşağıdaki koşullardan biri geçerli olduğunda U, M Γ-halkasının merkezi tarafından kapsanır:*

(i) $d^2(U) = 0$ dır.

(ii) $d \neq 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d^2(U) \subset C_\gamma$ dır.

(iii) d_1 ve d_2, M Γ-halkasının sıfırdan farklı 0-türevleri ve her $\gamma \in \Gamma$ için $d_1 d_2(U) \subset C_\gamma$ dır.

Teorem 5.17. *M bir Nobusawa anlamında Γ-halka ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. Eğer $\gamma \in C_M$ ise M Γ-halkasının γ-asal Γ-halka olması için gerek ve yeter koşul M nin asal Γ-halka olmasıdır.*

İspat: M bir γ-asal Γ-halka ise Lemma 5.3 ten M bir asal Γ-halkadır. Tersine, M bir asal Γ-halka, $a, b \in M$ ve $a \neq 0$ için $a\gamma M\gamma b = 0$ olsun. Bu durumda $a\Gamma M\gamma M\gamma b = 0$ olur. M asal Γ-halka olduğundan $M\gamma M\gamma b = 0$ dır. Böylece $M\gamma M\Gamma b\gamma M = 0$ elde edilir. Burada $\gamma \in C_M$ ve M Γ-halkasının asal Γ-halka olması kullanılırsa $b = 0$ bulunur. O halde M, γ-asaldır. □

Sonuç 5.18. *M Nobusawa anlamında asal değişmeli Γ-halka ise sıfırdan farklı her bir $\gamma \in \Gamma$ için $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası sıfır bölensizdir.*

5.2. Gamma Halkalarda γ-Radikaller

5.2.1. γ-Asal Radikal

Tanım 5.19. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka ve $S \subset M$ olsun. Eğer $S = \emptyset$ veya $a, b \in S$ olmak üzere $(a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \cap S \neq \emptyset$ ise S kümesine M Γ-halkasında bir *γ-m-sistemdir* denir.

Önerme 5.20. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka ve P, M Γ-halkasının bir γ-ideali olsun. P nin γ-asal ideal olması için gerek ve yeter koşul P nin tümleyeninin bir γ-m-sistem olmasıdır.*

İspat: P, M Γ-halkasının γ-asal ideali ve $C(P)$ kümesi, P nin tümleyeni olsun. O halde Önerme 3.17 gereği,

$$\begin{aligned} a, b \in C(P) &\Rightarrow a, b \notin P \Rightarrow (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \nsubseteq P \\ &\Rightarrow \exists x \in M \ni x \in (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \wedge x \in C(P) \\ &\Rightarrow (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \cap C(P) \neq \emptyset \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlanır. Buna göre, $C(P)$ bir γ-m-sistemdir.

Tersine, $C(P)$ bir γ-m-sistem olsun. $a, b \in M$ olmak üzere $a, b \notin P$ alalım. Bu durumda $a, b \in C(P)$ olur. O halde Önerme 3.17 gereği,

$$\begin{aligned} a, b \in C(P) &\Rightarrow (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \cap C(P) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists x \in M \ni x \in (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \wedge x \notin P \\ &\Rightarrow (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \nsubseteq P \end{aligned}$$

bulunur. Böylece P, M Γ-halkasının bir γ-asal idealidir. □

Tanım 5.21. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka ve A, M nin bir γ-ideali olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B}_\gamma(A) = \{m \in M \mid m \in S \text{ olacak şekilde her } S \ \gamma\text{-}m\text{-sistemi için } S \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesine A *γ-idealinin γ-asal radikali* denir. $(0)_\gamma$ γ-idealinin γ-asal radikaline M *Γ-halkasının γ-asal radikali* denir ve $\mathcal{B}_\gamma(M)$ ile gösterilir. Buna göre M Γ-halkasının γ-asal radikali,

$$\mathcal{B}_\gamma(M) = \{m \in M \mid m \in S \text{ olacak şekilde her } S\ \gamma\text{-}m\text{-sistemi için } 0 \in S\}$$

ile tanımlanır. Aslında $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının asal radikali $\mathcal{B}_\gamma(M)$ kümesine eşittir.

Teorem 5.22. *A, M zayıf Nobusawa Γ-halkasının bir γ-ideali olmak üzere A γ-idealinin γ-asal radikali $\mathcal{B}_\gamma(A)$, M Γ-halkasının A yı kapsayan tüm γ-asal ideallerinin kesişimidir.*

İspat: M Γ-halkasının A yı kapsayan tüm γ-asal ideallerinin kesişimini $\mathcal{K}$ ile gösterelim. $\mathcal{K} = \mathcal{B}_\gamma(A)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $m \in \mathcal{B}_\gamma(A)$ olsun. P nin, M Γ-halkasının A γ-idealini kapsayan ve m yi içermeyen bir γ-asal ideali olduğunu kabul edelim. Önerme 5.20 den P nin tümleyeni $C(P)$ bir γ-m-sistemdir ve $m \in \mathcal{B}_\gamma(A)$ olduğundan $A \cap C(P) \neq \emptyset$ olur. Ancak bu $A \subseteq P$ oluşu ile çelişir. O halde $m \in \mathcal{K}$ dır. Böylece $\mathcal{B}_\gamma(A) \subseteq \mathcal{K}$ bulunur. Şimdi de $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_\gamma(A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $m \notin \mathcal{B}_\gamma(A)$ iken $m \notin \mathcal{K}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $m \notin \mathcal{B}_\gamma(A)$ ise M nin m elemanını içeren ve $A \cap T = \emptyset$ olacak şekilde bir T γ-m-sistemi vardır. $\mathcal{U} = \{N \mid A \subseteq N, T \cap N = \emptyset, N\ \gamma\text{-ideal}\}$ kümesini tanımlayalım. Buna göre $A \in \mathcal{U}$ olacağından $\mathcal{U} \neq \emptyset$ dir. Eğer $\mathcal{U}$ kümesindeki her zincirin bir üst sınırı varsa Zorn Lemma'dan $\mathcal{U}$ nun bir maksimal elemanı vardır. I bir indis kümesi olmak üzere $\mathcal{C} = \{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$, $\mathcal{U}$ da bir zincir olsun. $J = \bigcup_{\alpha \in I} J_\alpha$ kümesi tanımlanırsa $A \subseteq J$, $T \cap J = \emptyset$ ve J bir γ-ideal olacağından J kümesi $\mathcal{C}$ zincirinin $\mathcal{U}$ daki bir üst sınırıdır. O halde Zorn Lemma'dan $\mathcal{U}$ nun bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman P ile gösterilirse P nin, M Γ-halkasının A yı kapsayan bir γ-ideali olduğu açıktır. $m \in T$ ve $T \cap P = \emptyset$ olduğundan $m \notin P$ dir. Buna göre P γ-asal ideal olursa ispat biter. $a, b \notin P$ olsun. a ve b elemanı tarafından üretilen γ-idealler sırasıyla $(a)_\gamma$ ve $(b)_\gamma$ ile gösterilsin. Bu durumda $P + (a)_\gamma, P + (b)_\gamma \notin \mathcal{U}$ dur. Çünkü P, $\mathcal{U}$ kümesinin maksimal elemanıdır. O halde $\big(P + (a)_\gamma\big) \cap T \neq \emptyset$ ve $\big(P + (b)_\gamma\big) \cap T \neq \emptyset$ olur.

$m_1 \in \big(P+(a)_\gamma\big)\cap T$ ve $m_2 \in \big(P+(b)_\gamma\big)\cap T$ olsun. $m_1, m_2 \in T$ ve T bir γ-m-sistem olduğundan $(m_1)_\gamma \gamma (m_2)_\gamma \cap T \neq \emptyset$ dir. Buna göre,

$$(m_1)_\gamma \gamma (m_2)_\gamma \subseteq \big(P+(a)_\gamma\big)\,\gamma\,\big(P+(b)_\gamma\big) \subseteq P\gamma P + P\gamma(b)_\gamma + (a)_\gamma \gamma P + (a)_\gamma \gamma (b)_\gamma$$

elde edilir. Eğer $(a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \subseteq P$ olduğu kabul edilirse $(m_1)_\gamma \gamma (m_2)_\gamma \subseteq P$ bulunur. Bu ise $P\cap T \neq \emptyset$ demektir. Oysa bu $P \in \mathcal{U}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $a, b \notin P$ iken $(a)_\gamma \gamma (b)_\gamma \nsubseteq P$ elde edilir. Böylece P bir γ-asal ideal olur. □

Sonuç 5.23. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının γ-asal radikali $\mathcal{B}_\gamma(M)$, M Γ-halkasının tüm γ-asal ideallerinin kesişimidir.*

Teorem 5.24. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının asal radikali $\mathcal{B}(M)$ olmak üzere $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{B}_\gamma(M)$ dir.*

İspat: $x \in \mathcal{B}(M)$ olsun ve $x \notin \mathcal{B}_\gamma(M)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda x elemanını içeren bir S γ-m-sistemi için $0 \notin S$ dir. S bir γ-m-sistem olduğundan aynı zamanda bir m-sistemdir. O halde M Γ-halkasının x elemanını içeren bir m-sistemi 0 elemanını içermeyecek şekilde var olur. Oysa bu $x \in \mathcal{B}(M)$ olmasıyla çelişir. O halde $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{B}_\gamma(M)$ elde edilir. □

Sonuç 5.25. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $(M,+,\cdot_\gamma)$ halkası yarı-asal halka ise M, Γ-halkası yarı-asaldır.*

5.2.2. γ-Nilpotent Radikal

Tanım 5.26. *M* bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. *M* Γ-halkasının tüm γ-nilpotent ideallerinin toplamına *M* Γ-halkasının *γ-nilpotent radikali* denir ve $\mathcal{S}_\gamma(M)$ ile gösterilir.

Lemma 5.27. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. Eğer A ve B, M Γ-halkasının γ-nilpotent idealleri ise $A+B$ kümesi de γ-nilpotent ideal olur.*

İspat: A ve B, M Γ-halkasının γ-nilpotent idealleri olduğundan $(A\gamma)^n A = 0$ ve $(B\gamma)^m B = 0$ olacak şekilde n ve m pozitif tamsayıları vardır. Buna göre,

$$((A+B)\,\gamma)^n\,(A+B) = (A\gamma)^n A + B_1 = B_1$$

eşitliğini sağlayan $B_1 \subseteq B$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} ((A+B)\,\gamma)^{mn+m+n}\,(A+B) &= (((A+B)\,\gamma)^n\,(A+B)\,\gamma)^m\,((A+B)\,\gamma)^n\,(A+B) \\ &= (B_1\gamma)^m\,B_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $A+B$ de γ-nilpotent ideal olur. Diğer taraftan A ve B birer γ-ideal ise $A+B$ nin de bir γ-ideal olduğu açıktır. □

Sonuç 5.28. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının γ-nilpotent radikali bir γ-nil idealdir.*

İspat: $\mathcal{S}_\gamma(M)$ nin her x elemanı, M nin γ-nilpotent ideallerinin sonlu toplamlarının da bir elemanıdır. Lemma 5.27 gereği bu sonlu toplam, M Γ-halkasının γ-nilpotent ideali olduğundan x γ-nilpotent eleman olur. O halde $\mathcal{S}_\gamma(M)$ bir γ-nil idealdir. □

Teorem 5.29. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının güçlü nilpotent radikali $\mathcal{S}(M)$ olmak üzere $\mathcal{S}(M) \subseteq \mathcal{S}_\gamma(M)$ dir.*

İspat: M zayıf Nobusawa Γ-halkasının güçlü nilpotent ideali aynı zamanda γ-nilpotent ideal olduğundan $\mathcal{S}(M) \subseteq \mathcal{S}_\gamma(M)$ elde edilir. □

5.2.3. γ-Levitzki Nil Radikal

Tanım 5.30. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka ve $S \subset M$ olsun. S nin herhangi bir sonlu F altkümesi için $(F\gamma)^n F = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa S kümesine *γ-yerel nilpotenttir* denir.

Tanım 5.30 da $F = \{a\}$ alınırsa γ-yerel nilpotent olan bir kümenin γ-nil olduğu açıktır.

Tanım 5.31. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. M Γ-halkasının tüm γ-yerel nilpotent ideallerinin toplamına M Γ-halkasının *γ-Levitzki nil radikali* denir ve $\mathcal{L}_\gamma(M)$ ile gösterilir.

Teorem 5.32. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının Levitzki nil radikali $\mathcal{L}(M)$ olmak üzere $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\gamma(M)$ dir.*

İspat: M, Γ-halkasının bir yerel nilpotent ideali aynı zamanda γ-yerel nilpotent ideal olduğundan $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\gamma(M)$ elde edilir. □

5.2.4. γ-Jacobson Radikal

Tanım 5.33. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka, $a \in M$ ve $S \subseteq M$ olsun.

(i) Eğer $a + b + a\gamma b = 0$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa a elemanına *γ-sağ yarı regüler eleman* denir.

(ii) S nin her elemanı γ-sağ yarı regüler ise S kümesine *γ-sağ yarı regülerdir* denir.

Tanım 5.34. M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. M Γ-halkasının *γ-Jacobson radikali*,

$$\left\{ a \in M \mid (a)_\gamma \ \ \gamma\text{-sağ yarı regüler} \right\}$$

kümesi olarak tanımlanır ve $\mathcal{J}_\gamma(M)$ ile gösterilir. Aslında $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkasının Jacobson radikali $\mathcal{J}_\gamma(M)$ kümesine eşittir.

Teorem 5.35. *M zayıf Nobusawa Γ-halkasının Jacobson radikali $\mathcal{J}(M)$ olmak üzere $\mathcal{J}(M) \subseteq \mathcal{J}_\gamma(M)$ dir.*

İspat: Eğer M Γ-halkasının bir a elemanı sağ yarı regüler ise a aynı zamanda γ-sağ yarı regüler elemandır. Dolayısıyla $\mathcal{J}(M) \subseteq \mathcal{J}_\gamma(M)$ elde edilir. □

Sonuç 5.36. *M bir zayıf Nobusawa Γ-halka olsun. Herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $(M, +, \cdot_\gamma)$ halkası yarı-basit halka ise M, Γ-halkası yarı-basittir.*

KAYNAKLAR

[1] Awtar, R. 1973. Lie and Jordan structure in prime rings with derivations, **Proc. Amer. Math. Soc.** 41: 67-74.

[2] Barnes, W. E. 1966. On the Γ-rings of Nobusawa, **Pacific J. Math.** 18(3): 411-422.

[3] Bergen, J., Kerr, J.W., Herstein, I.N. 1981. Lie ideals and derivations of prime rings, **J. Algebra** 71: 259-267.

[4] Coppage W. E., Luh, J. 1971. Radicals of gamma rings, **J. Math. Soc. Japan** 23(1): 40-52.

[5] Herstein, I. N. 1969. Topics in Ring Theory, The Univ. of Chicago Press, Chicago.

[6] Herstein, I. N. 1978. A note on derivations, **Canad. Math. Bull.** 21(3): 369-370.

[7] Herstein, I. N. 1979. A note on derivations II. **Canad. Math. Bull.** 22(4): 509-511.

[8] Jing, F. J. 1987. On derivations of Γ-rings. **Qu fu Shifan Daxue Xuebeo Ziran Kexue Ban** 13(4): 159-161.

[9] Kandamar, H. 2000. The k-derivation of a Gamma-Ring. **Turk. J. Math.** 23(3): 221-229.

[10] Kyuno, S. 1975. On the radicals of Γ-rings. **Osaka J. Math.** 12: 639-645.

[11] Kyuno, S. 1977. On the semi-simple gamma rings. **Tohoku J. Math.** 29: 217-225.

[12] Kyuno, S. 1982. Prime ideals in gamma rings. **Pac. J. Math.** 98: 375-379.

[13] Kyuno, S. 1991. Gamma Rings, Hadronic Press, Palm Habor.

[14] Lee, P. H., Lee, T. K. 1981. On derivations of prime rings. **Chinese J. Math.** 9(2): 107-110.

[15] Lee, P. H., Lee, T. K. 1983. Lie ideals of prime rings with derivations. **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica** 11(1): 75-80.

[16] Luh, J. 1969. On the theory of simple Γ-rings. **Michigan Math. J.** 16(1): 65-75.

[17] Nobusawa, N. 1964. On a generalization of the ring theory. **Osaka J. Math.** 1: 81-89.

[18] Paul, A. C., Uddin, Md. S. 2010. Lie and Jordan structure in simple gamma rings. **Journal of Physical Sciences** 14: 77-86.

[19] Posner, E. C. 1957. Derivations in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.** 8: 1093-1100.

[20] Rakhimov, I. S., Dey, K. K., Paul, A. C. 2013. On commutativity of completely prime gamma-rings. **Malays. J. Math. Sci.** 7(2): 283-295.

[21] Ravisankar, T. S., Shukla, U. S. 1979. Structure of Γ-rings. **Pac. J. Math.** 80(2): 537-559.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Okan ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Lüleburgaz, 03.02.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

-SCI :

-Diğer :

Arslan O., Kandamar H. 2015. γ-Lie Structures in γ-Prime Gamma Rings, **Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications**, 2(1): 25-37.

b) Bildiriler

-Uluslararası :

Arslan O., Kandamar H. 2014. γ-Lie Structures in γ-Prime Gamma Rings, Karatekin Mathematics Days.

Arslan O., Kandamar H. 2015. γ-Radicals of Gamma Rings, International Conference on Pure and Applied Mathematics.

-Ulusal :

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. (2005 - ...)

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	oarslan@adu.edu.tr
Tarih	:	