T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2008-0004

PARÇALI POLİNOM FONKSİYONLARI

Mehmet Soner Pehlivan

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Selma Altınok

AYDIN-2008

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MAT-YL-2008-0004

PARÇALI POLİNOM FONKSİYONLARI

Mehmet Soner Pehlivan

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Selma Altınok

AYDIN-2008

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mehmet Soner Pehlivan tarafından hazırlanan Parçalı Polinom Fonksiyonları başlıklı tez, 15.09.2008 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Yrd. Doç. Dr. Selma Altınok	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:	Prof. Dr. Hatice Kandamar	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Feza Arslan	Ortadoğu Teknik Üniversitesi	
Üye	:			
Üye	:			

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Serap AÇIKGÖZ
Enstitü Müdürü

İNTİHAL BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Adı Soyadı : Mehmet Soner Pehlivan
İmza :

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARÇALI POLİNOM FONKSİYONLARI

Mehmet Soner Pehlivan

Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selma Altınok

$\mathbb{R}^n$ içindeki n-boyutlu Δ polihedral kompleks olmak üzere $C^r(\Delta)$ kümesi, Δ üzerinde tanımlı, C^r türevlenebilir parçalı polinom fonksiyonlardan oluşsun. Derecesi k dan küçük ve eşit olan bütün C^r parçalı polinom fonksiyonları içeren $C_k^r(\Delta)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu tezde $n = 1$ ve 2 durumları için $C_k^r(\Delta)$ vektör uzayının boyut hesaplamaları çalışıldı. $n = 2$ için iki farklı yöntem kullanıldı. İlk yöntemde Δ polihedral kompleks olmak üzere $C^r(\Delta)$ nın free olma koşulu altında, değişik örnekler üzerinde $C_k^r(\Delta)$ vektör uzayının boyutu CoCoA 4.7 yazılım programı yardımı ile hesaplandı. İkinci yöntemde Δ simpleksel kompleks olmak üzere yeterince büyük k lar için homoloji hesaplamaları kullanılarak $C_k^r(\Delta)$ için genel boyut formülü verildi. Bu iki yöntemle yapılan hesaplamaların örnek üzerinde örtüştüğü de görüldü.

Bölüm 2 de temel notasyonlar, tanımlar ve modüller için gerekli olan sonuçlar verildi.

Bölüm 3 ün ilk kısmında tek değişkenli parçalı polinom fonksiyonlara bir giriş yapıldı. Verilen fonksiyonun C^r türevlenebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşulu çalışıldı. Bu koşul altında tek değişkenli parçalı polinom fonksiyonların oluşturduğu uzayın boyutu hesaplandı. İkinci kısımda, ilk olarak polihedral kopmleksler üzerinde tanımlı iki değişkenli parçalı polinom fonksiyonları incelendi. CoCoA 4.7 yazılım programı yardımıyla değişik örnekler üzerinde boyut hesaplamaları yapıldı. İkinci olarak da Δ simpleksel kompleks olmak üzere şişman noktalar idealleri ile spline fonksiyonlar arasındaki ilişki çalışıldı. Daha sonra da bu ilişkiyle beraber homoloji hesapları yapılarak yeterince büyük k lar için $C_k^r(\Delta)$ vektör uzayının genel boyut formülü verildi.

2008, 60 sayfa

Anahtar Sözcükler
Parçalı polinom fonksiyonları, Spline, Şişman noktalar, Tersinir sistemler, Doğrusal formların kuvvetleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

PIECEWISE POLYNOMIAL FUNCTIONS

Mehmet Soner Pehlivan

Adnan Menderes University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Selma Altınok

For a n-dimensional polyhedral simplex Δ embedded in $\mathbb{R}^n$ $C^r(\Delta)$ contains C^r piecewise polynomial functions. The space $C^r_k(\Delta)$ consisting of all C^r piecewise polynomial functions of degree at most k is a finite dimensional vector space over $\mathbb{R}$. In this thesis we computed dimensions of $C^r_k(\Delta)$ in the case of $n = 1$ and 2. For $n = 2$ we used two different methods. First method is that for a polyhedral complex Δ we have worked on various examples by using CoCoA 4.7 in order to calculate dimensions of $C^r_k(\Delta)$ when $C^r(\Delta)$ was free. For the second method, we again computed dimensions of $C^r_k(\Delta)$ for sufficiently large k by using homolojical calculations on a simplicial complex Δ. We see that on the examples these two methods coincide.

In Chapter 2, we give notations, definitions and results for module.

In the first part of Chapter 3, we introduce piecewise polynomial functions in one variable. We give necessary and sufficient condition for the functions to be C^r-smooth. Using these fact the dimension formula is given. In the second part, we first studied piecewise polynomial function in two variables on a poyhedral complex Δ, especially on various examples by using CoCoA 4.7. Secondly, we have studied the relation between ideals of fat points and piecewise polynomial functions on a simplicial complex Δ. By using this relation together with homolojical computations a formula for dimension of $C^r_k(\Delta)$ in sufficiently large degree k is derived.

2008, 60 page

Key Words
Piecewise polynomial functions, Spline, Fat points, Inverse systems, Powers of linear forms.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Yrd. Doç. Dr. Selma ALTINOK’a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Hatice Kandamar ve Yrd. Doç. Dr. Feza Arslan’a eşsiz yorumlarıyla sağlamış oldukları bilimsel katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Soner Pehlivan

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ üçgensel bölge olmak üzere $C^r(\Delta)$ kümesi, Δ üzerinde tanımlı C^r-türevlenebilir, parçalı polinom fonksiyonlarından oluşsun. Bu fonksiyonlara *spline, parçalı polinomlar veya sonlu element* denir. $k \in \mathbb{N}$ ve her $\sigma \in \Delta$ için $f_{|\sigma}$ derecesi k dan küçük ve eşit polinom ise $C^r(\Delta)$ kümesindeki elemanlar $f \in C^r_k(\Delta)$ ile gösterilir. Bu küme $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır.

Bu tür fonksiyonların bir çok uygulamaları vardır. Özellikle de kısmi difeansiyel denklemlerin çözümleri için sonlu element yöntemi sık kullanılır. Şimdilerde, bilgisayar yardımıyla dizayn, yüzey modellemeleri ve bilgisayarda grafik çalışmaları için de spline fonksiyonlar çalışılmaktadır. Bu sebepten dolayı $\mathbb{R}^n$ üzerinde $C^r_k(\Delta)$ boyutunu ve taban elemanlarını bulmak yararlıdır.

$C^r_k(\Delta)$ uzayının boyutunu hesaplamaktaki en ciddi zorluk problemin sadece Δ nın nasıl ayrıştığına bağlı değil aynı zamanda uzaya nasıl gömüldüğüne, yani Δ nın geometrisine de bağlı olmasıdır. İki boyutlu üçgensel bölgeler üzerinde tanımlı spline fonksiyonları daha yaygın bir şekilde çalışılmıştır. Üç boyutlu spline fonksiyonları hakkında çok daha az şeyler bilinmektedir.

Strang (1973), Δ iki boyutlu manifold olmak üzere $C^1_3(\Delta)$ nın boyutu ile ilgili bir önsav (conjecture) yaptı. Bu yaptığı önsav yanlış olmasına rağmen konuyla ilgili çalışmaların başlamasına sebep olmuştur. Morgen ve Scott (1975), $k \geq 5$ iken C^1 parçalı polinom fonksiyonları için bir taban hesaplaması yaptı. Schumaker (1979) iki değişkenli parçalı polinom fonksiyonların boyutu için bir alt sınır verdi. Alfeld ve Schumaker (1987) herhangi r için $k \geq 4r+1$ olmak üzere iki değişkenli spline uzayının boyutu için bir formül verdiler. Billera (1988) probleme homolojiksel bir yaklaşım geliştirerek iki boyutlu üçgensel Δ lar için $k \geq r \geq 0$ olmak üzere $C^r_k(\Delta)$ için bir altsınır verdi. Aynı zamanda $\mathbb{R}^2$ de üçgensel monifold üzerinde tanımlı C^1 spline uzayının jenerik boyutu için Strang'nın önsavının doğruluğunu ispatladı. Alfeld ve Schumaker (1990) herhangi bir r için $k = 3r+1$ olmak üzere iki boyutlu spline uzaylarının boyutu için bir formül verdiler. Daha sonra Geramite ve Schenck (1997), $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ simpleksel kompleks olmak üzere şişman noktaların idealleri ile parçalı polinom fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı vererek $n = 2$ için k yeterince büyük olma koşulu ile farklı süreklilik dereceleri (yani, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) altında boyut formülünü verdiler.

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

2.1 Modüller

Tanım 2.1 *R bir halka ve M bir toplamsal değişmeli grup olsun. Her $a,b \in M$ ve $r,s \in R$ için,*

1. $r(a+b) = ra + rb$
2. $(r+s)a = ra + sa$
3. $r(sa) = (rs)a$

olacak şekilde $R \times M \to M$, $(r,a) \mapsto ra$ tanımlı fonksiyon varsa M ye bir sol R-modül *denir. Ayrıca, R nin 1_R birim elemanı var ve her $a \in M$ için $a1_R = a$ ise M ye* birimsel sol R-modül *denir. Eğer yukarıdaki benzer özellikleri sağlayan $M \times R \to M$, $(a,r) \mapsto ar$ fonksiyonu varsa M ye bir* sağ R-modül *denir. M hem sağ hemde sol R-modül ise M ye* R-modül *denir.*

Örneğin, her toplamsal değişmeli G grubu, $n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in G$ için na işlemiyle birimsel $\mathbb{Z}$-modüldür. Ayrıca, M bir halka ve R, M nin bir althalkası ise $r \in R$, $a \in M$ için M deki ra çarpma işlemi ile M bir R-modüldür (ancak tersi doğru değildir). Özel olarak $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkası bir R-modüldür.

Tanım 2.2 *M ve N, bir R halkası üzerinde iki modül olsun. Eğer $f : M \to N$ fonksiyonu her $a,b \in M$ ve $r \in R$ için*

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ra) = rf(a)$$

koşullarını sağlarsa f ye R-modül homomorfizması *denir.*

Tanım 2.3 *M bir R halkası üzerinde modül ve N, M nin boşkümeden farklı bir altkümesi olsun. Eğer N, M nin toplamsal altgrubu ve her $r \in R$, $n \in N$ için $rb \in N$ ise N ye M* nin altmodülü *denir.*

Burada herhangi bir R halkası üzerindeki her altmodül bir R-modüldür. Birimsel modüllerin altmodülleri de birimsel modüldür. Ayrıca, $f : M \to N$ bir R-modül homomorfizması ise $\ker f$, M nin ve $\operatorname{im} f$, N nin altmodülüdür. I bir indis kümesi olmak üzere $\{N_i \mid i \in I\}$, M modülünün altmodüllerinin bir ailesi ise $\bigcap_{i \in I} N_i$, M R-modülünün altmodülüdür. Eğer M modülünün M ve 0 dan başka altmodülü yoksa M ye *basit modül* denir.

Tanım 2.4 *M bir R-modül ve X, M nin altkümesi olsun. Bu durumda, X kümesini kapsayan M nin altmodüllerinin arakesitine X* ile üretilen altmodül *denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.*

Eğer X sonlu ise X ile üretilen modüle *sonlu üretilmiş R-modül* veya *sonlu R-modül* denir. $X = \emptyset$ ise X ile üretilen modül sıfır modülüdür. $X = \{a\}$ tek elemandan oluşuyorsa X ile üretilen altmodüle *a ile üretilen devirli altmodül* denir.

Teorem 2.5 (Hungerford, 1974) *R birimli bir halka , M bir birimsel$R$-modül ve $X \subset M$ olsun. X ile üretilen altmodül*

$$RX = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i \mid s \in \mathbb{Z}^+,\ a_i \in X,\ r_i \in R \right\}$$

kümesiyle belirlidir. Eğer $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise X ile üretilen sonlu altmodül $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = Ra_1 + \cdots + Ra_n$ dir.

$X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için $a_i \notin \langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \rangle$ ise $\langle X \rangle$ kümesine *minimal üreteçli sonlu altmodül* denir.

Tanım 2.6 *M bir R-modül olsun. M nin altmodüllerinden oluşan*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

zincirinde her M_i/M_{i+1} *basit modül ise bu zincire* M *nin* komposizyon serisi *denir. Bu dizideki* r *ye de kompozisyon serisinin* uzunluğu *denir.*

Eğer M nin azalan zincirlerinin uzunluğu r ve M nin altmodüllerinin kesin azalan zinciri $M \supset N_1 \supset \cdots \supset N_s$ varsa $s \leq r$ dir. M nin komposisyon serisinin uzunluğuna M nin *uzunluğu* denir ve $\ell(M)$ olarak gösterilir. Eğer M nin kompozisyon serisi yoksa $\ell(M) = \infty$ olarak gösterilir. Sıfırdan farklı M modülünün bir kompozisyon serisine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin altmodüllerinin hem artan hem de azalan zincir kurallarını sağlaması gerekir (Hungerford, 1974, Sayfa 376, Teorem 1.11).

Tanım 2.7 *Modül homomorfizmaların* $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ *sonlu dizisi için her* $i = 1, 2, \ldots, n-2$ *olacak şekilde* $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$ *sağlanırsa bu diziye* sonlu tam dizi *denir. Ayrıca, modül homomorfizmaların* $\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ *sonsuz dizisi her* $i \in \mathbb{Z}$ *için* $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$ *koşullarını sağlarsa bu diziye de* sonsuz tam dizi *denir.*

Örneğin, ι ve p sırasıyla doğal injektif ve projektif (izdüşüm) modül homomorfizmaları olmak üzere herhangi iki M ve N modüllerinin $0 \to M \xrightarrow{\iota} M \oplus N \xrightarrow{p} N \to 0$ dizisi tam dizidir. Benzer şekilde, i ve π sırasıyla içerme ve doğal epimorfizma fonksiyonu olmak üzere L, K nın altmodülü ise $0 \to L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\pi} K/L \to 0$ dizisi tam dizidir. $f : M \to N$ modül homomorfizması ise $M/\ker f$ ye *coimage* ve $N/\operatorname{im} f$ ye *coker* denir ve sırasıyla $\operatorname{Coim} f$ ve $\operatorname{Coker} f$ ile gösterilir. Bu tanımlarla birlikte $0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coim} f \to 0$, $0 \to \operatorname{im} f \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} f \to 0$ ve $0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} f \to 0$ dizileri tam dizidir. M modülünün altmodüllerinden oluşan

$$0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to 0$$

bir tam dizi ve her bir M_i sonlu uzunluğa sahipse

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \ell(M_i) = 0$$

olarak bulunur (Matsumura, 1986, Sayfa 12).

Tanım 2.8 *M bir R-modül olsun.* F_i *lerin her biri R-modül olmak üzere*

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

tam dizisine M nin bir çözümlemesi *(*resolution*) denir. Eğer* $F_{\ell+1} = F_{\ell+2} = \cdots = 0$ *ve* $F_\ell \neq 0$ *olacak şekilde* ℓ *tamsayısı varsa bu çözümlemeye* ℓ uzunluğunda sonlu çözümleme *denir. Bu durumda, M nin çözümlemesi*

$$0 \to F_\ell \to F_{\ell-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0 \tag{2.1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer her i için $F_i \simeq R^{r_i}$ *serbest R-modüller ise M nin (2.1.1) deki çözümlemesine* ℓ uzunluğunda sonlu serbest çözümleme *denir.*

2.2 Gröbner Tabanlar

α_i ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $x_1, \ldots, x_n$ değişkenlerinin

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

çarpımına *monomial* denir. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ye x^α monomialinin *üstel vektörü* denir. x^α monomialinin *derecesi*, üstel vektörlerinin $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ toplamıdır.

k bir cisim olmak üzere k daki katsayılarla birlikte monomiallerin sonlu doğrusal kombinasyonlarına $x_1, \ldots, x_n$ *değişkenli polinom* denir. $x_1, \ldots, x_n$ değişkenli polinomlar her α için $c_\alpha \in k$ olmak üzere

$$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$

sonlu toplam şeklinde yazılır. k daki katsayılarla birlikte $x_1, \ldots, x_n$ değişkenli polinomların kümesi $k[x_1, \ldots, x_n]$ olarak tanımlanır. Polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma ile $k[x_1, \ldots, x_n]$, birimli ve değişmeli halkadır. Eğer f polinomundaki sıfırdan farklı katsayılı monomiallerin dereceleri aynıysa f ye *homojen polinom* denir.

Tanım 2.9 *Aşağıdaki koşulları sağlayan,* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *içindeki* x^α *monomiallerinin kümesi üzerindeki* $>$ *sıralama bağıntısına* $k[x_1, \ldots, x_n]$ üzerindeki monomial bağıntı *(*monomial order*) denir.*

a) *Monomiallerin oluşturduğu küme $>$ ile kısmi sıralı bir kümedir ve bu bağıntıyla her monomial karşılaştırılabilir;*

b) x^γ *bir monomial olmak üzere* $x^\alpha > x^\beta$ *ise* $x^\alpha x^\gamma = x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma} = x^\beta x^\gamma$*;*

c) $>$ *iyi sıralama bağıntısıdır yani, monomiallerin oluşturduğu boştan farklı her küme* $>$ *bağıntısıyla bir en küçük elemana sahiptir.*

$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, $k[x_1,\ldots,x_n]$ içinde herhangi bir polinom olsun. Bu tanımın (a) kısmından f nin içinde görünen terimleri $>$ monomial bağıntısına göre büyükten küçüğe göre sıralayıp, f polinomunu azalan olacak şekilde tek türlü yazabiliriz. Bu yazılışa göre x^α en büyük monomial olmak üzere $c_\alpha x^\alpha$ ya f polinomunun *başlangiç terimi* denir ve $\mathrm{LT}(f) = c_\alpha x^\alpha$ ile gösterilir.

Örneğin, $k[x]$ polinom halkasında üzerindeki monomial bağıntı,

$$\cdots > x^{n+1} > x^n > \cdots > x^2 > x > 1$$

şeklindedir. $k[x]$ için başka monomial bağıntı yoktur. Çok değişkenli polinom halkaları için bir çok monomial bağıntı vardır. $k[x_1,\ldots,x_n]$ içindeki x_i değişkenlerini

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

olarak belirleyelim. Bu seçimlerle birlikte aşağıda bazı önemli monomial bağıntılar tanıtılmıştır.

Tanım 2.10 x^α *ve* x^β*,* $k[x_1,\ldots,x_n]$ *içindeki monomialler olsun.*

1. ***(Lexicographic Monomial Bağıntı)*** $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ *nın sıfırdan farklı soldan ilk girdisi pozitif ise* $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ *dır.*

2. ***(Derecelenmiş Lexicographic Monomial Bağıntı)*** $x^\alpha >_{grlex} x^\beta$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ *veya* $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ *iken* $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ *dır.*

3. ***(Derecelenmiş Ters Lexicographic Monomial Bağıntı)*** *$x^\alpha >_{grevlex} x^\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ veya $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ iken $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ nın sıfırdan farlı sağdan ilk girdisi negatif olarak tanımlanır.*

Örneğin, $k[x,y,z]$ için $x^2yz^3 >_{lex} xy^3z^7$ dir. Çünkü, (2,1,3)-(1,3,7)=(1,-2,-4) üstel vektörünün soldan ilk girdisi pozitiftir. Ayrıca benzer işlemlerle, $x^3z^2 >_{grlex} x^3y$, $x^3z^2 >_{grlex} x^2y^3$, $x^3z^2 >_{grevlex} x^3y$ ve $x^3z^2 >_{grevlex} yz^4$ tür.

$\mathbf{k[x_1,\ldots,x_n]}$ de Bölme Algoritması: $>$, $k[x_1,\ldots,x_n]$ üzerinde herhangi sabit bir monomial bağıntı ve $(g_1,\ldots,g_s)$, $k[x_1,\ldots,x_n]$ içindeki polinomların sıralı s-bileşeni olsun. Bu durumda, her $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ polinomu

$$f = a_1g_1 + \cdots + a_sg_s + r,$$

olarak yazılır. Burada her i için $a_i, r \in k[x_1,\ldots,x_n]$ olacak şekilde $a_ig_i = 0$ veya $\mathrm{LT}(f) \geq \mathrm{LT}(a_ig_i)$ ve bununla beraber $r = 0$ veya r nin monomialleri $\mathrm{LT}(g_i)$ ler tarafından bölünmez. Bu durumda, *f nin $(g_1,\ldots,g_t)$ ile bölümünden kalan r dir* denir ve $r = 0$ ise $(g_1,\ldots,g_s)$, f polinomunu böler denir.

Tanım 2.11 *$>$, $k[x_1,\ldots,x_n]$ üzerinde sabit bir monomial bağıntı ve $I \subset k[x_1,\ldots,x_n]$ bir ideal olsun. $G = \{g_1,\ldots,g_t\} \subset I$ polinomların sonlu kümesi "sıfırdan farklı her $f \in I$ ve $i = 1,\ldots,t$ için $\mathrm{LT}(g_i) \mid \mathrm{LT}(f)$" özelliğini sağlarsa $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ ye I için bir* Gröbner taban *denir.*

Bu tanımdan $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$, I için bir Gröbner taban ise herhangi bir $f \in I$ için f nin G ile bölümünden kalanın sıfır olduğu görülür. Buradan, $I = \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ dir. Verilen bir $I \subset k[x_1,\ldots,x_n]$ idealinin bir Gröbner tabanını Buchberger Algoritması ile işlemler yaparak hesaplayabiliriz (Cox *et al.*, 2005). Ayrıca, CoCoA 4.7 yazılım programıyla pratik olarak hesaplamak mümkündür. Herhangi bir $>$ monomial bağıntıya göre herhangi bir $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ elemanının I ideali için bir Gröbner tabanıyla elde edilen $f = g + r$ bölme ifadesindeki r kalanı teklikle belirlidir (Cox *et al.*, 2005, Sayfa 15).

2.3 Derecelenmiş Modüller

Tanım 2.12 *R birimli, değişmeli bir halka olsun. Eğer R halkası $R = \bigoplus_{t\geq 0} R_s$ şeklinde direk toplamlarına ayrılabilir ve her $t, s \geq 0$ için $R_t R_s \subset R_{t+s}$ özelliğini sağlarsa R halkasına* derecelenmiş (graded) halka *denir. M bir R-modül olsun. M toplamsal grubunun $\{M_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ toplamsal altgruplarının bir ailesi olduğunu kabul edelim. M_t nin elemanlarına t* dereceden homejen elemanlar *denir. Eğer M, toplamsal grup olarak $M = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} M_t$ direk toplamlarına ayrılır ve her $s \geq 0$, her $t \in \mathbb{Z}$ için $R_s M_t \subset M_{s+t}$ özelliğini sağlarsa M ye* derecelenmiş (graded) R-modül *denir.*

$N \subset M$ olmak üzere N, homojen elemanlar tarafından üretilebiliyorsa N ye *homojen (veya derecelenmiş) altmodül* denir. Başka bir deyişle,

(1) $x \in N$ ise x in homojen terimlerinin her biri N nin içinde,

(2) $N = \sum_{t\in\mathbb{Z}} (N \cap M_t)$

koşulları sağlanıyorsa N ye homojen modül denir.

$R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ bir Noetherian derecelenmiş halka olsun. Eğer $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ sonlu üreteçli bir derecelenmiş R-modül ise her bir M_n sonlu üreteçli bir R_0 modüldür. Genel olarak, M yi homejen elemanların sonlu tanesi w_i ile üretebiliriz. Başka bir deyişle, $M = Rw_1 + \cdots + Rw_s$ dir. w_i lerin derecelerini e_i kabul edersek

$$M_n = R_{n-e_1} w_1 + \cdots + R_{n-e_n} w_s$$

yazılır ve buradan M_n, sonlu bir R_0-modül olduğu da gözlenir. Burda, $i < 0$ için $R_i = 0$ kabul edeceğiz. Özel olarak eğer R_0 Artinian halka ise ℓ, bir R_0-modülünün uzunluğu olmak üzere $\ell(M_n) < \infty$ olur. Bu durumda, M nin *Hilbert serisi* $H(M,t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[|t|].$$

Burada, $\ell(M_n)$ ye *M nin Hilbert fonksiyonu* denir. Ayrıca, $H(M,n)$ ile de gösterilir.

Teorem 2.13 *$R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ Noetherian derecelenmiş halka, R_0 Artinian halka ve M sonlu üreteçli derecelenmiş R-modül olsun. Dereceleri d_i olan x_i için $R = R_0[x_1,\ldots,x_r]$ ve $H(M,t)$ yukarıdaki gibi tanımlı olsun. Bu durumda, $H(M,t)$, t nin bir rasyonel fonksiyonu olur ve $f(t)$ katsayıları $\mathbb{Z}$ de olan polinom olmak üzere*

$$H(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{d_i})}$$

olarak yazılabilir.

İspat. (Matsumura, 1986, Bölüm 5, Teorem 13.2). □

Özellikle, $R = R_0[x_0,x_1,\ldots,x_r]$ polinom halkasında n dereceli monomiallerin sayısının $\binom{n+r}{r}$ olduğu tümevarım ile gösterilir. $R_n = x_0R_{n-1} + x_1R_{n-1} + \cdots + x_nR_{n-1}$ olduğundan $\ell(R_n) = \ell(R_0)\binom{n+r}{r}$ olduğu görülür.

R^m serbest R-modülleri aynı zamanda $(R^m)_t = (R_t)^m$ özelliğinden dolayı derecelenmiş R-modüldür. Burada R^m üzerindeki standart derecelenmiş modül yapısını inceleyeceğiz.

Önerme 2.14 *$M \subset R^m$ bir altmodül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

1. *M nin R^m nin derecelenmiş altmodülü olabilmesi için $M_t = (R_t)^m \cap M$ olması gerekir. Başka bir deyişle, M_t, her bir bileşeni t (veya 0) dereceden homojen polinom olmak üzere M nin elemanlarının bir kümesinden oluşmalıdır.*

2. *Her bir f_i, aynı d_i dereceye sahip homojen polinomlar vektörü olmak üzere $M = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle \subset R^m$ şeklindedir.*

İspat. (Cox *et al.*, 2005, Bölüm 6, Önerme 3.3.) □

Örnek 2.15 *$M_1,\ldots,M_m$ derecelenmiş modüller ve $N = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ direk toplamı verilsin. $N_t = (M_1)_t \oplus \cdots \oplus (M_m)_t$ olsun. N_t, N üzerinde bir derecelenmiş modüldür. Ayrıca, M bir derecelenmiş modül ve N, M nin derecelenmiş alt modülü ise M/N bölüm modülü, $(M/N)_t = M_t/N_t = M_t/(M_t \cap N)$ toplamsal altgrupların ailesi ile tanımlı bir derecelenmiş modül yapısına sahiptir.*

Önerme 2.16 *M bir derecelenmiş R-modül, d bir tamsayı ve $M(d) := \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} M(d)_t,\ M(d)_t = M_{d+t}$ olsun. Bu durumda, $M(d)$ derecelenmiş R-modüldür.*

İspat. (Cox *et al.*, 2005, Bölüm 6, Önerme 3.4.) □

Örneğin, $R^m(d) = R(d)^m$ modüllerine R üzerinde *kaymış (shifted veya twisted)* derecelenmiş serbest modül denir. R^m nin e_i standart taban vektörleri $R(d)^m$ için de bir modül tabanlarıdır. Fakat bu vektörler $R(-d)_d = R_0$ olduğundan derecelenmiş modül içinde $-d$ dereceden homejen elemanlardır . Daha da genellersek Örnek 2.15 de herhangi $d_1,\ldots,d_m$ tamsayıları için $R(d_1)\oplus\cdots\oplus R(d_m)$ şeklindeki derecelenmiş serbest modül üzerinde e_i taban vektörleri $-d_i$ dereceden homojenlerdir.

Tanım 2.17 *M,N derecelenmiş R-modül ve $\varphi : M \to N$ modül homomorfizması olsun. Eğer her $t\in\mathbb{Z}$ için $\varphi(M_t)\subset N_{t+d}$ koşulu sağlanırsa φ ye derecesi d olan* derecelenmiş homomorfizma *denir.*

Örneğin, sırasıyla $d_1,\ldots,d_m$ dereceden $f_1,\ldots,f_m$ homojen elemanlar olmak üzere $M = \langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ derecelenmiş R-modülünü alalım.

$$\varphi : R(-d_1)\oplus\cdots\oplus R(-d_m) \to M, \quad e_i \mapsto f_i$$

derecelenmiş homomorfizmadır ve örtendir. Ayrıca, e_i ler d_i dereceden olduğundan φ nin derecesi sıfırdır.

Derecelenmiş homomorfizmaya diğer bir örnek verelim. Girdileri R halkasından alınan, d dereceli homojen polinomlardan oluşan $m\times p$ tipindeki bir A matrisi verilsin.

$$\varphi : R^p \to R^m, \quad f \mapsto Af$$

şeklinde tanımlı derecesi d olan derecelenmiş homomorfizmadır. Eğer φ yi $R(-d)^p$ shifted modülden R^m ye tanımlarsak φ nin derecesi sıfır olur. Benzer şekilde A matrisinin j. sütununun girdilerini, derecesi d_j olan homojen polinomlar olarak alır ve sütunlar değiştikçe bu dereceleri değiştirirsek

$$R(-d_1)\oplus\cdots\oplus R(-d_p) \to R^m$$

dercesi sıfır olan derecelenmiş homomorfizma elde ederiz. Derecesi sıfır olan derecelenmiş homomorfizmayı biraz daha genelleştirirsek,

$$R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p) \to R(-c_1) \oplus \cdots \oplus R(-c_m)$$

$a_{ij} \in R$ girdilerinin derecesi $d_j - c_i$ olan $m \times p$ tipindeki bir A matrisi ile tanımlıdır.

Derecelenmiş matrisleri detaylı incelememizin sebebi, R üzerindeki derecelenmiş modüllerin çözümlemelerinin bu matrislerle tanımlanmasıdır. Örneğin, $R = k[x,y,z,w]$ içindeki $M = \langle z^3 - yw^2,\ yz - xw,\ y^3 - x^2z,\ xz^2 - y^2w \rangle$ homejen modülün çözümlemesini bulalım.

$$R(-3) \oplus R(-2) \oplus R(-3)^2 \to M$$

sıfır dereceden derecelenmiş homomorfizmanın görüntüsüdür. Burada shiftler üreteçlerin dereceleridir. Bu dönüşümün çekirdeği bize M nin *1. syzygy modülünü* tanımlar. CoCoA 4.7 programını kullanarak

```
Use R::=Q[x,y,z,w];
M:=Ideal(z^3-yw^2,yz-xw,y^3-x^2z,xz^2-y^2w);
Syz(Ideal(M),1);
```

komutları ile 1. syzygy modülü

```
Module([z^2,w,0,-y],[yw,z,0,-x],[xz,-y,-w,0],[y^2,-x,-z,0]).
```

Burada modül içindeki vektörler M nin 1. syzygy modülünün üreteçlerini verir. M nin 1. syzygy modülünün üreteçlerini sütun olarak alırsak

$$A = \begin{pmatrix} z^2 & yw & xz & y^2 \\ w & z & -y & -x \\ 0 & 0 & -w & -z \\ -y & -x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Bu matris derecesi sıfır olan aşağıdaki homomorfizmayı tanımlar:

$$R(-4)^4 \xrightarrow{A} R(-2) \oplus R(-3)^3.$$

Benzer şekilde CoCoA 4.7 programını kullanarak

```
Use R::=Q[x,y,z,w];
M:=Ideal(z^3-yw^2,yz-xw,y^3-x^2z,xz^2-y^2w);
Syz(Ideal(M),2);
```

komutları ile M nin 2. syzygy modülünü hesaplarınır:

```
Module([x, -y, -z, w]).
```

M nin 2. syzygy modülünün üreteçlerini sütun olarak alırsak B matrisini elde ederiz. Bu matris derecesi sıfır olan

$$R(-5) \xrightarrow{B} R(-4)^4$$

homomorfizmayı tanımlar. Aynı şekilde, 3. syzygy modülünü hesapladığımızda 0 modülünü buluruz. Böylece, M nin çözümlemesini

$$0 \to R(-5) \xrightarrow{B} R(-4)^4 \xrightarrow{A} R(-2) \oplus R(-3)^3 \to M \to 0 \tag{2.3.2}$$

olarak buluruz. Burada okların her biri derecesi sıfır olan derecelenmiş homomorfizmayı gösterir. Derecelenmiş çözümlemenin tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.18 *M bir derecelenmiş R-modül ise M* nin bir derecelenmiş çözümlemesi,

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0$$

şeklinde bir çözümlemedir. Burada her bir F_ℓ bir $R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p)$ şeklindeki kaymış serbest modüldür ve her bir φ_ℓ homomorfizması derecesi sıfır olan derecelenmiş homomorfizmadır. (φ_ℓ ler yukarıdaki gibi tanımlıdır)

Örneğin, (2.3.2) deki çözümlemenin derecelenmiş çözümleme olduğu görülür.

Teorem 2.19 *(Graded Hilbert Syzygy Teorem) $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Bu durumda, her sonlu üreteçli derecelenmiş R-modül, uzunluğu en fazla n olan bir derecelenmiş çözümlemeye sahiptir.*

İspat. (Cox *et al.*, 2005, Bölüm 6, Teorem 3.8.) □

2.4 Simpleksel Homoloji

Tanım 2.20 *V, $\mathbb{R}$-vektör uzayı ve $C \subset V$ olsun. Eğer her $t \in I = [0,1]$ için*

$$c_1, c_2 \in C \Rightarrow tc_1 + (1-t)c_2 \in C$$

sağlanırsa C ye konveks *küme denir.*

Tanım 2.21 *$\{v_0, \ldots, v_k\}$, V vektör uzayının vektörlerinden oluşan bir küme olsun. Eğer $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ doğrusal bağımsız bir küme ise $\{v_0, \ldots, v_k\}$ ya* konveks-bağımsız *küme denir.*

Teorem 2.22 *$\{v_0, \ldots, v_k\}$ konveks-bağımsız küme olsun. C, $\{v_0, \ldots, v_k\}$ kümesi tarafından üretilen konveks küme yani, $\{v_0, \ldots, v_k\}$ kümesini kapsayan en küçük konveks küme olsun. Bu durumda,*

$$C = \{\sum_{i=0}^{k} a_i v_i \mid a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1\}$$

şeklindedir ve her bir $v \in C$ bu şekilde teklikle belirlenir.

İspat. (Singer ve Thorpe, 1967, Sayfa 79, Teorem 1.) □

Tanım 2.23 *V, $\mathbb{R}$-vektör uzayı olsun. $\{v_0, \ldots, v_k\}$ konveks-bağımsız kümesine* kapalı k-simpleks *denir ve $[v_0, \ldots, v_k]$ ile gösterilir. Bu* simpleksin boyutu k dır *denir. Burada $v_0, \ldots, v_k$ ya k-simpleksinin* köşe noktaları (verteks) *denir.*

Örneğin, $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerinde $\{v_0, v_1\}$ vektörleri için $[v_0, v_1]$ simpleksi, $[v_0, v_1]$ kapalı aralığıdır. $\{v_0, v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ için $[v_0, v_1, v_2]$ simpleksi, köşeleri v_0, v_1, v_2 noktalarından oluşan üçgeni belirtir.

Tanım 2.24 *$\{v_0, \ldots, v_k\}$ konveks- bağımsız küme olsun.*

$$[v \in [v_0, \ldots, v_k] \mid a_i(v) > 0, i = 1, \ldots, k]$$

kümesine açık simpleks *denir ve* $(v_0,\ldots,v_k)$ *ile gösterilir. Bundan sonra açık simpleksi* (s) *ve kapalı simpleksi* $[s]$ *ile göstereceğiz.*

Tanım 2.25 *Aşağıdaki koşulları sağlayan,* $\mathbb{R}^n$ *içindeki açık simplekslerden oluşan, sonlu* K *kümesine* simpleksel kompleks *denir.*

- $(s)\in K$ *ise* $[s]$ *nin her açık yüzeyi* K *nın içindedir.*
- $(s_1),(s_2)\in K$ *ve* $(s_1)\cap(s_2)\neq\emptyset$ *ise* $(s_1)=(s_2)$ *dir.*

K *nın boyutu,* K *içindeki simplekslerin en büyük boyutu ile tanımlıdır.*

Tanım 2.26 *s, köşe noktaları* $v_0,\ldots,v_\ell$ *olan bir* ℓ*-simpleks olsun. s nin köşe noktaları* $(v_{j_1},\ldots,v_{j_\ell})$ *ve* $(v_{k_1},\ldots,v_{k_\ell})$ *iki sıralanışı denk olması için gerek yeter şart* $(k_1\ldots k_\ell)$, $(j_1\ldots j_\ell)$ *nin bir çift permitasyonu olmasıdır. Bunun bir denklik bağıntısı olduğu açıktır ve* $\ell>1$ *için* $v_0,\ldots v_\ell$ *nin sıralanışı kendi içinde iki denklik sınıfına ayrılır. Bir s simpleksi ile birlikte bu denklik sınıflarından birini seçtiğimizde yönlendirilmiş simpleksi tanımlarız. Eğer s nin köşe noktaları* $v_0,\ldots,v_\ell$ *ise* $(v_1,\ldots,v_\ell)$ *sıralamasıyla belirli yönlendirilmiş simpleks* $\langle v_1,\ldots,v_\ell\rangle$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.27 *K bir simpleksel kompleks ve G toplamsal değişmeli bir grup olsun.* $C_\ell(K,G)$*, K nın bütün yönlendirilmiş simpleksleri ile üretilen serbest değişmeli grubun modülo* $\langle v_0,v_1,v_2,\ldots,v_\ell\rangle+\langle v_1,v_0,v_2,\ldots,v_\ell\rangle$ *şeklindeki elemanlar ile üretilen altgruba göre bölüm grubu olarak tanımlansın. Burada* $C_\ell(K,G)$ *değişmeli grubuna katsayılarıyla G de alınan K nın* ℓ*-zincirlerinin grubu denir. Bu grubun elemanları*

$$\sum_{s\ bir\ \ell-simpleks} g_s\langle s\rangle\ ,\ (g_s\in G)$$

şeklindedir. Burada s nin her bir ℓ*-simpleksi için* $\langle s\rangle$*, s nin sabit yönlendirilmiş simpleksi ve s nin zıt yönlendirilmiş simpleksi* $-\langle s\rangle$ *ile belirlenmiştir.*

Tanım 2.28 *$\langle s\rangle = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{\ell+1}\rangle$ yönlendirilmiş $(\ell+1)$-simpleks olsun. $\langle s\rangle$ nin $\partial\langle s\rangle$ sınır fonksiyonu*

$$\partial\langle s\rangle = \sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^j\langle v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle$$

şeklinde tanımlanan bir ℓ-zincirdir. Burada ˆ sembolü, yazılmayan köşe noktası anlamına gelir.

Tanım 2.29 *K bir simpleksel kompleks ve G bir toplamsal değişmeli grup olsun.*

$$C_{\ell+1}(K,G) \overset{\partial_{\ell+1}}{\to} C_\ell(K,G), \qquad \partial_{\ell+1}\left(\sum g_s\langle s\rangle\right) = \sum g_s\partial\langle s\rangle$$

bir grup homomorfizmasıdır. Bu homomorfizmaya sınır dönüşümü *denir.*

Önerme 2.30

$$C_{\ell+1}(K,G) \overset{\partial_{\ell+1}}{\to} C_\ell(K,G) \overset{\partial_\ell}{\to} C_{\ell-1}(K,G)$$

dönüşümleri $\partial_\ell \circ \partial_{\ell+1} = 0$ özelliğini sağlar.

İspat. $\partial_\ell \circ \partial_{\ell+1}$ doğrusal olduğundan $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{\ell+1}\rangle$ yönlendirilmiş simpleksler üzerinde bu özelliği kontrol etmek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\partial_\ell(\partial_{\ell+1}\langle v_0, v_1, \ldots, v_{\ell+1}\rangle) &= \partial_\ell\left(\sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^j\langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^j\partial_\ell\langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^j\left[\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\langle v_0, \ldots, \hat{v}i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=j+1}^{\ell+1}(-1)^{i-1}\langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{\ell+1}\rangle\right] \\
&= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle \\
&\qquad + \sum_{i>j}(-1)^{i+j-1}\langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{\ell+1}\rangle \\
&= \sum_{i<j}\left[(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}\right]\langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{\ell+1}\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Δ bir n-simpleksel kompleks ve $R=\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ olsun. Bu durumda, yukarıda tanımlanan dönüşümlerle

$$\mathscr{C}:0\to C_n(\Delta,R)\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}(\Delta,R)\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\to C_\ell(\Delta,R)\xrightarrow{\partial_\ell}C_{\ell-1}(\Delta,R)\to\cdots\to C_0(\Delta,R)\to 0$$

bir kompleks zincirdir. $Q\subset\Delta$ dış yüzeyleri belirleyen simpleksel kompleks olmak üzere ∂_i sınır dönüşümünü $C_i(Q,R)$ ya kısıtladığımızda

$$\mathscr{Q}:0\to C_n(Q,R)\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}(Q,R)\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\to C_\ell(Q,R)\xrightarrow{\partial_\ell}C_{\ell-1}(Q,R)\to\cdots\to C_0(Q,R)\to 0$$

kompleks zincirini elde ederiz. Δ nın n-boyutlu simplekslerini iç simpleks olarak kabul ettiğimizden $C_n(Q,R)=0$ dır.

$$0\to\mathscr{Q}\to\mathscr{C}\to\mathscr{C}/\mathscr{Q}\to 0$$

bir tam dizi olması için gerek yeter şart her ℓ için

$$0\to\mathscr{Q}_\ell\to\mathscr{C}_\ell\to(\mathscr{C}/\mathscr{Q})_\ell\to 0$$

bir tam dizi olmasıdır. $R:=\mathscr{C}/\mathscr{Q}$ olsun. Başka bir deyişle, $R_\ell=(\mathscr{C}/\mathscr{Q})_\ell=\mathscr{C}_\ell/\mathscr{Q}_\ell=C_\ell(\Delta,R)/C_\ell(Q,R)$ dir. Buradan, $R_\ell=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\ell^o}R$ eşitliği görülür.

$$\mathscr{R}:0\to\bigoplus_{\alpha\in\Delta_n^o}R\xrightarrow{\overline{\partial_n}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial_{\ell+1}}}\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\ell^o}R\xrightarrow{\overline{\partial_\ell}}\bigoplus_{\alpha\in\Delta_{\ell-1}^o}R\xrightarrow{\overline{\partial_{\ell-1}}}\cdots\xrightarrow{\overline{\partial_1}}\bigoplus_{\alpha\in\Delta_0^o}R\to 0$$

$\overline{\partial_\ell}(\langle v_0,\ldots,v_\ell\rangle+\mathscr{Q}_\ell)=\partial_\ell\langle v_0,\ldots,v_\ell\rangle+\mathscr{Q}_{\ell-1}$ dönüşümleri ile tanımlı dizi,

$$\begin{aligned}\overline{\partial_{\ell-1}}\circ\overline{\partial_\ell}(\langle v_0,\ldots,v_\ell\rangle+\mathscr{Q}_\ell)=&\overline{\partial_{\ell-1}}(\partial_\ell\langle v_0,\ldots,v_\ell\rangle+\mathscr{Q}_{\ell-1})\\=&\partial_{\ell-1}(\partial_\ell\langle v_0,\ldots,v_\ell\rangle)+\mathscr{Q}_{\ell-2}\\=&\mathscr{Q}_{\ell-2}\end{aligned}$$

olduğundan bir kompleks dizidir. Bundan sonra, alt simpleksler ve bölüm simplekslerini oluştururken kullandığımız sınır dönüşümlerini, karışıklığı önlemek açısından ∂_i ile göstereceğiz. K kompleks zincir olmak üzere $H_\ell(K)=\ker\partial_\ell/\operatorname{im}\partial_{\ell+1}$ ya *ℓ-homoloji modül* denir.

3. PARÇALI POLİNOM FONKSİYONLARI

3.1 Bir Değişkenli Parçalı Polinom Fonksiyonları

Bu bölümde parçalı polinom fonksiyonlarının C^r fonksiyonu olma koşulları ile ilgileneceğiz. Daha sonra da bu tür fonksiyonların boyutları hakkında bilgi edinmeye çalışacağız.

Gerçel sayı doğrusu üzerindeki $[a,b]$ kapalı aralığını, $c \neq a,b$ bir sayı olmak üzere, iki altaralığın birleşimi $[a,c] \cup [c,b]$ şeklinde yazalım. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı polinomlar olmak üzere altaralıklara parçalanmış aralık üzerinde *parçalı polinom fonksiyonu* $f(x)$ (veya *spline*) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a,c] \\ f_2(x), & x \in [c,b] \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Altaralıklar üzerinde tanımlı f_1, f_2 polinomları $f_1 = f_2$ olacak şekilde seçildiğinde *aşikar spline* fonksiyonlarını elde ederiz. Bu tür fonksiyonlar her durumda sürekli olduğundan fazla dikkat çekici değildirler.

(3.1.1) deki fonksiyonun sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart $f_1(c) = f_2(c)$ olmalıdır. f_1 ve f_2 polinomları C^∞ fonksiyonu ve türevleri de polinom olduğundan herhangi bir $k \geq 0$ için

$$\begin{cases} f_1^{(k)}(x), & x \in [a,c] \\ f_2^{(k)}(x), & x \in [c,b] \end{cases} \tag{3.1.2}$$

parçalı polinom fonksiyonunu düşünebiliriz. Burdan, $[a,b]$ aralığında f nin C^r fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $0 \leq k \leq r$ sağlayan her bir k için (3.1.2) parçalı polinom fonksiyonlarının sürekli olmasıdır (veya $f_1^{(k)}(c) = f_2^{(k)}(c)$). Bu sonucu cebirsel olarakta ifade edebiliriz:

Önerme 3.1 *(3.1.1) deki f parçalı polinom fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir C^r fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart $f_1 - f_2$ polinomunun $(x-c)^{r+1}$ tarafından bölünebilir olmasıdır (yani, $\mathbb{R}[x]$ de, $f_1 - f_2 \in \langle (x-c)^{r+1} \rangle$).*

İspat. $f \in C^r$ olsun. $(f_1 - f_2) = (x-c)^{r+1}h(x)$ Şeklinde yazılabileceğini r üzerinden tümevarım yaparak ispatlayalım. $r = 0$ için $f_1(c) = f_2(c)$ olduğundan $(f_1 - f_2)(x) = (x-c)p_1(x)$ olacak şekilde $p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ vardır. $f \in C^{r-1}$ için $(f_1 - f_2)(x) = (x-c)^r p_r(x)$ olacak şekilde $p_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ olduğunu kabul edelim. Burada her iki tarafın r kez türevini aldığımızda $(f_1 - f_2)^{(r)}(x) = r!p_n(x) + \cdots + (x-c)p_n^{(1)}(x) + \cdots + (x-c)^2 p_n^{(2)}(x) + \cdots + (x-c)^r p_n^{(r)}(x)$ eşitliğine ulaşırız. $(f_1 - f_2)^{(r)}(c) = 0$ ifadesi $p_n(c) = 0$ verir. Böylece isteneni elde etmiş oluruz.

Tersine, $(x-c)^{r+1} \mid (f_1 - f_2)$ olsun. Bu durumda, $(f_1 - f_2)(x) = (x-c)^{r+1}q(x)$ olacak şekilde $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ vardır. Bu ifadenin r kez türevini aldığımızda $(f_1 - f_2)^{(r)}(x) = (r+1)!(x-c)q(x) + \cdots + (x-c)^{r+1}q^{(r)}(x)$ eşitliği elde edilir. Her bir terim $(x-c)$ çarpanını içerdiğinden dolayı $(f_1 - f_2)^{(r)}(c) = 0$ olur. Böylece, $f \in C^r$ dir. □

Şimdi iki altaralığa parçalanmış aralık $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ üzerindeki parçalı polinom fonksiyonlarının boyutlarını hesaplayacağız. Daha sonra, genel olarak, sonlu sayıda altaralıklara parçalanmış aralık üzerinde spline foksiyonlarının boyutlarını inceleyeceğiz. (3.1.1) deki parçalı polinom fonksiyonunu $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2$ sıralı iklisi olarak temsil edelim. Önerme 3.1 den C^r polinom fonksiyonları bilinen toplama ve sabit ile çarpma işlemi altında $\mathbb{R}[x]^2$ nin bir altvektör uzayıdır.

k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere f polinom fonksiyonunun her bir bileşeninin derecesini k ya kısıtlarsak $(1,0),(x,0),(x^2,0),\ldots,(x^k,0),(0,1),(0,x),(0,x^2),\ldots,(0,x^k)$ tarafından üretilen $\mathbb{R}[x]^2$ nin sonlu boyutlu altvektör uzayı V_k yı elde ederiz. V_k içindeki C^r polinom fonksiyonlarının kümesi $V_k^r \subset V_k$ bir altvektör uzayıdır. Şimdi V_k^r hakkında bilgi sahibi olmaya çalışalım.

İlk olarak, V_k daki parçalı polinom fonksiyonlarını (f,f) ve $(0,g)$ fonksiyonlarının toplamı şeklinde tek türlü yazılabileceğini gözlemleyelim:

$$(f_1, f_2) = (f_1, f_1) + (0, f_2 - f_1).$$

Eşitliğin sağ tarafındaki her iki terimde V_k nın içindedir. Her $r \geq 0$ için (f,f) aşikar spline foksiyonları C^r fonksiyonlar olduğundan V_k^r nin içine düşer. Ayrıca, Önerme 3.1 den

(0,g) şeklindeki parçalı polinom fonksiyonlarının C^r de tanımlı olması için gerek ve yeter şart $(x-c)^{r+1} \mid g$ dir. O zaman, $r+1 \leq k$ olur. Bu eşitsizlikten $(0,(x-c)^{r+1}),(0,(x-c)^{r+2}),\ldots,(0,(x-c)^k)$ nın herhangi bir doğrusal birleşimi V_k^r nin bir elemanıdır. Bu $k-r$ tane parçalı polinom fonksiyonları ile birlikte $(1,1),(x,x),\ldots,(x^k,x^k)$ fonksiyonları V_k^r nin bir tabanını verir. Bu gözlemler V_k^r nin boyutu ve k dereceye kısıtlanmış aşikar olmayan spline fonksiyonlarında r yi en fazla kaç seçebileceğimiz hakkında da bilgi sahibi olmamızı sağlar. Sonuç olarak:

Önerme 3.2 $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ *aralığında tanımlı bir değişkenli parçalı polinom fonksiyonları için* V_k^r *uzayının boyutu:*

$$\dim(V_k^r) = \begin{cases} k+1, & r+1 > k \\ 2k-r+1, & r+1 \leq k \end{cases} \tag{3.1.3}$$

dir.

□

Yukarıdaki Önerme 3.2 den, V_k^r uzayınının aşikar olmayan parçalı polinom fonksiyonları içerebilmesi için gerek ve yeter şart $r+1 \leq k$ olmasıdır. Örneğin, $f_1 \neq f_2$ olduğunda C^1 kuadratik parçalı polinom fonksiyonları vardır. Fakat aşikar spline fonksiyonları dışında C^2 kuadratik parçalı polinom fonksiyonları yoktur. Benzer şekilde $f_1 \neq f_2$ olduğu durumda C^2 kübik parçalı polinom fonksiyonları vardır. Fakat C^3 aşikar olmayan kübik parçalı polinom fonksiyonları yoktur.

Örnek 3.3 C^2 kübik spline fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayının (veya V_3^2) boyutu Önerme 3.2 den 5 olarak bulunur. C^2 kübik parçalı polinom fonksiyonlarının $x = a,c,b$ farklı değerlerinde $f(a) = A,\ f(c) = C,\ f(b) = B$ olduğunda V_3^2 altuzayının boyutu 2 olur.

İspat. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının c noktasında Taylor serileri

$$f_1(x) = f_1(c) + f_1^{(1)}(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f_1^{(2)}(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f_1^{(3)}(c)(x-c)^3,$$
$$f_2(x) = f_2(c) + f_2^{(1)}(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f_2^{(2)}(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f_2^{(3)}(c)(x-c)^3$$

dir. Bu foksiyonlar,

$$f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-c) + \alpha_2(x-c)^2 + \alpha_3(x-c)^3,$$
$$f_2(x) = \beta_0 + \beta_1(x-c) + \beta_2(x-c)^2 + \beta_3(x-c)^3$$

şeklinde de yazılabilir. $f = (f_1, f_2) \in V_3^2$ olduğundan $f_1(c) = f_2(c)$, $f_1^{(1)}(c) = f_2^{(1)}(c)$, $f_1^{(2)}(c) = f_2^{(2)}(c)$ olur ve buradan $i = 0,1,2$ için $\alpha_i = \beta_i$ bulunur. $x = a,b,c$ noktaları yerine konulduğunda

$$f_1(a) = \alpha_0 + \alpha_1(a-c) + \alpha_2(a-c)^2 + \alpha_3(a-c)^3$$
$$f_2(b) = \alpha_0 + \alpha_1(b-c) + \alpha_2(b-c)^2 + \beta_3(b-c)^3$$
$$f_1(c) = f_2(c) = \alpha_0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi matris şeklinde yazarsak:

$$\begin{pmatrix} 1 & (a-c) & (a-c)^2 & (a-c)^3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (b-c) & (b-c)^2 & 0 & (b-c)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(c) \\ f_2(b) \end{pmatrix}$$

olur. $AX = Y$ denklem sisteminde A matrisini indirgediğimizde $a-c \neq 0$ olduğundan bu matrisin rankı 3, altuzayın boyutu da 2 dir. □

Yukarıdaki sonuçların hepsi herhangi sonlu sayıda altaralıklara parçalanmış aralık üzerinde tanımlı bir değişkenli parçalı polinom fonksiyonları için aşağıda görüldüğü gibi kolayca genişletilebilir.

Önerme 3.4 *$[a,b]$ kapalı aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ olacak şekilde m tane altaralığa ayıralım.*

(1) $(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}[x]^m$, m bileşenli polinom olsun. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f fonksiyonunu $1 \le i \le m-1$ olacak şekilde her i için $f_{|_{[x_{i-1},x_i]}} = f_i$ olarak tanımlayalım. f fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde C^r fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $f_{i+1} - f_i \in \langle (x-x_i)^{r+1} \rangle$ olmasıdır.

(2) Her i için der $f_i \leq k$ *olan C^r spline fonksiyonların oluşturduğu uzayın boyutu:*

$$\dim(V_k^r) = \begin{cases} k+1, & r+1 > k \\ m(k-r)+r+1, & r+1 \leq k \end{cases} \tag{3.1.4}$$

olur.

İspat. (1) ispatlayalım. $f \in C^r$ olsun. $(f_i - f_{i+1}) = (x-x_i)^{r+1}h(x)$ yazılabileceğini r üzerinden tümevarım yaparak ispatlayalım. $r = 0$ için $f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$ olduğundan $(f_i - f_{i+1})(x) = (x-x_i)p_1(x)$ olacak şekilde $p_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ vardır. $f \in C^{r-1}$ için $(f_i - f_{i+1})(x) = (x-x_i)^r p_r(x)$ olacak şekilde $p_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ olduğunu kabul edelim. Burada her iki tarafın r kez türevini aldığımızda $(f_i - f_{i+1})^{(r)}(x) = a_0 p_r(x) + a_1(x-x_i)p_r^{(1)}(x) + a_2(x-x_i)^2 p_r^{(2)}(x) + \cdots + a_n(x-x_i)^n p_r^{(n)}(x) + \cdots + (x-x_i)^r p_r^{(r)}(x)$; $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 = r!$ ve $a_r = 1$ eşitliğine ulaşırız. $f \in C^r$ olduğundan $(f_i - f_{i+1})^r(x_i) = 0$ dır. Öyleyse, $(x-x_i) \mid p_r(x)$ dir. Böylece isteneni elde etmiş oluruz.

Tersine, $(x-x_i)^{r+1} \mid (f_i - f_{i+1})$ olsun. Bu durumda, $(f_i - f_{i+1})(x) = (x-x_i)^{r+1}q(x)$ olacak şekilde $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ vardır. Bu ifadenin r kez türevi alındığında $(f_i - f_{i+1})^{(r)}(x) = (r+1)!(x-x_i)q(x) + \cdots + (x-x_i)^{r+1}q^{(r)}(x)$ eşitliği elde edilir. Her bir terim $(x-x_i)$ çarpanı içerdiğinden dolayı $(f_i - f_{i+1})^{(r)}(x_i) = 0$ olur. Böylece, $f \in C^r$ dir.

(2) için ispatı yapalım. V_k daki parçalı polinom fonksiyonlarını $(f_1, f_2, \ldots, f_m) = (f_1, f_1, \ldots, f_1) + (0, f_2 - f_1, 0, \ldots, 0) + (0, 0, f_3 - f_1, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, f_m - f_1)$ olarak tek türlü toplamlarına ayrıştırabiliriz. Sağ taraftaki her bir terim V_k nın içindedir. $(f, f, f, \ldots, f)$ şeklindeki parçalı polinom fonksiyonları her $r \geq 0$ için C^r nin içindedir. (1) den dolayı (0,g,0,…,0) şeklindeki parçalı polinom fonksiyonlarının C^r de tanımlı olması için gerek ve yeter şart $1 \leq i \leq m-1$ olacak şekilde her bir i için $(x-x_i)^{r+1}$ nin g yi bölmesidir. Burdan, $r+1 \leq k$ dır. Böylece, $(0, (x-x_i)^{r+1}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, (x-x_i)^k, 0, \ldots, 0)$ elemanları ile $(0, g, 0, \ldots, 0)$ şeklindeki fonksiyonları üretebiliriz. Benzer işlemler $(0, 0, f_3 - f_1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, f_m - f_1)$ şeklindeki fonksiyonları için yapıldığında $(m-1)(k-r)$ tane taban elemanı bulunur. Aşikar spline fonksiyonları da dikkate aldığımızda, $(1, 1, \ldots, 1), (x, x, \ldots, x), \ldots, (x^k, x^k, \ldots, x^k)$, toplam taban elemanlarımızın sayısı $m(k-r)+r+1$ dir. $\square$

Örnek 3.5 *Belirli x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) noktalarında değer alan 2 boyutlu C^2 kübik spline fonksiyonlarının uzayı vardır.*

İspat. Örnek 3.3 de olduğu gibi aralık genişletilerek yapılabilir. □

3.2 İki Değişkenli Parçalı Polinom Fonksiyonları

Bu bölümde ilk olarak çok değişkenli parçalı polinom fonksiyonları hakkında genel bilgiler vereceğiz ve daha sonra da iki değişkenli parçalı polinom fonksiyonları üzerinde çalışacağız. $\mathbb{R}$ de aralıkların altaralıklara parçalanışına karşın $\mathbb{R}^n$ de polihedral bölgeleri belli altbölgelere parçalayacağız. $\mathbb{R}$ de aralıkları altaralıklara parçalarken, ardışık altaralıkların ortak tek noktaya sahip olmasını dikkate almıştık. Benzer şekilde, $\mathbb{R}^n$ de de polihedral bölgeleri altbölgelere parçalarken, altbölgelerin, yani politopların, kesişimlerinin bir yüzey belirtmelerini dikkate alacağız. $\mathbb{R}^n$ de sonlu noktalar kümesinin en küçük konveks kümesine *politop* denir. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), böyle altbölgeleri oluşturmada büyük ölçüde geometrik özgürlük sağlar.

3.2.1 Polyhedral Kompleks Üzerinde Tanımlı Parçalı Polinom Fonksiyonları

Bu kısımda $C_k^r(\Delta)$ nın boyut hesaplamaları için gerekli olan tanım ve teoremleri sırasıyla vereceğiz. Örnekler üzerinde CoCoA 4.7 yazılım programı kullanılarak boyut hesaplamaları yapacağız.

Tanım 3.6

(1) *$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ politopların sonlu bir ailesi olsun. Eğer Δ nın her bir elemanının yüzeyi Δ nın elemanı ve Δ nın herhangi iki elemanının arakesiti yine Δ nin elemanı ise bu Δ ya* polihedral kompleks *denir.*

(2) *$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ bir polihedral kompleks olsun. Kapsama bağıntısına göre Δ nın her maksimal elemanı bir n-boyutlu politop ise Δ ya* n-boyutlu öz polihedral kompleks *denir.*

(3) *Bir Δ polihedral komplekste iki n-boyutlu politop, $n-1$ boyutlu ortak bir politop boyunca kesişirse bunlara* hiperkomşu politop *denir.*

(4) *n-boyutlu bir Δ komplekste her $\tau \in \Delta$ olmak üzere τ yu içeren herhangi iki n-boyutlu σ ve $\sigma^{'}$ politopları için her biri n-boyutlu, τ yu içeren σ_i ve σ_{i+1} ardışık politopları hiperkomşu olacak şekilde*

$$\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m = \sigma^{'}$$

dizisi ile σ, $\sigma^{'}$ politopları bağlanabiliyorsa Δ ya güçlü bağlantılı *denir.*

$R = \bigcup\limits_{\sigma\in\Delta} \sigma \subset \mathbb{R}^n$ polihedral bölgesinin σ altbölgelerine Δ kompleksinin *hücreleri* denir. Δ, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir n-boyutlu öz polihedral kompleks olsun. Δ da $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ sıralı *n*-hücreli elmanlar ve $R = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$ olsun. Tek değişkenli spline fonksiyonlarındaki kavramlar R üzerinde çok değişkenli spline fonksiyonlara aşağıdaki gibi taşınır.

Tanım 3.7

(1) *Boyutu n den küçük olan her $\delta \in \Delta$ politopları için $f_{|\delta}$ kısıtlanmış fonksiyonu $f_\delta \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bir polinom olacak şekilde R üzerinde $f \in C^r$ fonksiyonlarının ailesi $C^r(\Delta)$ olarak tanımlanır.*

(2) *Δ daki her bir hücreye göre f nin kısıtlanışı derecesi k veya k dan daha az olan polinomlar olacak şekilde $f \in C^r(\Delta)$ fonksiyonların ailesi $C^r_k(\Delta)$ olarak tanımlanır.*

Amacımız, R üzerindeki $C^r_k(\Delta)$ uzayınlarının boyutlarını hesaplamak ve aşikar olmayan spline fonksiyonları ne zaman içerdiğini belirlemektir.

Eğer σ_i ve σ_j, Δ nın n-hücreli hiperkomşu çifti ise $(n-1)$-hücreli $\sigma_{ij} \in \Delta$ boyunca kesişir ve $\ell_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ derecesi 1 olan polinom olmak üzere σ_{ij}, $V(\ell_{ij})$ afin uzayının (hiperdüzlemin) bir polihedral altkümesidir. $\mathbb{R}^n$ de öz ve güçlü bağlantılı kompleksler için aşağıdaki Önerme 3.8 ve Önerme 3.9 u kullanarak Önerme 3.10 da $C^r(\Delta)$ nın elemanlarıyla ilgili cebirsel özelliği vereceğiz. Önerme 3.10, Önerme 3.1 in genelleştirilmiş halidir.

Önerme 3.8 *$f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ olsun. Eğer f polinomu σ_{ij} üzerinde sıfırlanıyorsa $V(\ell_{ij})$ üzerinde de sıfırlanır.*

İspat. $c \in \sigma_{ij}$ olsun. Her $p \in V(\ell_{ij})$ için bir ℓ_{pc} doğrusu vardır ve bu doğrularla $V(\ell_{ij})$ hiperdüzlemini üretebiliriz. Varsayımdan, $\sigma_{ij} \cap \ell_{pc}$ doğru parçası üzerinde f fonksiyonu sıfırdır. Buradan, f nin $\sigma_{ij} \cap \ell_{pc}$ üzerinde sonsuz kökü vardır, fakat $f_{|\ell_{pc}}$ tek değişkenli bir polinom olduğundan en fazla derecesi kadar kökü olabilir. Bu ancak f nin ℓ_{pc} üzerinde sıfır olmasıyla mümkündür. Buradan, f nin hiperdüzlem üzerinde sıfır olduğu gözlenir. $\square$

Önerme 3.9 *k sonsuz bir cisim, ℓ bir afin polinom (yani derecesi en çok bir olan polinom) ve f, $k[x_1,\ldots x_n]$ de herhangi bir polinom olsun. ℓ nin sıfırlandığı herhangi bir k^n noktası da f de sıfırlansın. Bu durumda, $k[x_1,\ldots x_n]$ de $\ell \mid f$ olur.*

İspat. $R = k[x_2,\ldots,x_n]$ ise $k[x_1,\ldots,x_n] = R[x_1]$ olur. $\ell = x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0$, $a = -(a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0) \in R$ tanımlayalım. ℓ nin sırırlandığı noktalarda $f = f(x_1) \in R[x_1]$ polinomu sıfırlansın. Dolayısıyla, her $x_2,\ldots,x_n \in k$ olmak üzere $f(a) = f(-a_2x_2 - \cdots - a_nx_n - a_0) = 0$ olduğu görülür. Böylece, $R[x_1]$ de $(x_1 - a) \mid f(x_1)$ ve buradan $k[x_1,\ldots x_n]$ de $\ell \mid f$ olur. $\square$

Önerme 3.10 *$\Delta \in \mathbb{R}^n$, m tane n-hücreli σ_i ile oluşan öz ve güçlü bağlantılı kompleks olsun. $f \in C^r(\Delta)$ ve $1 \le i \le m$ olacak şekilde her bir i için $f_i = f_{|\sigma_i} \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ olsun. Bu durumda, Δ daki her bir σ_i, σ_j hiperkomşu çifti için $f_i - f_j \in \langle \ell_{ij}^{r+1} \rangle$ olur.*

Tersine, Δ nın her bir σ_i, σ_j hiperkomşu çifti ve $f_{|\sigma_i} = f_i$ olmak üzere herhangi bir m-bileşenli $(f_1, f_2,\ldots, f_m)$ parçalı polinom fonksiyonu için $f_i - f_j \in \langle \ell_{ij}^{r+1} \rangle$ ise $f \in C^r(\Delta)$ elamanını tanımlar.

İspat. $f \in C^r(\Delta)$ olsun. Buradan $u = 0,\ldots,r$ ve $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = u$ olmak üzere σ_{ij} üzerinde

$$\frac{\partial^u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} \left[f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) - f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n) \right] = 0 \tag{3.2.5}$$

dır. Bu denklemi $u = 0$ için uygularsak σ_{ij} üzerinde $(f_i - f_j) = 0$ ve Önerme 3.8, Önerme 3.9 gereği $\ell_{ij} \mid (f_i - f_j)$ dir. Böylece,

$$f_i - f_j = \ell_{ij} T_1$$

olacak şekilde $T_1 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomu vardır. Bu denklemin x_t ye göre kısmi türevleri alınırsa, her $t = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_t}(f_i - f_j) = T_1 \frac{\partial}{\partial x_t}\ell_{ij} + \ell_{ij}\frac{\partial}{\partial x_t}T_1$$

elde edilir. (3.2.5) den yukarıdaki her bir denklem σ_{ij} üzerinde sıfıra eşittir. Ayrıca, $(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_{ij}$ için $\ell_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ve ℓ_{ij} afin polinom olduğundan $T_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ olmak zorundadır. Böylece, Önerme 3.9 dan $T_1 = \ell_{ij}T_2$ olur ve buradan $f_i - f_j = \ell_{ij}^2 T_2$ elde edilir. İspatı tümevarımla tamamlayalım. $1 \leq u \leq r$ olacak şekilde her u için $f_i - f_j = \ell_{ij}^u T_u$ olsun. Her u ve $t = 1, 2, \ldots, n$ için aşağıdaki denklemler σ_{ij} üzerinde birbirlerine denktir:

$$\frac{\partial^u}{\partial x_t^u}\left[\ell_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\right]^u = u! \left[\frac{\partial}{\partial x_t}\ell_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\right]^u.$$

Aynı şekilde (3.2.5) i kullanarak, her $(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_{ij}$ için $T_u(x_1, \ldots, x_n) = 0$ elde edilir. Önerme 3.9 dan $T_u = \ell_{ij}T_{u+1}$ olur.

Tersine, $f_i - f_j \in \langle \ell_{ij}^{r+1} \rangle$ olsun. Buradan,

$$f_i - f_j = \ell_{ij}^{r+1} Q \tag{3.2.6}$$

olacak şekilde $Q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomu vardır. Öyleyse, $1 \leq u \leq r$ olacak şekilde herhangi bir u için, (3.2.6) eşitliğinde $x_1, \ldots, x_n$ ye göre kısmi türevler aldığımızda her bir teriminde ℓ_{ij} çarpanı geldiğinden her $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \sigma_{ij}$ ve $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = u$ olmak üzere

$$\frac{\partial^u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}\left[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = 0$$

olur.

Verilen bir f parçalı polinomun C^r fonksiyon olabilmesi için yeterli koşul her $\delta \in \Delta$ ve δ yı kapsayan n-hücreli her σ_p, σ_q çifti (sadece hiperkomşu olanlar değil) için f_p ve f_q nun r ve r ye kadar olan kısmi türevlerin eşit olmasıdır. Öyleyse, p ve q, $\delta \subseteq \sigma_p \cap \sigma_q$ sağlayacak herhangi iki indeks olsun. Δ güçlü bağlantılı olduğundan σ_{i_j} ile $\sigma_{i_{j+1}}$ hiperkomşu çifti olacak şekilde δ yı kapsayan her biri n-hücreli

$$\sigma_p = \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k} = \sigma_q$$

bir dizi vardır. Varsayımdan dolayı, her bir j için $f_{i_j} - f_{i_{j+1}}$ polinomun ve bu polinomun r ve r ye kadar olan bütün kısmi türevleri $\sigma_{i_j} \cap \sigma_{i_{j+1}} \supset \delta$ üzerinde sıfırdır. $f_p - f_q = (f_{i_1} - f_{i_2}) + (f_{i_2} - f_{i_3}) + \cdots + (f_{i_{k-1}} - f_{i_k})$ ifadesinin her bir terimi ve bu terimlerin r ve r ye kadar olan kısmi türevleri δ üzerinde sıfırlandığından $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^r(\Delta)$ dır. $\square$

Billera ve Rose (1991), bu önermenin Δ nın güçlü bağlantılı olmadığı durumda da doğru olduğunu ispatlamıştır.

Δ, $\mathbb{R}^n$ de öz ve güçlü bağlantılı kompleks olsun. Δ daki n-hücreli politopların sayısı m ve $(n-1)$-hücreli iç politopların sayısı (n-hücreli hiperkomşu politoplar için $\sigma_i \cap \sigma_j$ politoplarının sayısı) e olsun. Δ daki iç $(n-1)$-hücreliler için $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_e$ olarak sıralanışını sabitleyelim. ℓ_s, τ_s yi içeren afin hiperdüzlem ile tanımlı bir afin polinom olsun. $e \times (m+e)$ tipindeki

$$M(\Delta, r) = (\partial(\Delta) \mid D) \tag{3.2.7}$$

blok matrisi ele alalım. Bu matrisin satır ve sutünlarının sıralanışı, n-hücreli ve $(n-1)$-hücreli iç politopların indekslerinin sıralanışıyla belirlidir. Burda, herhangi bir sıralanış kullanılabilir. $i < j$ için $\tau_s = \sigma_i \cap \sigma_j$ olmak üzere (3.2.7) de $e \times m$ tipindeki $\partial(\Delta)$ matrisinin s. satır kuralı

$$\partial(\Delta)_{sk} = \begin{cases} 1 & ; \quad k = i \\ -1 & ; \quad k = j \\ 0 & ; \quad k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

dir. Ayrıca D, aşağıda tanımlandığı gibi $e \times e$ tipinde köşegen bir matristir:

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{r+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ell_2^{r+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ell_e^{r+1} \end{pmatrix}$$

Önerme 3.11 *$\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ öz ve güçlü bağlantılı kompleks ve $M(\Delta, r)$ yukarda (3.2.7) de tanımladığımız matris olsun.*

(a) *Bir m-bileşenli $(f_1, \ldots, f_m)$ fonksiyonu $C^r(\Delta)$ da tanımlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $f = (f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+e})^t$ fonksiyonu, $M(\Delta, r)$ matrisiyle* *tanımlı* $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^{m+e} \to \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^e$ *dönüşümünün çekirdeğinde olacak şekilde* $(f_{m+1},\dots,f_{m+e})$ *fonksiyonları vardır.*

(b) $C^r(\Delta)$, *$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir.* $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^{m+e} \to \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^m$ *izdüşüm homomorfizmasını* $M(\Delta,r)$ *matrisinin sütunları üzerinde tanımlı syzygy modülüne kısıtladığımızda izdüşümün görüntüsü* $C^r(\Delta)$ *dır (yani, ilk m bileşenidir).*

(c) $C^r_k(\Delta)$, $C^r(\Delta)$ *nın sonlu buyutlu bir altvektör uzayıdır.*

İspat.

(a) Önerme 3.10 gereği $i<j$ omak üzere $(n-1)$-hücreli her bir $\tau_s=\sigma_i\cap\sigma_j$ iç politopu için $f_i-f_j=-\ell_s^{r+1}f_{m+s}$ olacak şekilde $f_{m+s}\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ polinomları vardır. Bu ise $M(\Delta,r)f$ matris çarpımının s. satırını 0 olarak elde ettiğimiz denklemdir.

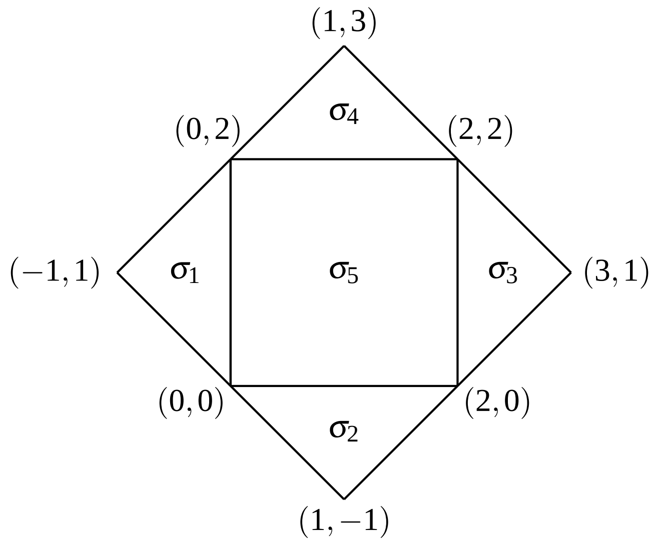
Tersine, $f\in\ker M(\Delta,r)$ ise $M(\Delta,r)f=0$ dır. Bu $(n-1)$-hücreli her bir $\tau_s=\sigma_i\cap\sigma_j$ iç politopu için $f_i-f_j+\ell_s^{r+1}f_{m+s}=0$ olmasını gerektirir. Önerme 3.10 dan $(f_1,\dots,f_m)\in C^r(\Delta)$ olur.

(b) $g\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ ve $f=(f_1,\dots,f_m)\in C^r(\Delta)$ olmak üzere Önerme 3.10 gereği $(g,f)\mapsto gf=(gf_1,\dots,gf_m)$ işlemi altında $C^r(\Delta)$ bir $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$-modüldür.

(b) nin ikinci kısmını ispatlayalım. β_i ler $M(\Delta,r)$ nin sütunları olmak üzere $N=\mathrm{Syz}(\beta_1,\dots,\beta_{m+e})=(\{(f_1,\dots,f_{m+e})\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^{m+e}\mid f_1\beta_1+\cdots+f_{m+e}\beta_{m+e}=0\})$ olsun. Buradan, $N=\ker M(\Delta,r)$ olduğu kolayca gözlenir. $\pi:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^{m+e}\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^m$, $(f_1,\dots,f_{m+e})\mapsto(f_1,\dots,f_m)$ izdüşüm dönüşümü N ye kısıtladığında görüntüsü $C^r(\Delta)$ dır.

(c) $C^r(\Delta)$ bir $\mathbb{R}$-vektör uzayı ve $C^r_k(\Delta)\subset C^r(\Delta)$ dır. $r\in\mathbb{R}$ ve $f,g\in C^r_k(\Delta)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{der}(rf-g)\le k$ olduğu ve Önerme 3.10 gereği $rf-g\in C^r_k(\Delta)$ olduğu görülür. Dereceyi k ya kısıtladığımızdan $C^r_k(\Delta)$ sonlu bir $\mathbb{R}$-vektör uzayıdır.

$\square$



Şekil 3.1:

Örnek 3.12 *Yurarıdaki şekil 3.1 de beş tane* 2*-hücreli, oniki tane* 1*-hücreli (bunların dört tanesi iç kenar), sekiz tane 0-hücreli ve* $\emptyset$ *den oluşan öz ve güçlü bağlantılı polyhedral kompleksi inceleyelim. Bu şeklin iç kenerları* $\sigma_1 \cap \sigma_5 \subseteq V(x)$, $\sigma_2 \cap \sigma_5 \subseteq V(y)$, $\sigma_3 \cap \sigma_5 \subseteq V(x-2)$ *ve* $\sigma_4 \cap \sigma_5 \subseteq V(y-2)$ *tarafından belirlidir. Önerme 3.10 dan* $f_{|\sigma_i} = f_i$ *olacak şekilde* $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathbb{R}[x,y]^5$ *elemanın* $C^r(\Delta)$ *içinde olması için gerek ve yeter şart* $f_1 - f_5 \in \langle x^{r+1} \rangle$, $f_2 - f_5 \in \langle y^{r+1} \rangle$, $f_3 - f_5 \in \langle (x-2)^{r+1} \rangle$, $f_4 - f_5 \in \langle (y-2)^{r+1} \rangle$ *olmasıdır. Öyleyse,*

$$\begin{aligned} f_1 - f_5 + x^{r+1} f_6 &= 0 \\ f_2 - f_5 + y^{r+1} f_7 &= 0 \\ f_3 - f_5 + (x-2)^{r+1} f_8 &= 0 \\ f_4 - f_5 + (y-2)^{r+1} f_9 &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan $f_6, f_7, f_8, f_9 \in \mathbb{R}[x,y]$ *polinomları vardır. Bu denklem sistemi matris şeklinde ifade edildiğinde*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & x^{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & y^{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & (x-2)^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & (y-2)^{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $C^r(\Delta)$ *nın elemanları*

$$M(\Delta, r) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & x^{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & y^{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & (x-2)^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & (y-2)^{r+1} \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\mathbb{R}[x,y]^9 \to \mathbb{R}[x,y]^4$ *dönüşümünün çekirdeğinin elemenlarının ilk dört bileşen üzerine olan izdüşümleridir. Yani,* $M(\Delta, r)$ *matrisinin sütunları tarafından üretilen modülün birinci syzygy nin ilk dört bileşeni* $C^r(\Delta)$ *nın bir elemanını verir (ispatı için Önerme 3.11 bakınız).* $\ker M(\Delta, 1)$ *syzygy modülünü CoCoA* 4.7 *programı yardımıyla aşağıdaki komutlar vasıtası ile hesaplayabiliriz:*

```
Use R::=Q[x,y];
M:=Module([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1],
[-1,-1,-1,-1],[x^2,0,0,0],[0,y^2,0,0],[0,0,(x-2)^2,0],
[0,0,0,(y-2)^2]);
SyzOfGens(M);
```

Bu program bize aşağıdaki sonucu verir:

```
Module([1,1,1,1,1,0,0,0,0],[0,y^2,0,0,0,0,-1,0,0],
[0,0,0,y^2-4y+4,0,0,0,0,-1],[0,-x^2,-x^2,-x^2,-x^2,
-1,0,0,0],[0,0,x^2-4x+4,0,0,0,0,-1,0])
```

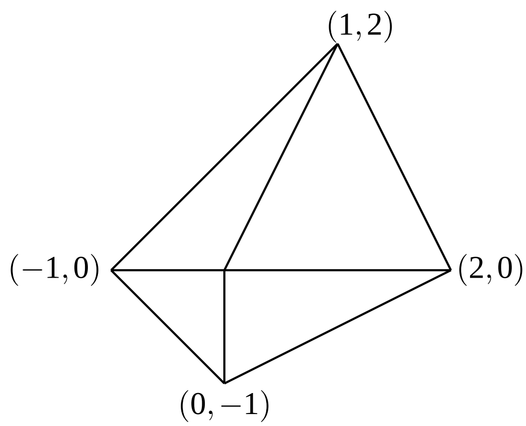
Böylece, $C^1(\Delta)$ *nın elemanları* $f,g,h,t,u \in \mathbb{R}[x,y]$ *olmak üzere* $f(1,1,1,1) + g(0,y^2,0,0) + h(0,0,0,y^2-4y+4) + t(0,-x^2,-x^2,-x^2) + u(0,0,x^2-4x+4,0)$

şeklindedir. Ayrıca, $C^1(\Delta)$ *nın serbest modül olduğunu Billera ve Rose (1992) makalelerinde ispatlamıştır (Teorem* 3.5 *e bakınız). Dikkat edilirse* $C^1(\Delta)$ *nın aşikar spline fonksiyonları* $g = h = t = u = 0$ *durumundan gelir. Önerme 3.10 den* $C^1(\Delta)$ *nın sadece aşikar spline fonksiyonları içermesi için* $k < r + 1$ *olması gerekir. Bu durumda*

$$\dim C^1_k(\Delta) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 3 & , \quad k = 1 \\ \binom{k+2}{2} + 4\binom{k-2+2}{2} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

olur.

□



Şekil 3.2:

Örnek 3.13 $\mathbb{R}^2$ *de*

$$R = \text{Konv}(\{(1,2,),(-1,0),(0,-1),(2,0)\})$$

dörtkenarlı konveks bölgeyi düşünelim. Şekil 3.2 de görüldüğü gibi bu bölgenin her bir köşe noktasını, doğru parçalarını kullanarak, $(0,0)$ *başlangıç noktasıyla birleştirerek üçgenlere parçalayalım. Burdan dört tane 2-hücreli, sekiz tane 1-hücreli (bunların dört tanesi iç kenar), beş tane 0-hücreli (bir tanesi iç nokta) ve* $\emptyset$ *içeren öz ve güçlü bağlantılı polyhedral kompleks elde ederiz.*

$$\sigma_1 = \text{Konv}(\{(0,0),(1,2),(2,0)\})$$

üçgeninden başlayarak orjin etrafında saat yönü tersinde sırasıyla 2-*hücrelileri* σ_2, σ_3, σ_4 *ile gösterelim.* Δ *nın iç* 1-*hücrelileri*

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 \subseteq V(2x-y)$$
$$\sigma_2 \cap \sigma_3 \subseteq V(y)$$
$$\sigma_3 \cap \sigma_4 \subseteq V(x)$$
$$\sigma_1 \cap \sigma_4 \subseteq V(y)$$

dir. Önerme 3.10 dan $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathbb{R}[x,y]^4$ *nın* $C^r(\Delta)$ *nın elemanlarını olabilmesi için gerek ve yeter şart* $f_1 - f_2 \in \langle (2x-y)^{r+1} \rangle$, $f_2 - f_3 \in \langle y^{r+1} \rangle$, $f_3 - f_4 \in \langle x^{r+1} \rangle$ *ve* $f_1 - f_4 \in \langle y^{r+1} \rangle$ *olmasıdır. Sonuç olarak,*

$$f_1 - f_2 + (2x-y)^{r+1} f_5 = 0$$
$$f_2 - f_3 + y^{r+1} f_6 = 0$$
$$f_3 - f_4 + x^{r+1} f_7 = 0$$
$$f_1 - f_4 + y^{r+1} f_8 = 0$$

olacak şekilde bir $f_5, f_6, f_7, f_8 \in \mathbb{R}[x,y]$ *elemanları vardır. Bu denklemler aşağıdaki matris şeklinde yazılır:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & (2x-y)^{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & y^{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & x^{r+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & y^{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buradan, $C^r(\Delta)$ *nın elemanlarını*

$$M(\Delta, r) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & (2x-y)^{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & y^{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & x^{r+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & y^{r+1} \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\mathbb{R}[x,y]^8 \to \mathbb{R}[x,y]^4$ *dönüşümünün çekirdeğinin elemenlarının ilk dört parçası üzerine izdüşümleridir. Başka bir deyişle,* $M(\Delta, r)$ *matrisinin sütunları tarafından üretilen* *modülün birinci syzygy nin ilk dört bileşeni* $C^r(\Delta)$ *nın bir elemanını verir. CoCoA programı kullanılarak,* $\ker M(\Delta,1)$ *birinci syzygy modülü aşağıdaki gibi hesaplanır:*

```
Use R::=Q[x,y];
M:=Module([1,-1,0,0,(2x-y)^2,0,0,0],[0,1,-1,0,0,y^2,0,0],
[0,0,1,-1,0,0,x^2,0],[1,0,0,-1,0,0,0,y^2]);
MM:=Mat(M);
N:=Transposed(MM);
K:=Module(N);
SyzOfGens(K);
```

Bu program bize aşağıdaki sonucu verir:

```
Module([1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -y^2, -y^2, 0,
  -1, 0, -1], [-xy^2 + 1/4y^3, -x^2y, -x^2y, 0, -1/4y,
  0, y, x - 1/4y], [-x^2y -3/4xy^2 + 1/4y^3, -x^3 -
  x^2y, -x^3 - x^2y, -x^2y, -1/4x - 1/4y, 0, x, 3/4x
  - 1/4y])
```

Böylece, $C^1(\Delta)$ *nın elemanları* $f,g,h,t \in \mathbb{R}[x,y]$ *olmak üzere* $f(1,1,1,1) + g(0,0,-y^2,-y^2) + h(-xy^2 + 1/4y^3, -x^2y, -x^2y, 0) + t(-x^2y - 3/4xy^2 + 1/4y^3, -x^3 - x^2y, -x^3 - x^2y, -x^2y)$ *şeklindedir. Modül olarak* $C^1(\Delta)$ *nın cebirsel yapısı daha basittir. Çünkü* $C^1(\Delta)$ *serbest modüldür (Billera ve Rose 1992). Aynı şey,* Δ *güçlü bağlantılı bir kompleks olmak üzere* $C^r(\Delta)$ *içinde geçerlidir. Burda bulduğumuz üreteçler modül için bir taban vereceğinden* $C^r_k(\Delta)$ *nın boyutunu kolayca hesaplayabiliriz. Dikkat edilirse* $k < 2$ *için* $C^1_k(\Delta)$ *sadece aşikar spline fonksiyonlarıyla belirlenir.* $k = 0$ *için* $\dim C^1_0(\Delta) = 1$*;* $k = 1$ *için* $\dim C^1_1(\Delta) = 3$ *tür.* $k \geq 2$ *için aşikar olmayan spline fonksiyonları da vardır. Derecesi* k *olan spline fonksiyonların boyutunu* f,g,h,t *deki dereceleri uygun olan* *monomialları sayarak*

$$\dim C_k^1(\Delta) = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ 3 & , \quad k=1 \\ 7 & , \quad k=2 \\ \binom{k+2}{2} + \binom{k-2+2}{2} + 2\binom{k-3+2}{2} & , \quad k>2 \end{cases}$$

elde ederiz.

□

Örnek 3.12 de gözlendiği gibi eğer Δ da hiperdüzlem üzerindeki $(n-1)$-hücreli iç politoplar $\mathbb{R}^n$ nin orjinini kapsamıyorsa 1. syzygy modülünün Gröbner taban elemanlarının bileşenleri homojen polinomlar olmazlar. Sadece homojen polinomlarla çalışmak istersek, Δ yı aşağıda olduğu gibi homojenize edebiliriz: $(a_1,\ldots,a_n) \rightarrow (a_1,\ldots,a_n,1)$ göndererek Δ yı $\mathbb{R}^{n+1}$ içinde düşünebiliriz. $v=(0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. Bu durumda $\hat{\sigma}$, σ ve $\{v\}$ nin en küçük konveks kümesi olarak tanımlanmak üzere $\Delta \cup \{\hat{\sigma} : \sigma \in \Delta\}$ kompleksini oluşturalım. Δ ile v nin birleşiminden oluşan bu polihedral komplekse Δ nın homojenize edilmiş kompleksi denir ve $\hat{\Delta} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ile gösterilir. Bu durumda, Δ nın n-hücreli iki σ, σ' politopu hiperkomşu olması için gerek ve yeter şart $\hat{\Delta}$ da bunlara karşılık gelen $\hat{\sigma}, \hat{\sigma'}$ nın $(n+1)$-hücreli hiperkomşu politop olmasıdır. Benzer şekilde, $\hat{\Delta}$ nın güçlü bağlantılı olduğu görülür. $\hat{R} = R[z]$ olsun. Öyleyse, $C^r(\hat{\Delta})$, $\hat{R}$ üzerinde bir modül olduğu da gözlenir. Eğer $g \in R$ ise ∂g, g nin derecesi olmak üzere g nin homojeninize edilmiş halini

$$^h g(x_1,\ldots,x_n,z) = z^{\partial g} g(x_1/z,\ldots,x_n/z)$$

olark tanımlayacağız. $\partial f = \text{maks}(\partial f_i)$ olsun. Benzer şekilde, $f=(f_1,\ldots,f_m) \in R^m$ olmak üzere f nin homojen edilmiş hali

$$^h f(x_1,\ldots,x_n,z) = z^{\partial f} f(x_1/z,\ldots,x_n/z)$$

olarak tanımlanır. Buradan,

$$^h f = (^h f_1,\ldots,^h f_m) = \left(z^{\partial f - \partial f_1}(^h f_1),\ldots,z^{\partial f - \partial f_m}(^h f_m)\right)$$

elde edilir. Bu tanımlamalar yardımıyla verilen bir $f = (f_1, \ldots, f_m) \in C^r(\Delta)$ için Billera ve Rose (1991), ${}^h f \in C^r(\hat{\Delta})$ ve $C^r_k(\hat{\Delta}) \cong C^r_k(\Delta)$ olduğunu ispat ettiler (Lemma 2.3, Teorem 2.6 ya bakınız). Bu bölümün 3.2.2.2 kısmında orjinden geçmeyen 2-hücreli iç politopların bulunduğu simpleksel kompleksler üzerinde tanımlı spline fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayının boyutunu kolayca hesaplayabileceğiz.

Teorem 3.14 (Billera ve Rose, 1991) *$C^r(\hat{\Delta})$, $\mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ üzerinde derecelenmiş modüldür.*

Teorem 3.15 (Billera ve Rose, 1991) *n-boyutlu, öz Δ polihedral kompleks olmak üzere $C^r(\Delta)$, sonlu üreteçli torsion serbest R-modüldür.*

□

$C^r(\hat{\Delta})$ derecelenmiş modülünün *Hilbert serisi*

$$H(C^r(\hat{\Delta}), u) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim C^r_k(\hat{\Delta}) u^k$$

formal serisidir. Hilbert sersi, $p(u)$ katsayıları $\mathbb{Z}$ de olan u değişkenli polinom olmak üzere

$$H(C^r(\hat{\Delta}), u) = \frac{p(u)}{(1-u)^{n+1}} \tag{3.2.8}$$

şeklinde yazılır (Billera ve Rose, 1991, Teorem 2.8; Bölüm 2). Örnek 3.13 için $C^1(\hat{\Delta})$ modülünün Hilbert serisini hesaplayalım.

Örnek 3.16 *(3.2.8) eşitliğinden $p(u) = (1-u)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \dim C^1_k(\hat{\Delta}) u^k$ elde edilir. Örnek 3.13 ün sonucundan $p(u) = (1-u)^3(1 + 3u + 7u^2 + 15u^3 + 27u^4 + 43u^5 + 63u^6 + \cdots) = 1 + u^2 + 2u^3$ bulunur. Böylece, $C^1(\hat{\Delta})$ nın Hilbert serisi aşağıda yazıldığı gibidir:*

$$H(C^1(\hat{\Delta}), u) = \frac{1 + u^2 + 2u^3}{(1-u)^3}.$$

□

Örnek 3.17 *Daha önceki örneklerde $M(\hat{\Delta}, r)$ matrisinin sütunları üzerinde syzgylerinin oluşturduğu modül için bir Gröbner tabanının hesaplamış ve bu bize $C^r_k(\hat{\Delta})$ spline uzayının* *tabanı hakkında kesin bilgi vermişti. Eğer bu spline uzayın bir tabanına ihtiyacımız yoksa syzygy modülünü bulmadan direk olarak $M(\hat{\Delta},r)$ dan Hilbert serisini hesaplamak için başka bir metodumuz daha vardır. $M(\hat{\Delta},r)$ matrisinin son e tane sütunu derecesi $r+1$ olan homojen polinomlardan oluşsun ve $\hat{R}=\mathbb{R}[x_0,\dots,x_n]$ yazılsın. Bu durumda, derecelenmiş $\hat{R}$-modüllerin oluşturduğu aşağıdaki tam diziyi düşünelim:*

$$0 \to \ker M(\hat{\Delta},r) \to \hat{R}^m \oplus \hat{R}(-r-1)^e \to \operatorname{im} M(\hat{\Delta},r) \to 0.$$

Burada $H(\hat{R},u)=\frac{1}{(1-u)^{n+1}}$ olduğu kolayca gözlenir. Bunun sonucu olarak, $\hat{R}(-r-1)_d = \hat{R}_{d-r-1}$ olduğundan $H(\hat{R}(-r-1),u)=\frac{u^{r+1}}{(1-u)^{n+1}}$ dir. Hilbert fonksiyonu özelliğinden $H(\hat{R}^m \oplus \hat{R}(-r-1)^e,u) = mH(\hat{R},u)+eH(\hat{R}(-r-1),u) = \frac{m+eu^{r+1}}{(1-u)^{n+1}}$ olduğu görülür. Ayrıca, M modülünün Hilbert serisi ile $\mathrm{LT}(M)$ nin Hilbert serisi aynı olduğundan $\operatorname{im} M(\hat{\Delta},r)$ nin Hilbert serisini $M(\hat{\Delta},r)$ nin sütunları ile üretilen M modülüne Buchberger algoritması uygulanarak hesaplanabilir. Örneğin CoCoA programı ile Örnek 3.13 de $\operatorname{im} M(\hat{\Delta},r)$ nin Hilbert serisi

```
Use R::=Q[x,y,z];
M:=[[1,0,0,1],[-1,1,0,0],[0,-1,1,0],[0,0,-1,-1],[(2x-y)^2,0,
     0,0],[0,y^2,0,0],[0,0,x^2,0],[0,0,0,y^2]];
N:=Module(M);
I:=LT(N);
Hilbert(I); --Hilbert(I)=Hilbert(N)
H(0) = 3
H(d) = 2d^2 + 6d + 1 for d >= 1
```

komutları ile hesaplanabilir. Hilbert fonksiyonunun özelliğinden $\ker M(\hat{\Delta},r)$ derecelenmiş modülünün Hilbert serisi

$$H(\ker M(\hat{\Delta},r),u) = H(R^m \oplus R(-r-1)^e,u) - H(\operatorname{im} M(\hat{\Delta},r),u)$$

dir. Örnek 3.13 için hesaplamalara devam edersek $H(\ker M(\hat{\Delta},r),u) = \frac{4+4u^2}{(1-u)^3} - (3+9u+21u^2+\ldots+(2d^2+6d+1)u^d+\cdots) = 1+3u+7u^2+\cdots+(2d^2-2d+3)u^d$ *olarak bulunur.*

$\square$

3.2.2 Simpleksel Kompleks Üzerinde Tanımlı Parçalı Polinom Fonksiyonları

Bu bölüm Geramita ve Schenck (1997) makalesinin üzerine kuruludur. Bu bölümde şişman noktalar ideallerinin yardımıyla yeterince büyük k dereceli ve $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ vektörü için düzlemsel simpleksel kompleks Δ üzerinde $C_k^{\alpha}(\hat{\Delta})$ vektör uzayının boyutunu tam olarak hesaplayacağız.

3.2.2.1 Şişman Noktalar ve Tersinir Sistemler

Bu kısımda şişman noktalar ideali ile spline fonksiyonları arasındaki ilişkiyi çalışacağız. Öncelikle şişman noktalar ideali ile doğrusal formların kuvvetleri tarafından üretilen idealler arasındaki ilişkiyi verdikten sonra bu formdaki ideallerin spline fonksiyonları ile ilişkilerinin nasıl olduğunu inceleyeceğiz.

$P_i = [p_{i0} : p_{i1} : \ldots : p_{in}] \in \mathbb{P}^n$, $I(P_i) = \wp_i \subseteq R = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ve $L_{P_i} = \sum_{j=0}^{n} p_{ij} y_j$ olsun. Bu tanımlarla birlikte $\alpha_i \geq 1$ için $I = \bigcap_{i=1}^{m} \wp_i^{\alpha_i}$ şeklindeki ideale *şişman noktalar ideali* denir. $S = k[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ olsun. Bu durumda S, R ye izomorf bir halkadır ve aynı zamanda kısmi türev ile tanımlanan

$$R_i \times S_j \to S_{j-i}, \quad (x_i, y_j) \mapsto x_i \cdot y_j = \frac{\partial y_j}{\partial y_i}$$

etkisi altında bir R-modül olarakta düşünebiliriz.

I, R nin ideali olduğu için I, S üzerinde de etki eder. S nin hangi elemanları bu etki ile sıfırlanır diye sorabiliriz. Bu elemanların kümesi $I^{-1} = \{a \in S \mid Ia = 0\}$ ile gösterirsek ilerleyen konularda şişman nokta idealleri ile I^{-1} (veya doğrusal formların kuvvetleri tarafından üretilen ideallerin) arasında güçlü bir ilişki olduğunu göreceğiz. I şişman noktaların bir ideali olmak üzere $I^{-1} = \mathrm{Ann}_{(S)}(I)$ sıfırlayanı Teorem 3.18 deki gibi de ifade edilebilir.

Teorem 3.18 (Ensalem ve Iarrobino, 1995) $I = \wp_1^{n_1+1} \cap \wp_2^{n_2+1} \cap \cdots \cap \wp_s^{n_s+1}$ *şişman noktaların bir ideali ve* $H(R/I, j)$, R/I *nin Hilbert fonksiyonu olmak üzere*

$$(I^{-1})_j = \begin{cases} S_j & , \quad j \leq maks\{n_i\} \\ L_{p_1}^{j-n_1} S_{n_1} + \cdots + L_{p_s}^{j-n_s} S_{n_s} & , \quad j \geq maks\{n_i + 1\} \end{cases}$$

ve $\dim_k (I^{-1})_j = \dim_k (R/I, j) = H(R/I, j)$ *dir.*

$\square$

Sonuç 3.19 *Teorem 3.18 koşulları altında her* $i = 1, \ldots, s$ *için* $n_i = 0$ *olmak üzere*

$$(I^{-1})_t = \langle L_{p_1}^t, \ldots, L_{p_s}^t \rangle \subseteq S_t,$$

$$\dim_k (I^{-1})_t = H(R/I, t) = \dim_k \frac{R_t}{I_t}$$

dir.

$\square$

Teorem 3.18 in sonucundan, eğer $n_1, \ldots, n_s$ leri sabit tutup j yi değiştirirsek $L_{p_1}^{j-n_1}, \ldots, L_{p_s}^{j-n_s}$ tarafından üretilen sonsuz sayıdaki idealin $L_{p_1}^{j-n_1} S_{n_1} + \cdots + L_{p_s}^{j-n_s} S_{n_s} \subseteq S_j$ j. derecelenmiş parçalarının büyüklüğü hakkındaki bilgiyi bunlara karşılık gelen şişman noktaların ideallerinden elde ederiz. Diğer taraftan, her i için $j - n_i = t_i$ sabit bırakacak şekilde n_i leri ve j leri değiştirirsek şişman noktaların ideallerinin sonsuz ailesinden $L_1^{t_1}, \ldots, L_s^{t_s}$ tarafından üretilen idealin derecelenmiş parçalarının boyutu hakkında da bilgi edinebiliriz.

Sonuç 3.20 $S = k[y_0, y_1]$ *içindeki herhangi* $L_1, \ldots, L_s$ *farklı doğrusal formlar için* $0 < \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_s$ *tamsayılar ve* $J = \langle L_1^{\alpha_1}, \ldots, L_s^{\alpha_s} \rangle$ *olsun. Her bir* t *tamsayısı için* J_t *vektör uzayının boyutu*

$$\dim_k J_t = \min \left\{ t + 1, \sum_{i=1}^{s} \text{maks}\{t - \alpha_i + 1, 0\} \right\}$$

dir.

İspat. Herhangi bir t pozitif tamsayısı için $j = \text{maks}\{j' \mid t - \alpha_{j'} + 1 > 0\}$ pozitif tamsayısını tanımlayalım. $0 < \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_s$ olduğundan $\sum_{i=j+1}^{s} \text{maks}\{t - \alpha_i + 1, 0\} = 0$

dir. Bunun sonucu olarak, $\sum_{i=1}^{s}\text{maks}\{t-\alpha_i+1,0\}=\sum_{i=1}^{j}\text{maks}\{t-\alpha_i+1,0\}$ elde edilir. Öyleyse,

$$\min\left\{t+1,\sum_{i=1}^{s}\text{maks}\{t-\alpha_i+1,0\}\right\}=\min\left\{t+1,\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)\right\}$$

dir. $t-\alpha_{j+1}+1\leq 0\Leftrightarrow t-\alpha_{j+1}<0$ olduğundan $S_{t-\alpha_{j+1}}=0$ olur ve benzer şekilde $j<u\leq s$ için $S_{t-\alpha_u}=0$ dır. Bu sonuçlardan,

$$J_t=L_1^{\alpha_1}S_{t-\alpha_1}+\cdots+L_s^{\alpha_s}S_{t-\alpha_s}=L_1^{\alpha_1}S_{t-\alpha_1}+\cdots+L_j^{\alpha_j}S_{t-\alpha_j}$$

elde edilir. $I=\wp_1^{t-\alpha_1+1}\cap\cdots\cap\wp_j^{t-\alpha_j+1}$ olmak üzere Teorem 3.18 de $j=t$ ve $n_i=t-\alpha_i$ alındığında

$$(I^{-1})_t=\begin{cases} S_t & , \quad t\leq maks\{t-\alpha_i\}\\ L_1^{\alpha_1}S_{t-\alpha_1}+\cdots+L_s^{\alpha_s}S_{t-\alpha_s} & , \quad t\geq maks\{t-\alpha_i+1\}\end{cases}$$

olur. Fakat $t\leq\text{maks}\{t-\alpha_i\}$ olamayacağından $(I^{-1})_t=L_1^{\alpha_1}S_{t-\alpha_1}+\cdots+L_s^{\alpha_s}S_{t-\alpha_s}=J_t$ dir. Böylece, Teorem 3.18 den,

$$\dim_k J_t=\dim_k(R/I,t)=t+1-(\dim_k I_t)$$

dir. I, derecesi $\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)$ olan bir F polinomu tarafından üretilen R nin esas idealidir. Buradan,

$$\dim_k I_t=\begin{cases} 0 & , \quad t<\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)\\ \dim_k S\left(-\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)\right)_t & , \quad t\geq\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1).\end{cases}$$

Eğer $t<\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)$ ise $t+1\leq\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)$ ve buradan da

$$\dim J_t=\min\left\{t+1,\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)\right\};$$

eğer $t\geq\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)$ ise $t+1>\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)$ ve buradan

$$\dim J_t=\min\left\{t+1,\sum_{i=1}^{j}(t-\alpha_i+1)\right\}$$

olur. Böylece ispat biter. $\square$

Bu sonuçta doğrusal fomlar ile üretilen ideallerin boyutunun, seçilen formlara bağımlı olmaması ilginçtir. Doğrusal fomlar ile üretilen ideallerin boyutu, seçilen formlara karşılık gelen noktaların farklı olmasına bağlıdır. Sonuç 3.20 den , $L_i \in k[y_0, y_1]$ doğrusal bağımsız homojen polinomlar olmak üzere $\langle L_1^t, \ldots, L_s^t \rangle$ nin t ninci derecelenmiş parçası olan vektör uzayının boyutunun $\min\{t+1, s\}$ olduğu aşikadır.

Yukarıdaki sonuç, Örnek 3.21 den de gözlendiği gibi, $k[y_0, y_1]$ içindeki homojen doğrusal formların kuvvetleri tarafından üretilen bir idealin üreteçlerinin minimal kümesini belirlemek için de yararlıdır.

Örnek 3.21 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \in k[y_0, y_1]$ *farklı homojen doğrusal form ve* $J = \langle L_1^4, L_2^6, L_3^7, L_4^7, L_5^9 \rangle$ *olsun. Eğer* $J' = \langle L_1^4, L_2^6, L_3^7, L_4^7 \rangle$ *ise Sonuç 3.20 den* $\dim_k(J')_9 = \min\{10, (10-4)+(10-6)+(10-7)+(10-7)\} = 10$ *ve aynı şekilde* $\dim_k(J)_9 = 10$ *dur. Buradan,* $(J)_9 = (J')_9$ *bulunur. Bunun sonucu olarak,* $L_5^9 \in (J')_9$ *ve dolayısıyla* $L_5^9 \in J'$*. Böylece,* $J = J'$ *elde edilir. Benzer şekilde,* $L_2^6 \notin \langle L_1^4 \rangle$, $L_3^7 \notin \langle L_1^4, L_2^6 \rangle$, $L_4^7 \notin \langle L_1^4, L_2^6, L_3^7 \rangle$ *olduğu gözlenir. Öyleyse,* J' *nün üreteçleri* J *için minimal üreteçlerdir.*

□

Sonuç 3.22 $0 < \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t$ *tamsayılar ve* $J = \left\langle L_1^{\alpha_1}, \cdots, L_t^{\alpha_t} \right\rangle$ *olsun.* $m \geq 2$ *için* $L_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \notin \langle L_1^{\alpha_1}, \ldots, L_m^{\alpha_m} \rangle$ *olması için gerek ve yeter şart* $\alpha_{m+1} \leq \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i - m}{m-1}$ *dir.*

İspat. $J_m = \langle L_1^{\alpha_1}, \ldots, L_m^{\alpha_m} \rangle$ olsun. Bu durumda $L_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \notin J_m$ olması için gerek ve yeter şart $(J_m)_{\alpha_{m+1}} \neq (J_{m+1})_{\alpha_{m+1}}$ dir. Sonuç 3.20 den

$$\dim_k(J_m)_{\alpha_{m+1}} = \min\{\alpha_{m+1}+1, \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{m+1} - \alpha_i + 1)\}$$

$$\dim_k(J_{m+1})_{\alpha_{m+1}} = \min\{\alpha_{m+1}+1, \sum_{i=1}^{m+1}(\alpha_{m+1} - \alpha_i + 1)\}$$

olur. Böylece, $(J_m)_{\alpha_{m+1}} \neq (J_{m+1})_{\alpha_{m+1}}$ olması için gerek yeter şart

$$\alpha_{m+1} + 1 > \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{m+1} - \alpha_i + 1)$$

olmasıdır. Burdan, $\alpha_{m+1} \leq \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i - m}{m-1}$ elde edilir. □

Bundan sonra $J = \langle L_1^{\alpha_1}, \ldots, L_t^{\alpha_t} \rangle$ alındığında Sonuç 3.22 nin koşullarını sağlayan $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ vektörüne J nin üstel vektörü diyeceğiz. Başka bir deyişle, doğrusal formlar J için minimal üreteçtir.

Ω, $\sum_{i=1}^{t}(r-\alpha_i+1) > r$ olacak şekilde en küçük r tamsayısı olsun. Yani

$$\Omega = \left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{t}\alpha_i - t}{t-1}\right|\right] + 1$$

olsun. Sonuç 3.20 den faydalanarak aşağıdaki teoremleri ispatlayacağız.

Teorem 3.23 *$J = \langle L_1^{\alpha_1}, \ldots, L_t^{\alpha_t} \rangle$ ve $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ vektörü J nin üstel vektörü olsun. Bu durumda, S/J nin Hilbert fonksiyonu*

$$H(S/J, i) = \begin{cases} i+1 & , \quad 0 \leq i < \alpha_1 \\ i+1-\sum_{\{j|\alpha_j \leq i\}}(i-\alpha_j+1) & , \quad \alpha_1 \leq i < \Omega \\ 0 & , \quad i \geq \Omega \end{cases}$$

dır.

İspat. Sonuç 3.20 den

$$\dim_k J_i = \min\{i+1, \sum_{j=1}^{t} \text{maks}\{i-\alpha_j+1, 0\}\}$$

dir. Eğer $0 \leq i < \alpha_1$ ise her $j = 1, \ldots, t$ için $i - \alpha_j + 1 \leq 0$ dır. Buradan, $\dim_k(J_i) = \min\{i+1, 0\} = 0$ olur. Böylece, $H(S/J, i) = \dim_k S_i - \dim_k J_i = i+1$ olarak bulunur. $\alpha_1 \leq i < \Omega$ olsun. Öncelikle $\alpha_t \leq \Omega$ olduğunu gösterelim. α üstel vektör olduğundan Sonuç 3.22 gereği her $m \geq 2$ için $\alpha_{m+1} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j - m}{m-1}$ dir. $m = t-1$ için $\alpha_t \leq \frac{\sum_{j=1}^{t-1}\alpha_j-(t-1)}{(t-2)}$dir. Gerekli işlemler yapıldığında $\alpha_t - \frac{1}{t-1} \leq \frac{\sum_{j=1}^{t}\alpha_j - t}{(t-1)} < \Omega$ eşitsizliği elde edilir. Her j için α_j, Ω ve $t > 1$ pozitif tamsayı olduğundan $\alpha_t \leq \Omega$ bulunur. $i \geq \alpha_j$ olacak şekilde k tane α_j olsun. Yani, $\alpha_1 \leq i < \Omega$ koşulu altında $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_k \leq i < \alpha_{k+1} < \cdots < \Omega$ şeklinde sıralayabiliriz. J minimal üreteçli olduğundan $\alpha_k \leq i < \alpha_{k+1} \leq \frac{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j - k}{k-1}$ ifadesi $i < \frac{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j - k}{k-1}$ eşitsizliğini verir. Burdan, $i - \frac{1}{k-1} \leq \frac{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j - k}{k-1}$ elde ederiz. Bu ifade de eşitsizliğin her iki tarafını $(k-1)$ ile çarparsak $i+1 \geq ki - \sum_{j=1}^{k}\alpha_j + k$. $i \geq \alpha_j$ olacak şekilde k tane α_j olduğundan $\sum_{\{j|\alpha_j \leq i\}}(i-\alpha_j+1) = (i-\alpha_1+1) + \cdots + (i-\alpha_k+1) = (ki - \sum_{j=1}^{k}\alpha_j + k)$ elde edilir. Böylece, $i+1 \geq \sum_{\{j|\alpha_j \leq i\}}(i-\alpha_j+1)$ bulunur. $k = 1$

olduğunda ise, $\sum_{\{j|\alpha_j\leq i\}}(i-\alpha_j+1) = i+1-\alpha_1 \leq i+1$ dir. Bu sonuçlarla birlikte $\sum_{j=1}^{t} \text{maks}\{i-\alpha_j+1,0\} = \sum_{j=1}^{k} i-\alpha_j+1$ olduğundan $H(S/J,i) = \dim_k S_i - \dim_k J_i = i+1-\sum_{\{j|\alpha_j\leq i\}}(i-\alpha_j+1)$ dir. $i \geq \Omega$ olsun. $i \geq \Omega > \frac{\sum_{j=1}^{t}\alpha_j - t}{t-1}$ eşitsizliğinden $i < it - \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + t$ elde edilir. Burada her j için α_j ve i, t tamsayı olduğundan $i+1 \leq it - \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + t$ olur. $\alpha_t \leq \Omega$ olduğundan her j için $i-\alpha_j+1 > 0$ dır ve buradan da $i+1 \leq it - \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + t = \sum_{j=1}^{t}\text{maks}\{i-\alpha_j+1,0\}$ olmasını gerektirir. Böylece, $H(S/J,i) = \dim_k S_i - \dim_k J_i = i+1-(i+1) = 0$ dır. $\square$

Teorem 3.24 *$J = \langle L_1^{\alpha_1},\ldots,L_t^{\alpha_t}\rangle$ ve $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ vektörü J nin üstel vektörü olsun. $N_\Omega = \sum_{j=1}^{t}(\Omega-\alpha_j+1)-(\Omega+1)$ ve $N_{\Omega+1} = \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + (1-t)\Omega$ olmak üzere J,*

$$0 \to S(-\Omega)^{N_\Omega} \oplus S(-\Omega-1)^{N_{\Omega+1}} \to \bigoplus_{i=1}^{t} S(-\alpha_i) \to J \to 0$$

çözümlemesine sahiptir.

İspat. $S = k[y_0,y_1]$ olduğundan Graded Hilbert Syzygy Teoremi (Bölüm 2, Teorem 2.19) gereği J nin uzunluğu en fazla iki olan çözümlemesi vardır. Yani, J nin

$$0 \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} J \to 0 \tag{3.2.9}$$

çözümlemesine sahibiz. J nin üstel vektörü $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ olduğundan $F_0 = \bigoplus_{i=1}^{t} S(-\alpha_i)$ olur. Ayrıca, $\ker\varphi_0$ ın serbest modül olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır.

$$0 \to \ker\varphi_0 \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^{t} S(-\alpha_i) \xrightarrow{\varphi_0} J \to 0,$$

$$0 \to J \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\pi} S/J \to 0$$

tam dizilerini birleştirirsek

$$0 \to \ker\varphi_0 \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^{t} S(-\alpha_i) \xrightarrow{i\varphi_0} S \xrightarrow{\pi} S/J \to 0$$

tamdizisi elde edilir. $\ker i\circ\varphi_0 = \ker\varphi_0$ serbest modüldür (Cox *et al.*, 2005, Bölüm 6, Sonuç 3.19). Bununla beraber (3.2.9) deki çözümlemenin uzunluğu $\ell = 1$ dir (Cox *et al.*, 2005, Bölüm 6, Özellik 1.12). Böylece,

$$0 \to F_1 \to F_0 \to J \to 0, \quad F_0 = \bigoplus_{j=1}^{t} S(-\alpha_j)$$

elde edilir. F_1 in ifadesini gösterelim. Yukarıdaki çözümlemeden her i için

$$0 \to (F_1)_i \to (F_0)_i \to (J)_i \to 0 \tag{3.2.10}$$

tam dizidir. Bu tam diziden

$$\dim_k(F_1)_i = \dim_k(F_0)_i - \dim_k(J)_i \tag{3.2.11}$$

elde ederiz. Burada $\dim_k(F_0)_i = \dim_k(\bigoplus_{j=1}^{t} S(-\alpha_j))_i = \sum_{j=1}^{t} \dim_k S_{i-\alpha_j}$ dir. Teorem 3.23 ten $i < \alpha_1$ için $\dim_k(J)_i = 0$ ve $\sum_{j=1}^{t} \dim_k S_{i-\alpha_j} = 0$ dır ve benzer şekilde $\alpha_1 \leq i < \Omega$ için $\dim_k(J)_i = \sum_{\{j|\alpha_j \leq i\}}(i-\alpha_j+1) = \sum_{j=1}^{t} \dim_k S_{i-\alpha_j}$ olduğundan $i < \Omega$ durumunda J üzerinde hiç bir syzygy noktası yoktur. Böylece, F_1 sonlu boyutlu olduğundan n tamsayısı için

$$F_1 = S(-\Omega)^{v_0} \oplus S(-\Omega-1)^{v_1} \oplus \cdots \oplus S(-\Omega-n)^{v_n}$$

şeklinde yazılabilir. $i = \Omega$ derecesi için $J_\Omega = S_\Omega$ olduğundan bağımsız syzygylerinin sayısı $\dim_k(F_1)_\Omega = \sum_{j=1}^{t}(i-\alpha_j+1) - (i+1) = N_\Omega$ dır. Diğer taraftan, $0 < m \leq n$ için $\dim_k S(-\Omega-m)_\Omega = 0$ olduğundan $\dim_k(F_1)_\Omega = \dim_k(S(-\Omega)^{v_0})_\Omega = v_0$ bulunur ve buradan $v_0 = N_\Omega$ dır. $i = \Omega+1$ derecesi için $J_{\Omega+1} = S_{\Omega+1}$, $\dim_k(F_0)_{\Omega+1} = \sum_{j=1}^{t}(\Omega - \alpha_j + 2)$ ve $\dim_k(S(-\Omega)^{N_\Omega})_{\Omega+1} = \dim_k(S(-\Omega)_{\Omega+1})^{N_\Omega} = 2N_\Omega$ olduğu görülür. $1 < m \leq n$ için $\dim_k S(-\Omega-m)_{\Omega+1} = 0$ olduğundan $\dim_k(F_1)_{\Omega+1} = \dim_k(S(-\Omega)^{N_\Omega})_{\Omega+1} + \dim_k(S(-\Omega-1)_1^{v})_{\Omega+1} = 2N_\Omega + v_1$ ve (3.2.11) eşitliliğinden $\dim_k(F_1)_{\Omega+1} = \sum_{j=1}^{t}(\Omega - \alpha_j + 2) - (\Omega+2)$ bulunur. Bu sonuçları birleştirirsek, $2N_\Omega + v_1 = \sum_{j=1}^{t}(\Omega-\alpha_j+2) - (\Omega+2)$ dir ve öyleyse, $v_1 = \Omega(1-t) + \sum_{j=1}^{t} \alpha_j = N_{\Omega+1}$ bulunur.

Hilbert-Burch teoreminden, $\operatorname{rank} F_1 - \operatorname{rank} F_0 + 1 = 0$ dır (Eisenbud, 1995, Sayfa 506, Teorem 20.15). Buradan, $\operatorname{rank} F_1 = \operatorname{rank} F_0 - 1 = t-1$ dir. Ayrıca, $N_\Omega + N_{\Omega+1} = t-1$ olduğundan F_1 in tamamı olan $\operatorname{rank} F_1 = N_\Omega + N_{\Omega+1}$ bulunur. Böylece, $F_1 = S(-\Omega)^{N_\Omega} \oplus S(-\Omega-1)^{N_{\Omega+1}}$ şeklinde elde edilir. $\square$

Örnek 3.25 *Örnek 3.21 den devam edelim.* $J = \langle L_1^4, L_2^6, L_3^7, L_4^7 \rangle$ *minimal üreteçli ideal için* $\Omega = [|(4+6+7+7)/3|]+1 = 7$ *ve* $N_7 = 0,\ N_8 = 3$ *bulunur. Böylece, çözümleme*

$$0 \to S(-8)^3 \to S(-4) \oplus S(-6) \oplus S(-7)^2 \to J \to 0$$

olur.

□

3.2.2.2 Parçalı Polinom Fonksiyonları

Δ, Bölüm 2 de tanımlandığı gibi $\mathbb{R}^n$ içinde n-boyutlu simpleksel kompleks olsun. Bu kısımda mixed spline fonksiyonları yani, $(n-1)$-boyutlu yüzeyler üzerinde farklı süreklilik derecesine sahip spline fonksiyonları inceleyeceğiz. Δ_i^o, Δ nın i-boyutlu iç yüzeylerinin kümesi ve bu kümenin eleman sayısı $f_i^o = |\Delta_i^o|$ olsun. Bu kısımda n-boyutlu yüzeyleri iç yüzey olarak kabul edeceğiz. α_i ler $(n-1)$-boyutlu i. iç yüzey den geçen fonksiyonun süreklilik derecesi olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{f_{n-1}^o})$, uzunluğu f_{n-1}^o olan bir vektör olsun. Derecesi en fazla k olan spline fonksiyonların kümesi $C_k^\alpha(\Delta)$ ile gösterilen bir vektör uzayıdır. $x_{n+1} = 1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ olarak orjindeki nokta ile birleştirdiğimizde Δ üzerinde $\hat{\Delta}$ konisini elde ederiz. $C_k^\alpha(\hat{\Delta})$, derecesi tam olarak k olan $\hat{\Delta}$ üzerindeki spline fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda, $C_k^\alpha(\hat{\Delta})$ ile $C_k^\alpha(\Delta)$ arasında bir vektör uzayı izomorfizması vardır. Eğer $C^\alpha(\hat{\Delta}) = \bigoplus_{k\geq 0} C_k^\alpha(\hat{\Delta})$ alırsak $n+1$ değişkenli R polinom halkası üzerinde derecelenmiş modül olarak inceleyebiliriz. Böylece, $\dim C_k^\alpha(\Delta) = \dim C_k^\alpha(\hat{\Delta})$ olur.

Yukarıdaki bilgiler ışığı altında modüller için bir dizi kompleksi tanımlayarak, bu dizilerin homolojilerini hesaplayabiliriz. İlk olarak Δ nın $(n-1)$-boyutlu τ iç yüzeyi için L_τ (bu ℓ_τ nın homojen edilmiş halidir), $\hat{\tau}$ üzerinde sıfırlanan homojen doğrusal form olsun. Yani, Δ nın σ_i, σ_j $(n-1)$-boyutlu hiperkomşu politopları için $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau$ olmak üzere $\langle L_\tau \rangle = I(\hat{\tau})(= \{f \in R \mid \text{her } p \in \hat{\tau} \text{ için } f(p) = 0\})$ dır. Herhangi bir γ iç yüzeyi için

$$\mathfrak{J}(\gamma) = \langle L_{\tau_i}^{\alpha_i+1} \mid \gamma \subseteq \tau_i \in \Delta_{n-1}^o \rangle \tag{3.2.12}$$

tanımlayalım. Yani, $\mathfrak{J}(\gamma)$, $\hat{\gamma}$ ile ilişkili hiperdüzlemleri tanımlayan doğrusal formların mixed kuvvetleri ile üretilen idealdir. ∂_i (yönlendirilmiş simpleksel sınır dönüşümü) ve $\mathscr{R}_i = R^{f_i^o}$ ile tanımlı kompleks zinciri (kompleks zincir olduğu girişte detayli olarak yapılmıştır)

$$\mathscr{R}\ :\ \cdots \to \bigoplus_{\alpha\in\Delta^o_{i+1}} R \stackrel{\partial_{i+1}}{\to} \mathscr{R}_i = \bigoplus_{\beta\in\Delta^o_i} R \stackrel{\partial_i}{\to} \bigoplus_{\gamma\in\Delta^o_{i-1}} R \stackrel{\partial_{i-1}}{\to} \cdots \qquad (3.2.13)$$

dir. $\mathscr{R}$ kompleks zincirini (3.2.12) de tanımladığımız $\mathfrak{J}$ ideallerine kısıtlarsak

$$\mathscr{J}\ :\ \cdots \to \bigoplus_{\alpha\in\Delta^o_{i+1}} \mathfrak{J}(\alpha) \to \bigoplus_{\beta\in\Delta^o_i} \mathfrak{J}(\beta) \to \bigoplus_{\gamma\in\Delta^o_{i-1}} \mathfrak{J}(\gamma) \to \cdots \qquad (3.2.14)$$

bir kompleks zincir olur. Bunu göstermek için, her i için $\partial_i(\bigoplus_{\beta\in\Delta^o_i}\mathfrak{J}(\beta)) \subset \bigoplus_{\gamma\in\Delta^o_{i-1}}\mathfrak{J}(\gamma)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\gamma\in\Delta^o_{i-1}$ ve $\beta\in\Delta^o_i$ için $\gamma\subset\beta$ olsun. Eğer $g\in\mathfrak{J}(\beta)$ ise g, β yı kapsayan $(n-1)$-boyutlu τ_j ler için $L_{\tau_j}^{\alpha_j+1}$ lerin doğrusal bileşkesidir. $\gamma\subset\beta\subset\tau_j$ olduğundan $g\in\mathfrak{J}(\gamma)$ olur. Buradan, $\mathfrak{J}(\beta)\subset\mathfrak{J}(\gamma)$ elde edilir. İç $(i-1)$-simpleksleri $\gamma_1,\ldots,\gamma_{f^o_{i-1}}$ sıralayalım. Verilen $\gamma_1\in\Delta^o_{i-1}$ için $\beta\supset\gamma_1$ olacak şekilde $\beta\in\Delta^o_i$ vardır. Sayıları k olmak üzere β ları $\beta_{j_1},\ldots,\beta_{j_k}$ şeklinde indeksleyelim. Bu β_{j_m} lere karşılık gelen $\mathfrak{J}(\beta_{j_m})$ idellerini düşünürsek, $\partial_i(g_1,\ldots,g_{f^o_i}) = ((-1)^{k_{j_1}}g_{j_1} + (-1)^{k_{j_2}}g_{j_2} + \cdots + (-1)^{k_{j_k}}g_{j_k},\ldots)$ ilk bileşendeki elemanlar $m=1,\ldots,k$ olmak üzere $g_{j_m}\in\mathfrak{J}(\beta_{j_m})\subset\mathfrak{J}(\gamma_1)$ dır. Burada $\mathfrak{J}(\gamma_1)$ ideal olduğu için ilk bileşen $\mathfrak{J}(\gamma_1)$ nın elemanıdır. Benzer şekilde, $\partial_i(g_1,\ldots,g_{f^o_i})$ nin n. bileşeni $\mathfrak{J}(\gamma_n)$ nın elemanıdır. Böylelikle, $\mathscr{R}/\mathscr{J}$ nin bölüm kompleks zinciri

$$\cdots \to \bigoplus_{\alpha\in\Delta^o_{i+1}} R/\mathfrak{J}(\alpha) \stackrel{\overline{\partial_{i+1}}}{\to} \bigoplus_{\beta\in\Delta^o_i} R/\mathfrak{J}(\beta) \stackrel{\overline{\partial_i}}{\to} \bigoplus_{\gamma\in\Delta^o_{i-1}} R/\mathfrak{J}(\gamma) \stackrel{\overline{\partial_{i-1}}}{\to} \cdots \qquad (3.2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Bu simplekslerin en yüksek homoloji modülü olan $H_n(\mathscr{R}/\mathscr{J}) = \ker(\overline{\partial_n}) = C^\alpha(\hat{\Delta})$ olduğu görülür. Eğer biz bu kompleksteki modülleri ve althomoloji modüllerini anlarsak Euler karaktaristik denklemi ile $C^\alpha(\hat{\Delta})$ anlayabiliriz. Kompleks zincirindeki modülleri anlamak Bölüm 3.2.2 de tanımlanan doğrusal formların ideallerini anlamaya denktir. Buradan şişman noktalar ile spline fonksiyonlar arasındaki bağlantı da gözlenmektedir.

Schenck (1997), mixed olmayan durumda $R=\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]$ modülü olarak her bir $i<n$ için $H_i(\mathscr{R}/\mathscr{J})$ nin boyutunun en fazla $i-1$ olduğunu yerelleştirme teknikleri

kullanarak ispatlamıştır. α nın mixed olması durumunda bu teknikleri kullanarak bunu kontrol etmek kolaydır.

Bundan sonra, $\mathbb{R}^2$ içine gömülmüş iki boyutlu simpleksel kompleks olan Δ yı inceleyeceğiz. $R = \mathbb{R}[x,y,z]$ modülü için, yukarıdaki sonuçtan, $H_1(\mathscr{R}/\mathscr{J})$ homolojisinin sıfır boyutlu olması gerekmektedir.

Teorem 3.26 *$H_1(\mathscr{R}/\mathscr{J})$ sonlu uzunlukta bir R-modüldür.*

İspat. (Schenck, 1997) ve yukarıdaki sonuca bakınız. □

Yukarda tanımladığımız komplekslerin

$$0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{R}/\mathscr{J} \to 0 \tag{3.2.16}$$

kısa tam dizisi,

$$\cdots \to H_i(\mathscr{J}) \to H_i(\mathscr{R}) \to H_i(\mathscr{R}/\mathscr{J}) \to H_{i-1}(\mathscr{J}) \to \cdots$$

homoloji uzun tam dizisini verir. v_i ve v_j nin her ikiside Δ nın iç köşe noktası ise $\partial_1\langle v_i, v_j\rangle = \langle v_j\rangle - \langle v_i\rangle \in \operatorname{im}\partial_1$ olduğundan $\langle v_j\rangle + \operatorname{im}\partial_1 = \langle v_i\rangle + \operatorname{im}\partial_1$ dir. Buradan, modülo $\operatorname{im}\partial_1$ e göre iç köşe noktaları birbirine denktir. v_d, Δ nın dış köşe noktası olsun. Benzer şekilde, $\partial_1\langle v_d, v_i\rangle = \langle v_i\rangle - \langle v_d\rangle = \langle v_i\rangle \in \operatorname{im}\partial_1$ olduğundan $\langle v_i\rangle + \operatorname{im}\partial_1 = \operatorname{im}\partial_1$ dir. Her iç köşe noktası en az bir dış köşe noktasına bir kenar ile bağlantılı olduğundan modülo $\operatorname{im}\partial_1$ e göre her köşe noktası, sınır üzerinde bir köşe noktasına denktir. Bunun sonucunda, $H_0(\mathscr{R})$ sıfırlanır. Yukarıda belirtiğimiz homoloji uzun tam dizisinden de $H_0(\mathscr{R}/\mathscr{J})$ sıfırlanmak zorundadır.

Teorem 3.27 *Yukarıdaki notasyonlarla birlikte, eğer k>0 yeterince büyükse*

$$\dim_{\mathbb{R}} C_k^{\alpha}(\hat{\Delta}) = \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\beta\in\Delta_2^o} R/\mathfrak{J}(\beta)_k - \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\beta\in\Delta_1^o} R/\mathfrak{J}(\beta)_k + \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\beta\in\Delta_0^o} R/\mathfrak{J}(\beta)_k.$$

İspat. Euler karakteristik denklemi

$$\chi(H(\mathscr{R}/\mathscr{J})) = \chi(\mathscr{R}/\mathscr{J})$$

dir. Burada

$$\chi(H(\mathscr{R}/\mathscr{J})) = \dim_{\mathbb{R}} H_2(\mathscr{R}/\mathscr{J})_k - \dim_{\mathbb{R}} H_1(\mathscr{R}/\mathscr{J})_k + \dim_{\mathbb{R}} H_0(\mathscr{R}/\mathscr{J})_k$$

ve

$$\chi(\mathscr{R}/\mathscr{J}) = \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\alpha\in\Delta_2^o} R_k - \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\alpha\in\Delta_1^o} R/\mathfrak{J}(\alpha)_k + \dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\alpha\in\Delta_0^o} R/\mathfrak{J}(\alpha)_k$$

elde ederiz. $H_2(\mathscr{R}/\mathscr{J})$, $C^{\alpha}(\hat{\Delta})$ homojen spline modüldür ve $H_0(\mathscr{R}/\mathscr{J}) = 0$ dir. Ayrıca, Teorem 3.26 dan yeterince büyük k lar için $\dim_{\mathbb{R}} H_1(\mathscr{R}/\mathscr{J})_k = 0$ dır. Böylece teoremin ispatı biter. □

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\sigma\in\Delta_2^o} R_k = f_2^o \binom{k+2}{2}$$

ve $\tau \in \Delta_1^o$ için $\mathfrak{J}(\tau)$ esas ideal olduğundan

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\tau\in\Delta_1^o} R/\mathfrak{J}(\tau)_k = \sum_{i=1}^{f_1^o} \left[\binom{k+2}{2} - \binom{k+2-\alpha_i-1}{2} \right]$$

elde ederiz. Burada sadece

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\gamma\in\Delta_0^o} R/\mathfrak{J}(\gamma)_k$$

hesaplamaya ihtiyacımız vardır. Herhangi bir γ_i köşe noktasının doğrusal formları $\ell = a_1x + a_2y + a_3$ şeklindedir. Bu köşe noktasını orjine taşıdığımızda doğrusal formlar $\ell = b_1x + b_2y$ homojen denkleme dönüşür. Sonuç olarak, $\mathfrak{J}(\gamma_i)$ deki doğrusal formlar sadece x, y değişkenlerini içerir. Böylece,

$$\mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x,y]/\mathfrak{J}(\gamma_i) \simeq R/\mathfrak{J}(\gamma_i), \quad g(z)\otimes(f(x,y)+\mathfrak{J}(\gamma_i)) \mapsto g(z)f(x,y)+\mathfrak{J}(\gamma_i) \tag{3.2.17}$$

elde edilir. $\beta_j = \alpha_j + 1$ ve $\beta^i = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ olsun. Vektör β^i, $\mathfrak{J}(\gamma_i)$ için üstel vektörler olmak üzere $\mathfrak{J}(\gamma_i)$ nin minimal üreteç kümesi $\{L_1^{\beta_1}, \ldots, L_t^{\beta_t}\}$ dir. $\Omega^i = \left\lfloor \left| \frac{\sum_{j=1}^t \beta_j - t}{t-1} \right| \right\rfloor + 1$ ve $N_{\Omega^i} = \sum_{j=1}^t (\Omega^i - \beta_j + 1) - (\Omega^i + 1)$, $N_{\Omega^i+1} = \sum_{j=1}^t \beta_j + (1-t)\Omega^i$ olsun. $S = \mathbb{R}[x,y]$ için

$$0 \to \mathfrak{J}(\gamma_i) \xrightarrow{\iota} S \xrightarrow{\pi} S/\mathfrak{J}(\gamma_i) \to 0$$

bir tam dizidir. Bu tam diziyi Teorem 3.24 te $\mathfrak{J}(\gamma_i)$ nin çözümlemesi ile birleştirirsek, $S/\mathfrak{J}(\gamma_i)$ nin çözümlemesi

$$0 \to S(-\Omega^i)^{N_{\Omega^i}} \oplus S(-\Omega^i - 1)^{N_{\Omega^i+1}} \to \bigoplus_{j=1}^{t} S(-\beta_j) \to S \to S/\mathfrak{J}(\gamma_i) \to 0$$

olarak elde edilir. Bu çözümlemeden dolayı,

$$0 \to \mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} \left(S(-\Omega^i)^{N_{\Omega^i}} \oplus S(-\Omega^i - 1)^{N_{\Omega^i+1}} \right) \to$$
$$\mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} \left(\bigoplus_{j=1}^{t} S(-\beta_j) \right) \to \mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} S \to \mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} S/\mathfrak{J}(\gamma_i) \to 0$$

bir çözümlemedir (Hungerford, 1974, Sayfa 209, Proposition 5.4). Bu durumda, (3.2.17) ve $R \simeq \mathbb{R}[z] \otimes_{\mathbb{R}} S$ izomorfizmaları ile $R/\mathfrak{J}$ için

$$0 \to R(-\Omega^i)^{N_{\Omega^i}} \oplus R(-\Omega^i - 1)^{N_{\Omega^i+1}} \to \bigoplus_{j=1}^{t} R(-\beta_j) \to R \to R/\mathfrak{J}(\gamma_i) \to 0$$

serbest çözümleme elde ederiz. Bu çözümlemeyi k dereceye kısıtlayıp Hilbert polinomunu hesapladığımızda

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\gamma_i \in \Delta_0^o} R/\mathfrak{J}(\gamma_i)_k = \sum_{i=1}^{f_0^o} \left[\binom{k+2}{2} - \sum_{\beta_j \in \beta^i} \binom{k+2-\beta_j}{2} + \right.$$
$$\left. N_{\Omega^i} \binom{k-\Omega^i+2}{2} + N_{\Omega^i+1} \binom{k-\Omega^i-1+2}{2} \right]$$

elde edilir.

Teorem 3.28 *Δ bir simpleksel kompleks olsun. Bu durumda, yeterince büyük $k > 0$ için*

$$\dim_{\mathbb{R}} C_k^{\alpha}(\hat{\Delta}) = (f_2^o - f_1^o + f_0^o) \binom{k+2}{2} + \sum_{i=1}^{f_1^o} \binom{k+1-\alpha_i}{2} -$$
$$\sum_{i=1}^{f_0^o} \left[\sum_{\beta_j \in \beta^i} \binom{k+2-\beta_j}{2} - N_{\Omega^i} \binom{k+2-\Omega^i}{2} - N_{\Omega^i+1} \binom{k+1-\Omega^i}{2} \right]$$

olur.

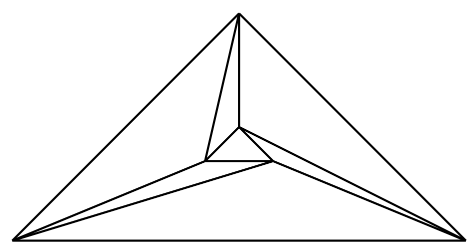
İspat. $\mathscr{R}/\mathscr{J}$ kompleks zincirindeki her bir modülün Hilbert polinomu yukarıda hesaplanmıştır. Teorem 3.27 den ispat biter. □

Örnek 3.29 *Şekil 3.2 deki simpleksel kompleks üzerindeki spline fonksiyonların boyutunu hesaplayalım.* $\alpha = (1,1,1,1)$ *olsun. Sadece iç köşe noktası olarak* $\gamma = (0,0)$ *vardır.* $\mathfrak{J}(\gamma) = \langle x^2, y^2, (2x-y)^2 \rangle$ *ve Sonuç 3.22 den bu küme* $\mathfrak{J}(\gamma)$ *nın mimnimal üreteç kümesidir. Yukarıdaki tanımlarımızla* $\Omega = 2$*,* $N_\Omega = 0$*,* $N_{\Omega+1} = 2$ *olarak hesaplarız. Teorem 3.28 den yeterince büyük* $k > 0$ *için*

$$\dim_{\mathbb{R}} C_k^{\alpha}(\hat{\Delta}) = \binom{k+2}{2} + \binom{k}{2} + 2\binom{k-1}{2}$$

dir.

□



Şekil 3.3:

Örnek 3.30 *Şekil 3.3 te merkezdeki üçgenin iç kenarları üzerinde* $\alpha_i = 2$*, dış kenarlarla iç kenarları birleştiren altı kenar üzerinde* $\alpha_i = 3$ *olsun. Üç tane iç noktanın her biri için* $\mathfrak{J}(\gamma)$*,* L_i *ler farklı doğrusal formlar olmak üzere* $\langle L_1^3, L_2^3, L_3^4, L_4^4 \rangle$ *şeklindedir. Sonuç 3.22 den* $\mathfrak{J}(\gamma)$*,* $\langle L_1^3, L_2^3, L_3^4 \rangle$ *minimal üreçleri ile üretilir. Buradan,* $\Omega = 4$*,* $N_\Omega = 0$*,* $N_{\Omega+1} = 2$ *olur ve böylece Teorem 3.28 den*

$$\dim_{\mathbb{R}} C_k^{\alpha}(\hat{\Delta}) = \binom{k+2}{2} - 3\binom{k-1}{2} + 3\binom{k-2}{2} + 6\binom{k-3}{2}$$

dir.

KAYNAKLAR

Alfeld, P. and Schumaker, L. L. 1987. The Dimension of Bivariate Spline Spaces of Smootness r for Degree $d >= 4r+1$. **Constructive Approximation, 3:** 189-197.

Alfeld, P. and Schumaker, L. L. 1990. On the Dimension of Bivariate Spline Spaces of Smoothness r and $d = 3r+1$. **Numer. Math., 57:** 651-661.

Billera, L. 1988. Homology of Smooth Splines: Generic Triangulations and a Conjecture of Strang. **Trans. Amer. Math Soc., 310:** 325-340.

Billera, L. and Rose, L. 1991. A Dimension Series for Multivariate Splines. **Discrete Comput. Geom., 6:** 107-128.

Billera, L. and Rose, L. 1992. Module of Piecewise Polynomials and Their Freeness. **Mathematische Zeitschritft, 209:** 485-497.

Capani, A. and Niesi, G. and Robbiano L. (12.09.2007). Computing in Commutative Algebra(CoCoA) (http://cocoa.dima.unige.it), Erişim Tarihi: 03.08.2008.

Cox, D. and Little, J. and O'Shea, D. 2005. Using Algebraic Geometry. Springer, New York.

Eisenbud, D. 1995. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Springer-Verlag, New York.

Ensalem, J. and Iarrobino, A. 1995. Inverse System of a Symbolic Power I. **Journal of Algebra, 174:** 1080-1090.

Geramita, A. V. and Schenck, H. 1997. Fat Points, Inverse Systems, and Piecewise Polynomial Functions. **Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics**, Queen's Univ., Kingston, Otario, 98-116 .

Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Springer-Verlag, New York.

Matsumura, H. 1986. Commutative Ring Theory. Cambridge University Press, New York.

Morgan, J. and Scott, R. 1975. A Nodal Basis for C^1 Piecewise Polynomials of Degree $n >= 5$. **Math. Comp., 29:** 736-740.

Schumaker, L. L. 1979. Lower Bounds for the Dimension of Spaces of Piecewise Polynomials in Two Variables. in W. Schempp and K. Zeller (eds.), *Multivariate Aproximation Theory*, **Birkhauser Verlag**, 396-412.

Schumaker, L. L. 1984. Bounds on the Dimension of Spaces of Multivariate Piecewise Polynomial. **Rocky Mountain J. of Math., 14:** 251-264.

Schenck, H. 1997. A Specrtal Sequence for Splines. **Adv. in Appl. Math., 19:** 183-199.

Schenck, H. and Stillman, M. 1997. A Family of Ideals of Minimal Regularity and the Hilbert Series of $C^r(\hat{\Delta})$. **Adv. in Appl. Math., 19:** 169-182.

Singer, I. M. and Thorpe, J. A. 1967. Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry. Springer-Verlag, New York.

Strang, G. 1973. Piecewise Polynomials and the Finite Element Method. **Bull. Amer. Math. Soc., 79:** 1128-1137.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Mehmet Soner Pehlivan
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Hatay, 22.12.1983

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
  -SCI
  -Diğer
b) Bildiriler
  -Uluslararası
  -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi,
	:	Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl. 2005 - ...

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	spehlivan@adu.edu.tr
Tarih	:	15.09.2008