

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2011-YL-0004**

**DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE
BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
 ε – YAKINSAKLIĞI**

Mustafa BARDAK

**DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ**

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Mustafa BARDAK tarafından hazırlanan Düzgün Ağlar Üzerinde Bir Sınır Değer Probleminin ε –Yakınsaklığı başlıklı tez, 29.07.2011 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN	Muğla Üniversitesi	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK	Adnan Menderes Üniversitesi	
Üye	:		
Üye	:		

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun sayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

29.07.2011

İmza

Mustafa BARDAK

ÖZET**DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE
BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
 ε – YAKINSAKLIĞI**

Mustafa BARDAK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ
2011, 60 sayfa

Bu tezde tekil noktada pertürbe edilmiş iki nokta sınır değer problemi için düzgün bir ağ üzerinde bir tam çözüm olan ε –düzgün yakınsak sonlu farklar metodu öne sürülür. İlk olarak yerel bir sınır değer problemi ile sorunun tekil pertürbasyon doğasını yansıtan uygun bir operatör yöntemi ile başlanır. Ancak yerel sınır değer problemini gerçekten çözmek yerine yerel bir Shishkin örüntüsü ile geri fark yöntemi kullanılır. Böylelikle tamamen yerel düğüm noktalarının nerelerde olduğu bilinmeden ve tam olarak herhangi bir diferansiyel denklemi sonlu farklar metodu yardımıyla çözmeden, ε –düzgün bir yöntem geliştirmenin mümkün olduğu gösterilir.

Doğada bir nehrin kıyısından yayılmakta olan bir atıklı kirli su birikintisini ya da bir bardak saf suyun içerisine bırakın bir mürekkep damlasını düşünün her iki durumda da kirli suyun ve bir damla mürekkebin içerisinde buldukları ortama yayıldıkları gözlemlenir. Temiz suyun birden bire mi yada nasıl bir şekilde bulanmaya başlayacağını hiç düşündünüz mü? Doğada bu tür problemlerin incelenmesi demek, matematiksel olarak konveksiyonun yanı sıra difüzyonun da gerçekleşmesini gerektirir. Gösterilmiş olan bu problem ile taşınım ve difüzyon hızının ε hassas bir sabit ile düzgün bir şekilde nasıl gerçekleştiğine bir kanıt teşkil edilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Sonlu farklar, ε -düzgün, Düzgün ağlar, Tekil pertürbasyon, Sabitlenmiş operatör metodu, Shishkin ağı.

ABSTRACT**AN ε -UNIFORM METHOD FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM ON
EQUIDISTANT MESHES**

Mustafa BARDAK

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ
2011, 60 pages

In this thesis we propose a fully discrete ε -uniform finite difference method on an equidistant mesh for a singularly perturbed two-point boundary value problem. We start with a fitted operator method reflecting the singular perturbation nature of the problem through a local boundary value problem. However, to solve the local boundary value problem we employ an upwind method on a Shishkin mesh in local domain, instead of solving it exactly. Thus we show that it is possible to develop ε -uniform method, totally in the context of finite differences without knowing location of the layer a priori and without solving any differential equation exactly.

Imagine a river-a river flowing strongly and smoothly. Liquid pollution pours into the water at a certain point or Imagine a drop of ink dropped into a glass of water. What shape does the pollution stain form on the surface of the river or ink in the glass of water? In real life, we need diffusion to explain this problem near by the convection. We further study the convergence properties of the numerical method proposed and prove that it nodally convergence to the true solution for any ε .

Key Words

Finite differences, Uniform convergence, ε -uniform, Singular perturbation, Fitted operator method, Shishkin mesh.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez yazım sırasında değerli bilgilerini esirgemeyen hocalarım Doç. Dr. İbrahim ÇANAK ve Yrd. Doç. Dr. Ali IŞIK'a eşsiz yorumlarıyla sağlamış oldukları bilimsel katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan anne ve babama sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümüne ve Matematik alanında bilgilerini paylaşarak bana destek olduklarından dolayı değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa BARDAK

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI	iii
İNTİHAL BEYAN SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMLERİ	4
2.1. Bir Konveksiyon-Difüzyon Probleminin İncelenmesi	4
2.2. Tekil Noktada Pertürbe Edilmiş Problem için Nümerik Yöntem	5
3. STANDART NÜMERİK METOTLARA ÖRNEKLER	10
3.1. Bir Konveksiyon-Difüzyon Problemi için Merkezi Fark Metodu	10
3.2. Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Geri Fark Metodu	13
4. DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ε - YAKINSAKLIK	19
4.1. Green Fonksiyonu ve Local Green Fonksiyonunun Özellikleri	19
5. PARÇALI DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR YÖNTEMİN OLUŞTURULMASI	31
5.1. Düzensiz Kaynak Fonksiyonu	32
6. NÜMERİK YÖNTEMİN ÇIKARILMASI	35
6.1. Sekiz Bilinmeyenli Sistemin Elde Edilmesi ve Çözümü	35
7. YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ	46
8. ÖRNEK PROBLEM	55
8.1. Nümerik Çözüm ve Tartışma	55
9. SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58

ÖZGEÇMİŞ **60**

SİMGELER DİZİNİ

I	:	birim
L	:	diferensiyel operatör
L^*	:	adjoint operatör
g, G	:	Green fonksiyonu
$V(\overline{\Omega}^N)$:	ω^N 'de Lineer vektör uzayı
D^+V_i, D^2V_i	:	birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark operatörleri
D^-V_i, D^0V_i	:	Geri fark ve merkezi fark operatörleri
$\ \cdot\ _{0,p}$:	$L_p(\omega)$ üzerinde norm
$\ \cdot\ _V$:	V uzayı üzerinde norm
Ω	:	Verilen sınır değerlerin tanım kümesi
$\delta\Omega = \Gamma$:	Omeganın sınırları
R	:	Reel sayılar kümesi
D	:	R^N 'de sınırlı bir bölge
$C^k(D)$:	D üzerinde k-inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonların uzayı
ε	:	tekil pertürbasyon parametresi
$L_p(\omega)$:	$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere fonksiyon uzayı

1. GİRİŞ

ε , difüzyonun konveksiyona göre bağıl miktarını ölçmek için kullanılan küçük bir parametre olmak üzere $\Omega = [0, 1]$ aralığı üzerinde

$$\begin{cases} u(0) = u_0, u(1) = u_1 \text{ ve } u(x) \in C^2(\overline{\Omega}) \\ \forall x \in \Omega \text{ için } Lu = -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \end{cases} \quad (1.0.1)$$

konveksiyon-difüzyon problemi için hem eş uzunluklu hemde parçalı düzgün ağlar üzerinde nümerik çözüm teknikleri incelenecektir. Burada $b(x)$, $c(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları düzgün fonksiyonlar ve ayrıca $b(x)$ fonksiyonu

$$b(x) > \alpha > 0$$

mutlak eşitsizliğini sağlar. (1.0.1) konveksiyon-difüzyon problemi; günlük hayatımızda, akışkanların incelenmesi, kuru toprakta nemin taşınması, demirin paslanması, bir kimyasal reaksiyonun adım adım duyarlılığının ölçülmesi (Demir içine Karbon difüzyonu: TMS, Warrendale, Pennsylvania, 1994 yılında Poirier, DR ve GH Geiger), bir EKG cihazının daha hassas ölçümler yapabilmesi, gelişen teknolojik aletlerin (RF ve mikrodalga antenleri. Mikrodalga linklerinde kanal modelleme ve link analizi, konumlama (GPS) ve uydu sistemleri vb.) daha hassas sonuçlar üretebilmeleri ve bunlara bağlı uygulamaların gelişimi açısından önem kazanmıştır. Akışkan ve dalga hareketlerinin önemli bir rol oynadığı problemlerde, konveksiyon etkisi dikkate alınmalıdır. Doğada konveksiyonun yanında daima difüzyon olayı gerçekleşir. Bu nedenle; konveksiyon ve difüzyonu birlikte ele alan sayısal çözümleme yöntemlerine yani yakınsak metodlara ihtiyaç duyulur. Bu anlamda konveksiyon-difüzyon problemleri günümüze kadar bir çok matematikçinin araştırma konusu olmuştur. Bu konuda en geniş çalışmalardan biri ilk olarak Varga (1962) daha sonra (1976) Tobiska ve Shishkin (1988; 1989; 1991; 1992; 1995; 2000) tarafından verilen problemin bazı sınır değerleri için uygun ε -düzgün hata analizleri yapılarak çözümlere ulaşılmaya çalışılmıştır. Bununla birlikte kullanılan algoritma ve yazılımların günümüz bilgisayarlarıyla kıyaslandığında daha hassas sonuçlar

verebileceği düşünülemez. Bu tezde sınır değerleri verilen bir konveksiyon-difüzyon probleminin gerçek çözümüne en yakın olan sayısal yaklaşımlara alternatif bir metod geliştirilerek düzgün ağlar üzerinde ε -yakınsak bir metod elde edilecektir. Elde edilen bu yeni metodun daha sonra farklı değişkenler kullanılarak analizi yapılacak ve sembolik hesaplama yazılımlarından MATLAB programı yardımıyla ε -düzgün yakınsayan metodun esaslarına dayanan kodlar oluşturulacaktır.

Tez içerisinde, düzgün bir ağ üzerinde konveksiyon-difüzyon probleminin nümerik yaklaşımları araştırılacaktır. Tezde aşağıdaki gibi bir yol izlenecektir:

İkinci bölümde konveksiyon-difüzyon problemlerine genel bir bakış olarak konveksiyon-difüzyon probleminin analitik davranışı incelenecek ve tekil noktada pertürbe edilmiş problemler için nümerik metodlar verilecektir.

Üçüncü bölümde, konveksiyon-difüzyon ve sınır değer problemleri için var olan standart nümerik metodlar göz önüne alınarak bunlardan merkezi fark ve geri fark metodları ile örnek problem üzerinde çözümlerinin yakınsama grafikleri sunulacaktır.

Dördüncü bölümde, düzgün ağlar üzerinde bir sınır değer probleminin yeterince küçük bir ε değeri için yakınsaklığı incelenecek ve düzgün ağlar üzerinde ε -yakınsak bir metod geliştirebilmek için yararlanacağımız Green fonksiyonundan bahsedilecek ve özellikleri verilecektir.

Beşinci bölümde, Shiskin ağı olarak adlandırılan parçalı düzgün bir ağ tanıtılarak, düzgün bir ağ örneğine değinilecek ve düzensiz kaynak fonksiyonunun analizi yapılarak düzensiz yeni bir fonksiyon elde edilmesi için çalışılacaktır .

Altıncı bölümde, düzgün ağlar üzerinde bir sınır değer probleminin çözümü için elde edilen düzensiz kaynak fonksiyonundan yararlanılarak geliştirilen yeni nümerik çözümün öncelikle elde edilmesi ve matrislerinin oluşumu daha sonra sembolik programlama dillerinden herhangi biri yardımıyla sekiz bilinmeyenli sekiz denklem ile oluşturulan lineer denklem sisteminin çözümü verilecektir.

Yedinci bölümde, yakınsaklık özellikleri sunulacak, limit durumları incelenecek ve yardımcı teoremler yardımıyla yeni algoritmanın gerçek çözüme dögümsel olarak

yakınsaklığı ispatlanacaktır.

Sekizinci bölümde ise elde edilen yeni metod için örnek bir problem ele alınarak nümerik çözüm çıktıları farklı ϵ değerleri için tablolar halinde sunulacaktır.

2. KONVEKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMLERİ

2.1 Bir Konveksiyon-Difüzyon Probleminin İncelenmesi

Bu bölüme konveksiyon-difüzyon olgusunun nerede ortaya çıktığının açıklanmasıyla başlanır ve sonra $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir boyutlu bir konveksiyon-difüzyon denklemi tam çözümün davranışıyla birlikte verilir. Konvektif ve difüzyon işlemlerin bir kombinasyonunu içeren matematiksel modeller; bütün bilimlerde, mühendislikte ve matematiksel modellemenin önemli olduğu diğer alanlarda en yaygın olanlar arasındadır. Su kalitesi problemleri, konvektif ısı transfer problemleri ve yarı iletken cihazların simülasyonu bu modellere birer örnek olarak verilebilir. Ayrıca Navier-Stokes denkleminin doğrusallaştırılması ve yarı iletken cihaz modellemenin drift-difüzyon denklemi önemli örneklerdir.

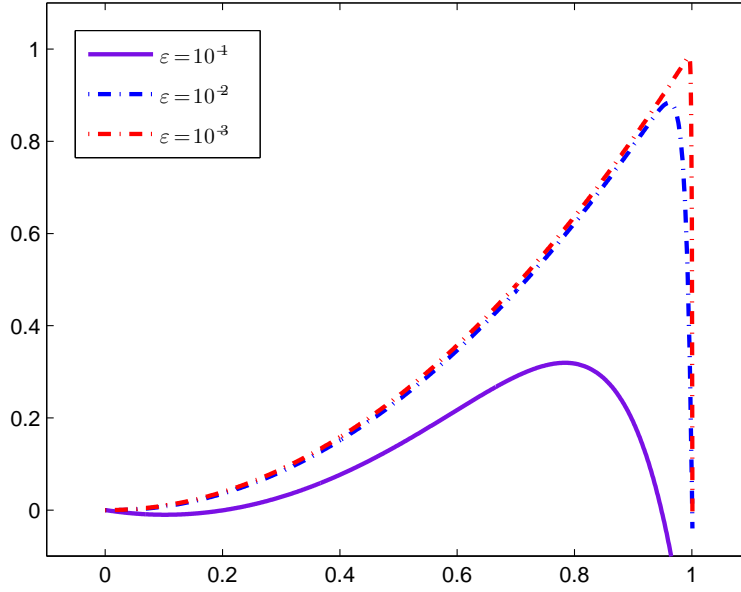
Çoğu kez yayılmanın bağıl gücünü ölçen boyutsuz parametre oldukça küçüktür; dolayısıyla ince sınır ve iç katmanların mevcut olduğu durumlarla sıkça karşılaşılır ve tekil pertürbasyon problemleri ortaya çıkar. $\Omega = [0, 1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki problem yardımıyla, bir boyuttaki problemin analitik davranışı anlaşılır. $b > 0$ olmak üzere ve $C^2(\Omega)$, Ω üzerinde iki kez diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayını göstermek üzere

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad \text{ve} \quad u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \\ \forall x \in \Omega \quad \text{için} \quad Lu = -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım (Filiz, 2010). (2.1.1) sınır değer probleminin $b(x) = 1$, $c(x) = 0$ ve $f(x) = 2x$ için gerçek çözümü

$$u(x) = \frac{1 - e^{x/\varepsilon} - x^2 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}x^2 + 2\varepsilon - 2e^{x/\varepsilon} - 2x\varepsilon + 2e^{\frac{1}{\varepsilon}}x\varepsilon}{-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (2.1.2)$$

olarak bulunur. Çözümdeki üstel fonksiyon $-1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ argümanına sahip olduğundan çözüm $(1 - \varepsilon, 1)$ aralığında hızla değişir. Yani ε sifira yaklaşıırken, $x = 1$ civarında bir sınır katmanı vardır ve bu, ε genişliğindedir. Şekil 2.1; $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $b = 1$ ve



Şekil 2.1: Farklı ε değerleri için (2.1.1) probleminin tam çözümü

$c = 0$ alınarak $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ değerleri için çizilmiştir.

Bu durum, sınır katmanı kalınlığının ε küçüldükçe incelmesini gösterir. Ancak, problemin nümerik çözümlerini bulmak zordur. Dolayısıyla, konveksiyon-difüzyon problemlerinin yaklaşımı için etkin algoritmalar geliştirmek önemlidir.

2.2 Tekil Noktada Pertürbe Edilmiş Problem için Nümerik Yöntem

Bu bölümde, tekil olarak pertürbe edilmiş problemleri çözmek için kullanılan nümerik metotlar gözden geçirilir ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı gösterimler, sonlu fark operatörleri, fonksiyon uzayları, normlar ve yarı normlar tanımlanır. D, R' 'de sınırlı bir bölge olsun. Ω sınırlı bir açık aralık olmak üzere genel olarak $D = \Omega$ veya $D = \overline{\Omega}$ olur. $C^0(D)$, D üzerinde, herhangi bir $f \in C^0(D)$ fonksiyonunun normu

$$\|f\|_D = \sup |f(x)| \quad \forall x \in D$$

ile tanımlanmak üzere sürekli fonksiyonların uzayını gösterebilir. Her bir $k \geq 1$ tamsayısı için $C^k(D)$, D üzerinde k -inci mertebeyi de içeren sürekli türevlerle k kez türevlenebilir fonksiyonların uzayını gösterebilir. Söz konusu olan tanım bölgesi biliniyorken, gösterimlerde D kullanılmayabilir. Keyfi bir $\bar{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ ağı üzerindeki herhangi bir V ağ fonksiyonu için ayrık maksimum norm

$$\|V\|_{\bar{\Omega}^N} = \max |V_i| \quad 0 \leq i \leq N$$

ile tanımlanır. $\bar{\Omega}$ üzerinde tanımlanan bütün ağ fonksiyonlarının $\|\cdot\|_{\bar{\Omega}^N}$ normuyla donatılmış lineer vektör uzayı $V(\bar{\Omega}^N)$ ile gösterilir. Ağın $\bar{\Omega}^N$ olduğu biliniyorsa, bu kısım gösterimden atılabilir.

İlerleyen bölümlerde ele alınacak olan nümerik yöntemleri oluşturmak için aşağıdaki ağ tanımlamalarına, sonlu fark operatörlerine ve tanımlara gerek duyulur.

$\Omega = (0, 1)$ aralığı üzerinde, her $N \geq 2$ tamsayısı için $\bar{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ düzgün ağı, birbirinden düzgün bir

$$0 \leq i \leq N \text{ için } h = x_i - x_{i-1} = 1/N$$

adım uzunluğuyla ayrılmış olan

$$0 \leq i \leq N \text{ için } x_i = i/N$$

$N + 1$ tane ağ noktası alınarak tanımlanır. Aynı sonuca ulaşmanın alternatif bir yolu Ω aralığını $h = 1/N$ uzunluğunda N adet $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ ağ elemanına bölmektir. Bu düzgün ağlar üzerindeki birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark operatörleri

$$\begin{aligned} D^+ V_i &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h}, & D^- V_i &= \frac{V_i - V_{i-1}}{h}, \\ D^0 V_i &= \left(\frac{D^+ + D^-}{2} \right) V_i = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanır. D^+ ve D^- herhangi bir fonksiyonun ilk türevine birinci mertebeden bir yaklaşım verirken D^0 ikinci mertebeden bir yaklaşım verir. İkinci mertebeden fark operatörü D^2 ileri ve geri fark operatörleri düzenlenerek elde edilir ve herhangi bir fonksiyonun ikinci türevine ikinci mertebeden bir yaklaşım verir.

$$D^2 V_i = \frac{(D^+ - D^-)}{h} V_i = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (2.2.4)$$

Sonraki bölümlerde ağlar artık düzgün olmayacağından yukarıdaki tanımın düzgün ağlardan düzgün olmayan ağlara genişletilmesi gerekir. Eğer $1 \leq i \leq N$ için $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ N alt aralığıyla verilen keyfi bir düzgün olmayan ağdaki ağ noktaları $\overline{\Omega}^N = \{x_i\}_0^N$ ile gösterilse, ağ noktaları

$$1 \leq i \leq N \text{ için } h_i = x_i - x_{i-1}$$

uzaklığı ile ayrılır. Düzgün olmayan ağlar için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark operatörleri, $1 \leq i \leq N - 1$ için

$$\bar{h}_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D^+ V_i &= \frac{V_{i+1} - V_i}{h_{i+1}}, & D^- V_i &= \frac{V_i - V_{i-1}}{h_i}, \\ D^0 V_i &= \frac{h_{i+1} D^+ + h_i D^-}{2\bar{h}_i} V_i, & D^2 V_i &= \frac{(D^+ - D^-)}{\bar{h}_i} V_i \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ile verilir. Tekil olarak pertürbe edilmiş diferansiyel denklemleri içeren problemlerin nümerik çözümleri, düzgün bir ağ üzerinde (2.2.3) ile tanımlanan standart sonlu fark operatörü kullanılarak ve daha sonra singüler pertürbasyon parametresinin büyüklüğü azalırken sınır veya iç katmanları yakalamak için ağ daha fazla inceltilecek elde edilir. Böylece bir-boyuttaki problemler için bile metotlar etkin değildi ve yüksek mertebelerdeki problemler için isabetli çözümler elde edilemiyordu. Gelecek bölümde bu yöntemlerin isabetli sonuç elde etmede neden başarısız olduklarıyla ilgilenilecektir. Bu durumda doğal bir soru ortaya çıkar:

Ne kadar küçük olduğuna bakılmaksızın tekil pertürbasyon parametresinin bütün değerleri için düzgün olarak davranan nümerik metotlar oluşturmak mümkün müdür?

İlerleyen bölümlerde bir nümerik metodun ε -düzgün yakınsaklığa sahip olduğunu söyleyebilmek için aşağıdaki tanım gereklidir.

Tanım 2.1 $0 < \varepsilon \leq 1$ yarı-açık aralığında yer alan bir ε tekil pertürbasyon parametresiyle parametrelenmiş matematiksel problemlerin bir ailesi göz önüne

alınsın. Ailedeki her problemin u ile gösterilen tek bir çözüme sahip olduğunu ve $U, \overline{\Omega}^N$ ağı üzerinde tanımlı olmak üzere ve N diskretizasyon parametresi olmak üzere her u çözümüne $\{(U, \overline{\Omega}^N)\}_{N=1}^{\infty}$ nümerik çözümlerin bir dizisiyle yaklaşıldığı varsayalım. Bu durumda eğer N_0, C ve $p; N$ ve ε değerinden bağımsız olmak üzere her $N \geq N_0$ için

$$\sup \|U - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-p}$$

olacak şekilde bir N_0 pozitif tam sayısı, C ve p pozitif sayıları varsa u 'nun nümerik çözümünün u 'nun tam çözümüne ε -düzgün yakınsadığı söylenir. Burada p sayısına ε -düzgün yakınsaklık oranı ve C sayısına da ε -düzgün hata sabiti denir.

Bir sonlu fark metodunun iki temel bileşeni vardır: Birincisi L diferansiyel operatörüne yaklaşmak için kullanılan L^N sonlu fark operatörü ve ikincisi Ω sürekli tanım bölgesiyle yer değiştiren Ω^N ağıdır. Standart sonlu fark metotları dendiğinde, tekil olarak pertürbe edilmemiş problemlere başarılı bir şekilde uygulanan sonlu fark metotlarının hemen hemen hepsi anlaşılır. Bu metotların bir çoğu iyi bilinir ve bu metotları geliştirenlerden bazılarının adlarıyla anılır. Genellikle bu metotlar kararlı ve isabetlidir ve dolayısıyla $N \rightarrow \infty$ giderken bunların çözümleri tam çözüme yakınsar. Diğer taraftan bu metotların hiçbiri ε -düzgün değildir ve bazı yeni nitelikler gereklidir.

ε -düzgün metotların oluşturulmasında genellikle iki yaklaşım gündeme gelir. Bunlardan ilki standart sonlu fark operatörünün yerine, diferansiyel operatörün tekil pertürbe doğasını yansıtan bir sonlu fark operatörünün alınmasını içerir. Genelde böyle sonlu fark operatörlerine sabitlenmiş sonlu fark operatörleri denir. Bunlar bazı durumlarda, örneğin lineer problemlerde, katsayıları diferansiyel operatör veya onun parçasının sıfır uzayında bulunan üstel fonksiyonların tümü veya bazıları yine diferansiyel operatörün sıfır uzayında kalacak biçimde seçilerek oluşturulabilir. Böyle durumlarda sonlu fark operatörüne üstel olarak sabitlenmiş bir sonlu fark operatörü denir. Buna karşılık gelen nümerik metot, uygulamada genellikle bir düzgün ağ olan standart bir ağ üzerindeki sonlu fark denklemlerinin bir sistemini elde etmek için sabitlenmiş sonlu fark operatörleri uygulanarak elde edilir. Daha

sonra bu sistem, yaklaşık çözümleri elde etmek için kullanışlı bir yöntemle çözülür. Sabitlenmiş sonlu fark operatörlerinin oluşturulmasındaki diğer yaklaşımlar (Roos, 1994) te gösterilmiştir.

ε -düzgün nümerik metotların oluşturulmasında ikinci başarılı yaklaşım tekil pertürbasyona uyarlanmış bir ağın kullanımına dayanır. Böyle metotlar sabitlenmiş ağ metotları olarak adlandırılır. Daha sonra, yaklaşık çözümler elde etmek için alışılmış yöntemle çözülen sonlu fark denklemlerinin bir sistemini elde etmek için sabitlenmiş ağ üzerinde bir standart sonlu fark operatörü uygulanır. Bir parçalı düzgün ağ; yani farklı ağ parametrelerine sahip olan sonlu sayıda düzgün ağların birleşimi olan bir ağ genellikle yeterlidir. Bu parçalı düzgün sabitlenmiş ağlar ilk olarak Shishkin tarafından tanıtılmış (Shishkin, 1998) ve (Shishkin, 1992) ile sonlanan bir dizi makaleyle ilgili nümerik metotlar daha da geliştirilmiş ve ε -düzgün oldukları gösterilmiştir. Bir sabitlenmiş ağ metodunu kullanan ilk nümerik sonuçlar (Millet et al, 1991) de sunulmuştur. Ağı uyarlamak için, ağ noktalarının karmaşık dağılımlarını içeren farklı yaklaşımlar (Liseikin, 1983; Vulcanovic, 1986; Gartland, 1988; Bakhlavov, 1996) da ele alınmıştır, ancak hiç biri parçalı düzgün sabitlenmiş ağların basitliğine sahip değildir.

Yukarıdaki düşünceler hem sabitlenmiş operatörlerin hemde sabitlenmiş ağların geliştirilmesi gerektiğini gösterir. Dördüncü ve beşinci bölümde her bir tekniğin örneği sunulur. Uygulamada, sabitlenmiş ağları kullanan metotlar sabitlenmiş operatörleri kullanan metotlardan genellikle daha basit uygulanabilir olduğu için tavsiye edilir. Ayrıca bunları birden çok boyuttaki problemlere ve lineer olmayan problemlere genelleştirmek daha kolaydır.

3. STANDART NÜMERİK METOTLARA ÖRNEKLER

Bu bölümde, bir düzgün ağ üzerinde (2.1.1) problemi için standart nümerik metotlar kullanılır ve bu metotların problemin analitik çözümüne yakınsamakta neden başarısız oldukları açıklanır. İlk türeve sırasıyla D^0 merkezi fark operatörü ve D^- geri fark operatörüyle yaklaşılır. (2.1.1) denkleminde $c(x) = 0$, $f(x) = 0$ ve sınır koşulları olarak $U_0 = 1$ ve $U_1 = 0$ alınmaktadır.

3.1 Bir Konveksiyon-Difüzyon Problemi için Merkezi Fark Metodu

Örnek 3.1 $(0, 1)$ aralığında $u(0) = 1$ ve $u(1) = 0$ sınır değerleri ile verilen

$$-\varepsilon u'' + bu' = f(x) \quad (3.1.1)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemin gerçek çözümü $b = 1$ ve $f(x) = 0$ alındığında

$$u(x) = \frac{1 - e^{-(1-x)/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

Ω 'nın $\bar{\Omega}^N$ düzgün parçalanışı için

$$L^N = -\varepsilon D^2 + bD^0$$

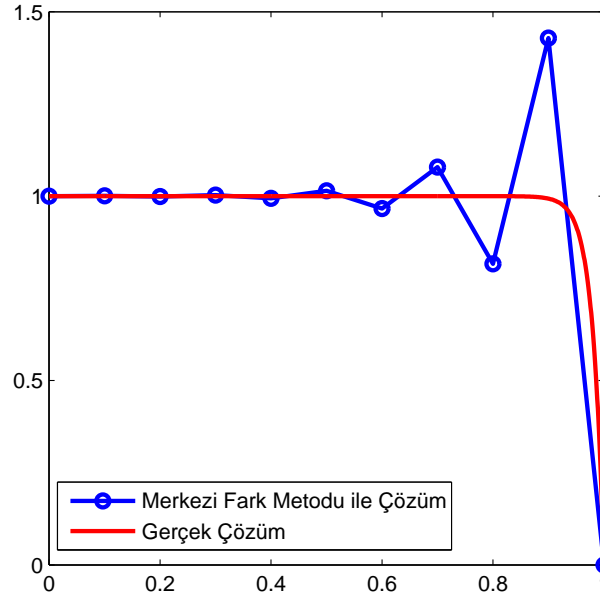
ayrık operatörü göz önüne alınsın. Bu, (3.1.1) probleminde D^0 merkezi fark operatörüyle ilk türeve ve D^2 ikinci dereceden fark operatörüyle ikinci türeve yakınsar. $U_i \approx u(x_i)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \quad U \in V(\bar{\Omega}^N) \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega^N \quad \text{için} \\ L^N U_i = -\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + b \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

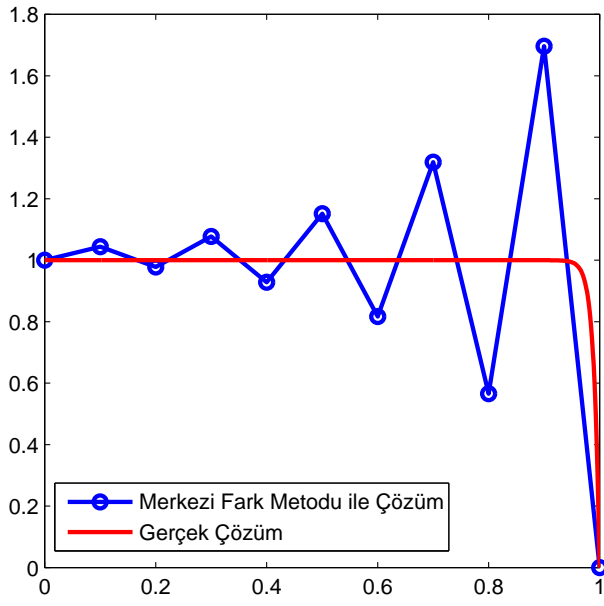
elde edilir. (3.1.3) denkleminde aynı indisli terimler bir araya getirilerek $\rho = bh/\varepsilon$ olmak üzere

$$(-1 + \rho)U_{i+1} + 2U_i + (-1 - \rho)U_{i-1} = f_i \quad (3.1.4)$$

fark denklemi elde edilir. Bu durum bize $N - 1$ bilinmeyenli bir denklem sistemi verir. (2.1.1) probleminin yaklaşık çözümü, sistem çözülerek elde edilebilir. Bazı nümerik sonuçlar; $N = 50$ ve $b = 1$ ile ε 'un farklı değerleri için aşağıdaki şekillerde, tam çözüm ile birlikte verilir. Bunlar nümerik sonuçların ε 'un büyük değerleri için tam çözüm ile tutarlı olduklarını gösterir. Ancak $\varepsilon = 10^{-3}$ için salınım yapar.



Şekil 3.1: $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ için Merkezi Fark Metodu ile Çözüm



Şekil 3.2: $\varepsilon = 10^{-1}$ için Merkezi Fark Metodu ile Çözüm

Bu durum, (3.1.4) fark denklemi tam olarak çözümlenerek açıklanabilir. Fark denkleminde $U_i = r^i$ seçilir ve çıkan ifade r^{i-1} ile bölünürse

$$(-1 + \rho)r^2 + 2r + (-1 - \rho) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

olarak bulunur. Böylece (3.1.4) fark denkleminin genel çözümü

$$U_i = a_1 r_1^i + a_2 r_2^i = a_1 + a_2 \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^i \quad (3.1.5)$$

ile verilebilir. Sınır koşulları, yani $U_0 = 1$ ve $U_N = 0$ uygulanarak (3.1.4) fark denkleminin tek çözümü bütün $0 \leq i \leq N$ için

$$U_i = \frac{1 + \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^i}{1 - \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^N} \quad (3.1.6)$$

olarak bulunur. Eğer $\rho < 1$ ise nümerik çözümün iyi sonuçlar verdiği görülür. Bununla birlikte (3.1.6) çözümü, $\rho > 1$ ($\varepsilon < 0.01$) ise, bu durumda r_2 kökü negatif olabileceğinden nümerik çözümlerin salınım yapabileceğini açıkça gösterir. Böylece merkezi fark metodunun (2.1.1) problemi için sağlam olmadığı sonucuna varılabilir.

3.2 Konveksiyon-Difüzyon Problemleri için Geri Fark Metodu

Geri Fark yöntemi için Örnek (3.1) sınır değer problemini tekrar ele alalım. Bu bölümde ilk türeve D^- geri fark operatörüyle yaklaşılır. Bütünleşmiş ayrık operatör

$$L^N = -\varepsilon D^2 + b D^-$$

ile verilir ve (3.1.1) denkleminin upwind uygulanırsa

$$\begin{cases} u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \quad U \in V(\bar{\Omega}^N) \quad \text{ve} \quad \forall x_i \in \Omega^N \quad \text{için} \\ L^N U_i = -\varepsilon \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right) + b \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h} \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

olmak üzere, gerçek çözümü (3.1.2) olan (3.1.1) sınır değer probleminin Upwind (geri fark) yöntemiyle nümerik çözümü, $U_{i-1} = U(x_{i-1})$ ve $U_0 = U(x_0)$ kabulü ile

$$-\varepsilon \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right) + \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h} \right) = 0 \quad (3.2.8)$$

bulunur. (3.2.8) upwind (geri fark) açılımı düzenlenirse,

$$-U_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h^2} \right) + U_i \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} \right) + U_{i-1} \left(-\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h} \right) = 0 \quad (3.2.9)$$

denklemini elde edilir. Burada parantez içerisindeki ifadelerle sırasıyla a_2 , b_2 ve c_2 dönüşümü uygulanırsa, $a_2 = \frac{\varepsilon}{h^2}$, $b_2 = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}$ ve $c_2 = -\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}$ olmak üzere (3.2.9) denklemini tekrar yazılırsa,

$$-a_2 U_{i+1} + b_2 U_i + c_2 U_{i-1} = 0 \quad (3.2.10)$$

elde edilir. (3.2.10) denkleminde $U_i = r^i$ dönüşümü yapılarak tekrar yazılırsa,

$$-a_2 r^{i+1} + b_2 r^i + c_2 r^{i-1} = 0 \quad (3.2.11)$$

(3.2.11) fark denklemini elde edilir. $U_i = r^i$ eşitliğinde $i = 1$ alınır, elde ettiğimiz (3.2.11) fark denklemini,

$$-a_2 r^2 + b_2 r + c_2 = 0 \quad (3.2.12)$$

olup, ikinci dereceden bir polinom halini alır. İkinci dereceden (3.2.12) denkleminin kökleri,

$$r_{1,2} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 + 4a_2 c_2}}{-2a_2}$$

şeklindedir. Burada,

$$b_2^2 + 4a_2 c_2 = (a_2 - c_2)^2 + 4a_2 c_2 = a_2^2 + 2a_2 c_2 + c_2^2 = (a_2 + c_2)^2$$

olup,

$$b_2^2 + 4a_2 c_2 = (a_2 - c_2)^2 + 4a_2 c_2 = (a_2 + c_2)^2 \quad (3.2.13)$$

ve

$$b_2 = a_2 - c_2 \implies \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} = \frac{\varepsilon}{h^2} - \left(-\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h} \right) \quad (3.2.14)$$

olmak üzere (3.2.13) ve (3.2.14) eşitlikleri $r_{1,2}$ de yerine yazılırsa,

$$r_{1,2} = \frac{-b_2 \pm (a_2 + c_2)}{-2a_2} \quad (3.2.15)$$

$$= \frac{-(a_2 - c_2) \pm (a_2 + c_2)}{-2a_2} \quad (3.2.16)$$

olmak üzere (3.2.12) denkleminin kökleri sırasıyla,

$$r_1 = \frac{-(a_2 - c_2) - (a_2 + c_2)}{-2a_2} \quad (3.2.17)$$

$$= \frac{-a_2 + c_2 - a_2 - c_2}{-2a_2} \quad (3.2.18)$$

$$= \frac{-a_2 - a_2}{-2a_2} \quad (3.2.19)$$

$$= 1 \quad (3.2.20)$$

ve benzer şekilde,

$$r_2 = \frac{-(a_2 - c_2) + (a_2 + c_2)}{-2a_2} \quad (3.2.21)$$

$$= \frac{-a_2 + c_2 + a_2 + c_2}{-2a_2} \quad (3.2.22)$$

$$= \frac{2c_2}{-2a_2} \quad (3.2.23)$$

$$= -\frac{c_2}{a_2} \quad (3.2.24)$$

olarak bulunur. r_2 için c_2 ve a_2 değerleri yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}}{\frac{\varepsilon}{h^2}} = 1 + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)$$

olup, $\rho = \frac{h}{\varepsilon}$ dönüşümü yapılırsa, $r_2 = 1 + \rho$ elde edilir. (3.2.12) denkleminin kökleri olan r_1 ve r_2 ifadeleri

$$U_i = d_1 r_1^i + d_2 r_2^i \quad (3.2.25)$$

(3.2.25) fark denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$U_i = d_1 (1)^i + d_2 (1 + \rho)^i \quad (3.2.26)$$

denklemini elde edilir. $U_0 = U(0) = 1$ ve $U(1) = U(x_N) = 0$ sınır değerleri için, fark denklemleri,

$$U_0 = 1 \quad \text{iken} \quad d_1 + d_2(1 + \rho)^0 = d_1 + d_2 = 1 \quad (3.2.27)$$

$$U_1 = 0 \quad \text{iken} \quad d_1 + d_2(1 + \rho)^N = d_1 + d_2(1 + \rho)^N = 0 \quad (3.2.28)$$

olur. (3.2.27) ve (3.2.28) denklem sisteminden d_1 ve d_2 katsayıları çözümlenerek, $d_1 = -d_2(1 + \rho)^N$ olmak üzere (3.2.27) denklemine yerine yazılırsa,

$$-d_2(1 + \rho)^N + d_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{1}{1 - (1 + \rho)^N} \quad (3.2.29)$$

$$d_1 = -d_2(1 + \rho)^N \quad \Rightarrow \quad d_1 = -\frac{1}{1 - (1 + \rho)^N}(1 + \rho)^N \quad (3.2.30)$$

elde edilir. (3.2.30) ve (3.2.29) ifadeleri, (3.2.26) de yerlerine yazılırsa,

$$U_i = -\frac{(1 + \rho)^N}{1 - (1 + \rho)^N} + \frac{1}{1 - (1 + \rho)^N}(1 + \rho)^i \quad (3.2.31)$$

olarak bulunur. (3.2.31) eşitliği $(1 + \rho)^{-N}$ ile çarpılırsa,

$$U_i = \frac{-1 + (1 + \rho)^{1-N}}{(1 + \rho)^{-N} - 1} = \frac{1 - (1 + \rho)^{1-N}}{1 - (1 + \rho)^{-N}} \quad (3.2.32)$$

elde edilir. (3.2.32) denklemi (3.2.7) sınır değer probleminin nümerik çözümüdür. O halde (3.2.7) probleminde elde edilen bu gerçek ve nümerik çözümlerin ne kadar örtüşüklerini incelemek için, her iki çözümün farkının limit durumuna bakılırsa, (3.2.7) denkleminin $U(0) = 1$ ve $U(1) = 0$ sınır değerleri için $1 = \varepsilon = h = \frac{1}{N}$ olmak üzere,

$$x = 1 \Rightarrow Nh = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{N} \text{ ve } \rho = 1 \Rightarrow -\varepsilon = -\frac{1}{N}$$

dir.

$$i = N - 1 \Rightarrow (U - u)_{X_{N-1}} = \frac{1 - 2^{N-1-N}}{1 - 2^{-N}} - \frac{1 - e^{-(1-x_{N-1})/\varepsilon}}{1 - e^{-N}}$$

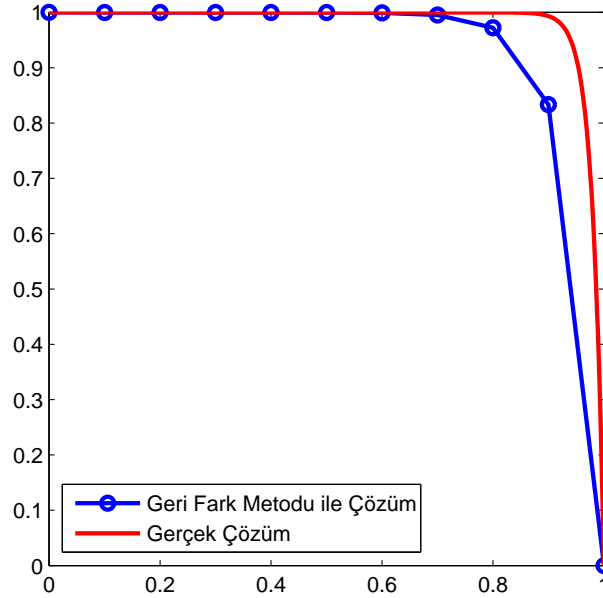
olup, $\frac{h}{\varepsilon} = 1$, $1 = \varepsilon = h$ ve $e^{-1+1+\frac{h}{\varepsilon}} = \rho$ olduğundan,

$$(U - u)_{X_{N-1}} = \frac{1 - 2^{-1}}{1 - 2^{-N}} - \frac{1 - e^{-(1-(N-1)h)/\varepsilon}}{1 - e^{-N}} \quad (3.2.33)$$

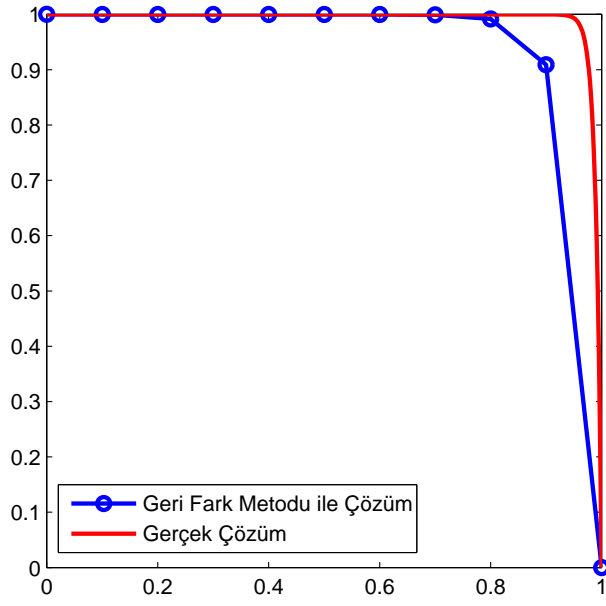
denklemini elde edilir. (3.2.33) denkleminin limit durumu incelendiğinde,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (U - u)_{X_{N-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^N}} - \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-N}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \neq 0 \quad (3.2.34)$$

(3.2.33) denkleminin limiti sıfırdan farklıdır. O halde limit durumunda gerçek çözüm ve nümerik çözümün örtüşmediği görülür. Bu durumda $U_0 = 1$ ve $U_1 = 0$ sınır değerleriyle ele alınan problemin, nümerik çözümünün uygulanan yöntemlerle elde edilemeyeceği görülür. Tezin bundan sonraki aşamasında gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edebilmek için farklı ve yeni nümerik yöntemler bulmak ve uygulamak için çalışılacaktır. Bulunacak yeni nümerik metot ile elde edilecek verilerin analizi yapılarak bulunan değerleri tablolar halinde hata analizi yapılarak nümerik yöntemlerin algoritmaları da yazılıp son olarak grafikleri de elde edilecektir.



Şekil 3.3: $\varepsilon = 2.10^{-2}$ için Geri Fark Metodu ile Çözüm



Şekil 3.4: $\varepsilon = 10^{-1}$ için Geri Fark Metodu ile Çözüm

4. DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN ε - YAKINSAKLIK

4.1 Green Fonksiyonu ve Local Green Fonksiyonunun Özellikleri

Sınır değer problemi olarak aşağıdaki ikinci dereceden

$$Lu = -\varepsilon u'' + bu' + cu = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.1.1)$$

denklemini için Green fonksiyonu bir tekil noktada süreksiz olan ve türevlenebilir fonksiyonların integralleri alınırken, denklemini tekil noktadan parçalayarak özellikleri gereği kolaylık sağlayacak ve bizi süreksiz noktalardan kurtaracaktır. Bu durumda Green fonksiyonundan yararlanılarak nümerik çözümde düzenli bir ağ üzerinde integraller geçiş noktalarından parçalandığında ε - düzgün yakınsak bir metod kullanılarak (4.1.1) sisteminin nasıl çözüldüğü gösterilecektir. İlk olarak Green fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki şekilde verilsin;

$$i) \quad g_i(x_{i-1}) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$ii) \quad g_i(x_{i+1}) = 0 \quad (4.1.3)$$

$$iii) \quad \varepsilon(g_i'(x_i^-) - g_i'(x_i^+)) = 1 \quad (4.1.4)$$

Green fonksiyonunun soldan ve sağdan yaklaşımı için ilk türevlerindeki değerlerinin farkı $1/\varepsilon$ 'a eşittir.

$$iv) \quad L^* g_i = -\varepsilon g_i'' - b g_i' = 0 \quad (4.1.5)$$

(4.1.1) denkleminde u yerine local Green fonksiyonu uygulanır ki singüler noktada süreksiz olan adım atlansın. Diğer bir ifade ile nümerik çözümümüzün ağ örüntüsünde

$$(x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1}) \quad (4.1.6)$$

ifadesi



Şekil 4.1: integral sınırlarının parçalanışı

x_i noktasını aralığın dışında bırakır. O halde çözüm için singüler nokta dahil edilmeyecek ve Lu denklemin integrali bu aralıklara göre parçalanacaktır.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Lu)g_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f g_i dx$$

integrali süreksiz olduğu noktadan parçalanıp. Lu 'u yerine yazılırsa;

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Lu)g_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon u'' + bu')g_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u'' + bu')g_i dx$$

olup, kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &= (-\varepsilon u'' + bu')g_i x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon u' + bu)g_i dx \\ &+ (-\varepsilon u'' + bu)g_i(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon u' + bu)g_i' dx \end{aligned}$$

integral sınırlarını yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &= [(-\varepsilon u'(x_i^-) + bu(x_i)g_i(x_i)) - (-\varepsilon u'(x_{i-1}) + bu(x_{i-1})g_i(x_{i-1}))] \\ &+ [(-\varepsilon u'(x_{i+1}) + bu(x_{i+1})g_i(x_{i+1})) - (-\varepsilon u'(x_i^+) + bu(x_i)g_i(x_i))] \\ &- \int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu)g_i' dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (bu)g_i' dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon u')g_i' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varepsilon u')g_i' dx \end{aligned}$$

Burada Green fonksiyonunun özelliklerinden ;

$$g_i(x_{i-1}) \quad \text{ve} \quad g_i(x_{i+1})$$

değerleri sıfıra eşit olur. O halde ;

$$= -\varepsilon u'(x_i^-)g_i(x_i) + \varepsilon u'(x_i^+)g_i(x_i) + \varepsilon u(x)g_i'(x)|_{x_{i-1}^-}^{x_i} + \varepsilon u(x)g_i'(x)|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

integralinde sınırlar yerine yazıldığında tekrar Green fonksiyonunun özelliklerinin elde edildiği görülür ve kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varepsilon g_i'' - b g_i' u) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-\varepsilon g_i'' - b g_i' u) dx$$

elde ederiz. Burada Green fonksiyonun özellikleri gereği;

$$(-\varepsilon g_i'' - b g_i' u) = 0$$

olduğundan bu integrallerin toplamı 0 olur ve $u', (x_{i-1}, x_{i+1})$ arasında süreklidir.

Buradan;

$$\begin{aligned} &= [\varepsilon u(x_i)g_i'(x_i^-) - \varepsilon u(x_{i-1})g_i'(x_{i-1}^-)] \\ &+ [\varepsilon u(x_{i+1})g_i'(x_{i+1}^-) - \varepsilon u(x_i)g_i'(x_i^+)] \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlikte , $u(x_{i+1})$ yerine u_{i+1} ve $u(x_{i-1})$ yerine u_{i-1} yazılırsa,

$$= -\varepsilon g_i'(x_{i-1})U_{i-1} + U_i + \varepsilon g_i'(x_{i+1})U_{i+1}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$-\varepsilon g_i'(x_{i-1})U_{i-1} + U_i + \varepsilon g_i'(x_{i+1})U_{i+1} = (f - cu) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx$$

olmak üzere, yerel green fonksiyonun (4.1.5) özelliği ele alındığında,

$$-\varepsilon g_i'' - b g_i' = 0$$

diferensiyel denkleminin fark denklemi yazılırsa;

$$-\varepsilon m^2 - b m = 0$$

$$-m(\varepsilon m - b) = 0$$

çözümünden , $m_1 = 0$ ve $m_2 = -b/\varepsilon$ bulunur, m_1 ve m_2 'i denklemden yerine yazıldığında;

$$g_i(x_i^-) = c_1 e^{bx} + c_2 e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \in (x_{i-1}, x_i)$$

aralığında bir değerdir. Özel olarak c_2 'nin yanına $(\frac{-\varepsilon}{b})$ çarpanı eklenecek olursa.

$$g_i(x_i^+) = c_1' + c_2' \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) e^{\frac{-bx}{\varepsilon}} \in (x_i, x_{i+1})$$

arasındaki çözümü; g_i Green fonksiyonun özelliklerinden , $g_i(x_{i-1}) = 0, g_i(x_{i+1}) = 0$ ve süreklilikten $g_i(x_i^-) = g_i(x_i^+)$ limitleri eşittir ve

$$\varepsilon(g_i'(x_i^-) - g_i'(x_i^+)) = 1$$

olmak üzere fark denklemlerinin çözümleri bu denklemlerde yerlerine yazıldığında, çözülebilir bir denklem sistemi elde edilir.

O halde

$$g_i(x_{i-1}) = c_1 + c_2 \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{\frac{-bx_{i-1}}{\varepsilon}} = 0, \quad (4.1.7)$$

$$g_i(x_{i+1}) = c_1' + c_2' \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{\frac{-bx_{i+1}}{\varepsilon}} = 0 \quad (4.1.8)$$

(4.1.7) ve (4.1.8) ifadeleri kullanılırsa bir sonraki denklem için g_i 'nin türevi alındığında,

$$g_i'(x_i^-) = c_2 \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) \left(-\frac{b}{\varepsilon}\right) e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}} = c_2 e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}}$$

$$g_i'(x_i^+) = c_2' \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) \left(-\frac{b}{\varepsilon}\right) e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}} = c_2' e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}}$$

elde edilir. Bu türevlerin farkı alınıp ε ile çarpılırsa,

$$\varepsilon(c_2 e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}} - c_2' e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}}) = 1 \quad (4.1.9)$$

denklemini elde edilir. Buradan;

$$c_2 - c_2' = \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{bx_i}{\varepsilon}}$$

bulunur ve

$$g_i(x_i^-) = g_i(x_i^+)$$

eşitliğinden de

$$c_1 + c_2 \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}} - (c_1' + c_2' \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{\frac{-bx_i}{\varepsilon}}) = 0$$

olup;

$$(c_1 - c'_1) + (c_2 - c'_2) \left(\frac{-\varepsilon}{b} \right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} = 0$$

elde edilir. Elimizde dört denklem ve dört bilinmeyen olduğundan bu denklem sistemi çözülebilirdir. O halde denklem sistemini çözmede kolaylık sağlaması açısından;

$$\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}, \quad \rho_i = \frac{bh}{\varepsilon}$$

olmak üzere ve x_{i+1} ile x_{i+h} adım uzunlukları gösterilsin. Bu durumda;

$$\frac{bx_{i+1}}{e \varepsilon} = e \frac{bx_{i+h}}{\varepsilon} = e^{\alpha_i + \rho_i}$$

ve

$$\frac{bx_{i-1}}{e \varepsilon} = e \frac{bx_{i-h}}{\varepsilon} = e^{\alpha_i - \rho_i}$$

olup denklemler;

$$c_1 + c_2 \left(\frac{-\varepsilon}{b} \right) e^{-\alpha_i + \rho_i} = 0 \quad (4.1.10)$$

$$c'_1 + c'_2 \left(\frac{-\varepsilon}{b} \right) e^{-\alpha_i - \rho_i} = 0 \quad (4.1.11)$$

$$c_2 - c'_2 = \frac{1}{\varepsilon} e^{\alpha_i} \quad (4.1.12)$$

ve

$$(c_1 - c'_1) + (c_2 - c'_2) \left(\frac{-\varepsilon}{b} \right) e^{-\alpha_i} = 0 \quad (4.1.13)$$

olarak bulunur. Bu sistem sembolik programlama dillerinden birisi ile çözüldüğünde;

$$c_1 = \frac{1}{b} \left(\frac{e_i^\rho - 1}{e^{\rho_i} - e^{-\rho_i}} \right) \quad c_2 = \frac{e^{\alpha_i} (1 - e^{-\rho_i})}{\varepsilon (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

$$c'_1 = \frac{1}{b} \left(\frac{e_i^{-\rho} - 1}{e^{\rho_i} - e^{-\rho_i}} \right) \quad c'_2 = \frac{e^{\alpha_i} (1 - e^{\rho_i})}{\varepsilon (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

sonuçları elde edilir. Bu çözümler $g_i(x^-)$ ve $g_i(x^+)$ fonksiyonlarında yerine yazılırsa;

$$g'_i(x_i^-) = c_2 e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} = \frac{e^{\alpha_i}(1 - e^{-\rho_i})}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}$$

ve $\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$ olduğundan,

$$g'_i(x_i^-) = c_2 e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} = \frac{e^{\alpha_i}(1 - e^{-\rho_i})}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}$$

olup,

$$g'_i(x_i^-) = \frac{e^{\frac{bx_i}{\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} (1 - e^{-\rho_i})}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

buradan;

$$g'_i(x_i^-) = \frac{1 - e^{-\rho_i}}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \quad (4.1.14)$$

bulunur

$$g'_i(x_i^+) = c_2 e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} = \frac{e^{\frac{bx_i}{\varepsilon}} (1 - e^{-\rho_i})}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}$$

olduğundan;

$$g'_i(x_i^+) = \frac{1 - e^{\rho_i}}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \quad (4.1.15)$$

elde edilir. g_i fonksiyonun türevleri sırasıyla,

$$g'_i(x_i^-) = \frac{1 - e^{-\rho_i}}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}, \quad g'_i(x_i^+) = \frac{1 - e^{\rho_i}}{\varepsilon(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

$$\rho_i = \frac{bh}{\varepsilon}, \quad \alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$$

olmak üzere,

$$g'_i(x_i^-) = c_2 \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) \left(\frac{-b}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}, \quad g'_i(x_i^+) = c_2 \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) \left(\frac{-b}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}$$

olarak alınırsa (4.1) denklemi daha sade şekilde elde edilir. O halde Green fonksiyonunun üçüncü özelliği yazılırsa;

$$\varepsilon(g'_i(x_i^-) - g'_i(x_i^+)) = 1 \quad (4.1.16)$$

olacaktır. Buradan;

$$\begin{aligned}\varepsilon(c_2 e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} - c_2' e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}) &= 1 \\ \Rightarrow (c_2 - c_2') e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} &= \frac{1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow (c_2 - c_2') \frac{1}{e^{\frac{bx_i}{\varepsilon}}} &= \frac{1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow (c_2 - c_2') &= \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{bx_i}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde;

$$\begin{aligned}g_i(x_i^-) &= \frac{1}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \\ g_i(x_i^+) &= \frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

ve $\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}g_i'(x_i^-) &= \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) \left(\frac{-b}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} \\ g_i'(x_i^-) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{\alpha_i} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}g_i(x_i^+) &= \frac{1}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \\ g_i(x_i^+) &= \frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

ve $\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}g_i'(x_i^-) &= \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) \left(\frac{-b}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} \\ g_i'(x_i^-) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{\alpha_i} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_i'(x_i^+) &= \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(\frac{-\varepsilon}{b}\right) \left(\frac{-b}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} \\ g_i'(x_i^+) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{\alpha_i} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

$$g'_i(x_i^-) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{bx}{\varepsilon} + \frac{bx_i}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

$$g'_i(x_i^+) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{bx}{\varepsilon} + \frac{bx_i}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

Burada $x^- \mapsto x_{i-1}$, $x^+ \mapsto x_{i+1}$ alınır ;

$$g'_{i-1}(x_{i-1}^-) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{bx}{\varepsilon} + \frac{bx_i}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

Burada $-\frac{bx_i}{\varepsilon} + \frac{bx_{i-1}}{\varepsilon} = \frac{(bx_{i-1}) - (bx_i)}{\varepsilon}$ düzenlenirse ;

$$-\frac{bx_i}{\varepsilon} + \frac{bx_{i-1}}{\varepsilon} = \frac{b((x_{i-1}) - x_i)}{\varepsilon} = \frac{bh}{\varepsilon}$$

burada, $x_{i-1} - x_i = h$ adım uzunluğudur. Bu durumda ;

$$g'_i(x_{i-1}^-) = \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{bh}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

elde edilir. Benzer şekilde ;

$$g'_i(x_{i+1}^+) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{bx_{i+1}}{\varepsilon} + \frac{bx_i}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

Bu eşitlik de düzenlenirse ;

$$= \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{b((x_i - x_{i+1}))}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

ve $\rho_i = \frac{bh}{\varepsilon}$ olduğundan;

$$g'_i(x_{i+1}^+) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{bh}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

bulunur.

$$g'_i(x_{i-1}^-) = \frac{1}{\varepsilon} e^{\rho_i} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(e^{\rho_i} - e^{\rho_i - \rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

$$g'_i(x_{i-1}^-) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(e^{\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \quad \text{ve} \quad g'_i(x_{i+1}^+) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

eşitliklerini bulduktan sonra g_i^+ ve g_i^- fonksiyonları kullanılarak ;

$$-\varepsilon g'_i(x_{i-1}^-) U_{i-1} + U_i + \varepsilon g'_i(x_{i+1}^+) U_{i+1} = (f - cu) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx$$

integrali hesaplanırsa,

$$(f - cu) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx = (f - cu) \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^- dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i^+ dx \right]$$

dir. $\rho_i = \frac{bh}{\varepsilon}$ ve $\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$ olmak üzere ;

$$= (f - cu_i) \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{1}{b} \frac{e^{\rho_i - 1}}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \right] dx \right. \\ \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i - 1}}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \right] dx \right]$$

Burada x 'e göre integral alındığı için ilk terimler sabit olduğundan x ile çarpımları elde edilir, sınırlar yerine yazılır ve ikinci terimlerde sabitler integral dışına atıldığında $e^{-\frac{bx}{\varepsilon}}$ 'in integrali $k = -\frac{b}{\varepsilon}$ olmak üzere;

$$\int e^{ku} du = -\frac{1}{ke^{ku}} u$$

eşitliği ile hesaplanır. O halde ,

$$= (f - cu_i) \left[\frac{1}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) \frac{1}{-\frac{b}{\varepsilon}} e^{-\frac{bx}{\varepsilon}} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right. \\ \left. + \frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right) \frac{e^{-\frac{bx}{\varepsilon}}}{-\frac{b}{\varepsilon}} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right]$$

integralleri düzenlenirse, $\frac{e^{\alpha_i}}{\varepsilon} \left(-\frac{\varepsilon}{b}\right)$ ifadeleri çarpım durumunda olduğundan ε ' lar sadeleşir ve integralin negatif işareti buradan gelir. O halde katsayı $-\frac{e^{\alpha_i}}{b}$ olacaktır. O halde

$$(f - cu_i) \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx = (f - cu_i) \frac{1}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{-e^{\alpha_i}}{b} \frac{(1 - e^{-\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \frac{e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}}{-\frac{b}{\varepsilon}} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right. \\ \left. + \frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{-e^{\alpha_i}}{b} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \frac{e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}}{-\frac{b}{\varepsilon}} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right]$$

elde edilir. İntegral sınırları yerine yazılırsa ($kx_i - kx_{i-1}$) olacağından, $k((x_i - x_{i-1}))$ bize $x_i - h$ ve $x_i + h$ olan adım uzunluklarını verir. Burada $(x_i) - (x_{i-1}) = h$ dir.

$$\begin{aligned} &= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \left(ke^{-\frac{b}{\varepsilon}} - ke^{-\frac{b}{\varepsilon}} (x_i - h) \right) \right] \\ &= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \left(ke^{-\frac{b}{\varepsilon}} - ke^{-\frac{b}{\varepsilon} x_i} e^{\frac{bh}{\varepsilon}} \right) \right] \end{aligned}$$

$ke^{-\alpha_i} - ke^{-\alpha_i + \rho_i} \Rightarrow ke^{-\alpha_i} (1 - e^{\rho_i})$ olmak üzere, k sabiti yerine yazılırsa,

$$= (f - cu_i) \frac{h}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{-e^{\alpha_i} \cdot \varepsilon (1 - e^{-\rho_i})}{-b^2 (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} e^{-\alpha_i} (1 - e^{\rho_i})$$

bulunur. Burada $k = \frac{-e^{\alpha_i} \cdot \varepsilon (1 - e^{-\rho_i})}{-b^2 (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$ dir. Son ifade sadeleştirilirse,

$$= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon (1 - e^{-\rho_i})}{b^2 (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} (1 - e^{\rho_i}) \right]$$

aynı işlemler ikinci integral için de yapılırsa,

$$= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{e^{\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} e^{\alpha_i} e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}} \frac{(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} (e^{-\frac{bh}{\varepsilon}} - 1) \right]$$

burada $\frac{bh}{\varepsilon} = \rho_i$ dir. İkinci parça sınırları x_i den x_{i+1} 'e olan denklem düzenlenirse;

$$+ \frac{h (e^{-\frac{b}{\varepsilon}(x_{i+1} - x_i)} - 1)}{b (e^{\frac{b}{\varepsilon}h} - e^{-\frac{b}{\varepsilon}h})}$$

ve

$$+ \frac{1}{b} \frac{e^{-\rho_i} - 1}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x_i^{x_{i+1}} + \frac{-e^{\alpha_i} (1 - e^{\rho_i})}{b (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \frac{e^{-\frac{bx_i}{\varepsilon}}}{\varepsilon} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

denkleminin integral sınırları yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x_{i+1} - \frac{1}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} x_i + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{e^{\alpha_i} (1 - e^{\rho_i}) e^{-\frac{b}{\varepsilon} x_{i+1}}}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} - e^{\alpha_i} \frac{\varepsilon (1 - e^{\rho_i}) e^{-\frac{b}{\varepsilon} x_i}}{b^2 (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

elde edilir. Burada adım uzunluğu olan x_{i+1} yerine $x_i + h$ alınıp ilk iki toplamı tekrar yazılır ve diğer terimleri de $\frac{\varepsilon}{b^2} e^{\alpha_i}$ ortak parantezine alınarak denklem düzenlenirse ;

$$= \frac{h (e^{-\rho_i} - 1)}{b (e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{e^{\alpha_i} (1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} (e^{-\frac{b}{\varepsilon} x_{i+1}} - e^{-\frac{b}{\varepsilon} x_i})$$

$$= \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{e^{\alpha_i}(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} (e^{-\frac{b}{\varepsilon}x_i} e^{-\frac{bh}{\varepsilon}} - e^{-\frac{b}{\varepsilon}x_i})$$

son terim $e^{-\frac{b}{\varepsilon}x_i}$ parantezine alınıp $\rho_i = \frac{bh}{\varepsilon}$ ve $\alpha_i = \frac{bx_i}{\varepsilon}$ eşitliklerinden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned} &= \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{e^{\alpha_i}(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} (e^{-\frac{b}{\varepsilon}x_i} (e^{-\frac{bh}{\varepsilon}} - 1)) \\ &= \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{e^{\alpha_i} \cdot e^{-\alpha_i} (1 - e^{\rho_i}) (e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \end{aligned}$$

ve $e^{\alpha_i} e^{-\alpha_i} = e^0 = 1$ olduğundan ;

$$= \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{(1 - e^{\rho_i})(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

elde edilir. İkinci terimin payı düzenlenirse $(1 - e^{\rho_i})(e^{-\rho_i} - 1) = (1 - e^{-\rho_i})^2$ olduğu görülür. O halde denklemin ikinci kısmı ;

$$= \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{(e^{\rho_i} + e^{-\rho_i} - 2)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})}$$

olarak elde edilir. İntegralin sonucu tekrar yazılırsa;

$$= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{(e^{\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{(1 - e^{-\rho_i})(1 - e^{\rho_i})}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{h}{b} \frac{(e^{-\rho_i} - 1)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} + \frac{\varepsilon}{b^2} \frac{(e^{\rho_i} + e^{-\rho_i} - 2)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \right]$$

parantezler açılıp toplama işlemleri yapılırsa;

$$= (f - cu_i) \left[\frac{h}{b} \frac{(e^{\rho_i} + e^{-\rho_i} - 2)}{(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i})} \right]$$

bulunur.

Burada $(e^{\rho_i} + e^{-\rho_i} - 2) = (e^{\frac{\rho_i}{2}} - e^{-\frac{\rho_i}{2}})^2$ ve $(e^{\rho_i} - e^{-\rho_i}) = ((e^{\frac{\rho_i}{2}})^2 - (e^{-\frac{\rho_i}{2}})^2)$ olarak yazılırsa;

$$= (f - cu_i) \frac{h}{b} \left[\frac{(e^{\frac{\rho_i}{2}} - e^{-\frac{\rho_i}{2}})^2}{(e^{\frac{\rho_i}{2}} - e^{-\frac{\rho_i}{2}})(e^{\frac{\rho_i}{2}} + e^{-\frac{\rho_i}{2}})} \right]$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirme yapıldığında ,

$$= (f - cu_i) \frac{h}{b} \left[\frac{(e^{\frac{\rho_i}{2}} - e^{-\frac{\rho_i}{2}})}{(e^{\frac{\rho_i}{2}} + e^{-\frac{\rho_i}{2}})} \right] \text{ bulunur.}$$

Pay ve payda $e^{\frac{\rho_i}{2}}$ ile çarpılırsa;

$$= (f - cu_i) \frac{h}{b} \frac{(e^{\frac{\rho_i}{2}} - e^{-\frac{\rho_i}{2}}) e^{\frac{\rho_i}{2}}}{(e^{\frac{\rho_i}{2}} + e^{-\frac{\rho_i}{2}}) e^{\frac{\rho_i}{2}}}$$

$$= (f - cu_i) \frac{h (e^{\rho_i} - e^{\frac{\rho_i}{2} - \frac{\rho_i}{2}})}{b (e^{\rho_i} + e^{\frac{\rho_i}{2} - \frac{\rho_i}{2}})}$$

Burada $e^{\frac{\rho_i}{2} - \frac{\rho_i}{2}} = e^0 = 1$ olduğundan;

$$= (f - cu_i) \frac{h (e^{\rho_i} - 1)}{b (e^{\rho_i} + 1)}$$

bulunur. O halde başlangıçtaki integralin sonucu;

$$(f - cu_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx = (f - cu_i) \frac{h (e^{\rho_i} - 1)}{b (e^{\rho_i} + 1)} \quad (4.1.17)$$

olarak elde edilir. Son olarak (4.1.17) denklemi elde edilen integralin sonucu ile tekrar yazılırsa;

$$-\varepsilon g'_i(x_{i-1})U_{i-1} + U_i + \varepsilon g'_i(x_{i+1})U_{i+1} = (f_i - c_i U_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g_i dx \quad (4.1.18)$$

ve (4.1.17) denkleminin sonucu

$$-\frac{e^{\rho_i} - 1}{e^{\rho_i} - e^{-\rho_i}} U_{i-1} + U_i - \frac{1 - e^{-\rho_i}}{e^{\rho_i} - e^{-\rho_i}} U_{i+1} = (f_i - c_i U_i) \frac{h (e^{\rho_i} - 1)}{b (e^{\rho_i} + 1)} \quad (4.1.19)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa yukarıdaki (4.1.19) denklemi

$$-\frac{e^{\rho_i}}{e^{\rho_i} + 1} U_{i-1} + U_i - \frac{1}{e^{\rho_i} + 1} U_{i+1} = (f_i - c_i U_i) \frac{h (e^{\rho_i} - 1)}{b (e^{\rho_i} + 1)} \quad (4.1.20)$$

(4.1.20) denklemi ile en sade biçimde tekrar yazılabilir. (4.1.20) denklemi El-Mistikawy-Werle şeması (Ross, Styres, Tobiska, 2008)'da verilen şekli ile birebir elde edilmiştir.

5. PARÇALI DÜZGÜN AĞLAR ÜZERİNDE DÜZGÜN YAKINSAK BİR YÖNTEMİN OLUŞTURULMASI

Bu bölüm konfeksiyon-difüzyon problemi için ε -düzgün sabitlenmiş ağ metodunun oluşturulması üzerine olacaktır. Bu tür bir metot için (1.0.1) problemi yeniden ele alınır (Filiz, Neslitürk ve Ekici, 2009). Bir parçalı düzgün sabitlenmiş aralığın bir ε -düzgün metodun oluşturulması için yalnız başına yeterli olduğu iyi bilinir. Elbette daha karmaşık sabitlenmiş ağlarda kullanılabilir. Bununla beraber, kolay anlaşılması açısından parçalı düzgün ağlar en cazip seçimlerden biri olarak düşünülür. Parçalı düzgün bir ağın basit bir örneği $\Omega = (0, 1)$ aralığı üzerinde aşağıdaki gibi oluşturulabilir. $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$ aralığını sağlayan bir $1 - \tau$ noktası seçilir ve $r \geq 2$ için $N = 2^r$ olduğu kabul edilir. $1 - \tau$ noktası Ω 'yı $(0, 1 - \tau)$ ve $(1 - \tau, 1)$ şeklinde iki alt aralığa böler. Karşılık gelen parçalı düzgün ağ, $(0, 1 - \tau)$ ve $(1 - \tau, 1)$ aralıklarının her ikisini de Ω_τ^N ile gösterilen $\frac{N}{2}$ eşit alt aralığa bölmekle elde edilebilir.

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{b_0} \ln N \right\} \quad (5.0.1)$$

olmak üzere Ω_τ^8 düzgün ağını gösterir.



Şekil 5.1: Ω_τ^8 parçalı düzgün ağı

Bununla birlikte, τ nun hem ε a hem de N ye bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum ε veya N değiştiğinde ağ noktalarının konumlarının değişeceği anlamına gelir. Ayrıca N yeterince büyük alındığında τ nun $1/2$ değeri aldığına ve böylece Ω_τ^N ağının N alt aralıklı düzgün ağa dönüştüğüne dikkat edilmelidir. Bu durum, N nin

$$\varepsilon \ln N \geq \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad N \geq \exp \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)$$

eşitsizlikleri sağlandığında olur. τ değerinin, $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$, diğer bütün izin verilebilir değerleri için $(1 - \tau, 1)$ alt aralığı $(0, 1 - \tau)$ alt aralığından daha küçüktür. Bu durumlarda $(1 - \tau, 1)$ aralığının $N/2$ düzgün ağ elemanlarının her biri, $(0, 1 - \tau)$ aralığının $N/2$ düzgün ağ elemanlarının $2(1 - \tau)/N$ uzunluğundan daha kısa olan $2\tau/N$ uzunluğundadır. Böyle durumlarda global ağ, düzgün olmak yerine parçalı düzgündür çünkü 1'in bir komşuluğundaki alt aralıklar, τ değeri sıfıra yakın olduğunda daha küçüktür, ağa $x = 1$ sınır noktasının bir komşuluğunda yoğunlaşan veya kısaca $x = 1$ noktasında yoğunlaşan denir. τ 'nin değeri ne olursa olsun bütün ağlar N ağ elemanından oluşur ve sonuçta x_i noktaları bu N ağ elemanlarının uç noktaları olmak üzere ağ noktaları $\bar{\Omega}_\tau^N = \{x_i\}_0^N$ 'dir. $1 - \tau$ geçiş noktasının $x_{N/2}$ ağ noktasına denk geldiğinin ve $\bar{\Omega}_\tau^N = \{x_i\}_0^N$ ağı için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığının görülmesi zor değildir.

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_i \leq 2/N, & 1 \leq i \leq N \\ h_i \geq 1/N, & 1 \leq i \leq N/2 \\ h_i \leq 2\tau/N, & N/2 + 1 \leq i \leq N \\ \bar{h}_i \geq h_i/2, & 1 \leq i \leq N - 1 \end{array} \right. \quad (5.0.2)$$

5.1 Düzensiz Kaynak Fonksiyonu

f kaynak fonksiyonunun düzgün bileşeni ve δ_d değiştirilmiş *Dirac*-delta fonksiyonu; $d \in (0, 1)$ ve $0 < \varepsilon \leq 1$ ile birlikte $\delta_d(x) = \delta(x - d)$ olmak üzere, aşağıdaki konsantre kaynaklı tekil pertürbasyon problemi ele alınır:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad \text{ve} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{için} \quad u \in C^2(\bar{\Omega}) \\ L_2 u = -\varepsilon u''(x) - bu'(x) + cu = f(x) + \delta_d(x). \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

Bu kaynak gelecek bölümdeki nümerik metodun gelişiminde önemli olacaktır. u çözümü tipik olarak konsantre kaynaktan kaynaklanan $x = d$ de bir iç katmana ve $x = 0$ taşma sınırında bir üstel sınır katmanına sahiptir. (5.1.3) problemine yaklaşmak için bir Shishkin ağı kullanılır ve bu ağ, hem sınırı hem de iç katmanları çözmek için

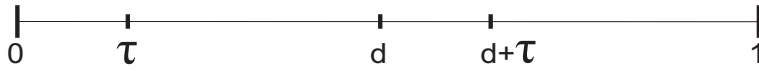
özel bir şekilde tasarlanır. Böyle bir ağı kurmak için τ ,

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{b_0} \ln N \right\} \quad (5.1.4)$$

koşulunu sağlamak üzere $\bar{\Omega}$ bölgesini

$$I_1 = [0, \tau], I_2 = [\tau, d], I_3 = [d, d + \tau] \text{ ve } I_4 = [d + \tau, 1]$$

dört alt aralığına bölen τ , d ve $d + \tau$ noktaları alınır. Karşılık gelen parçalı düzgün ağ her bir alt aralığı $N/4$ eş uzunluklu alt aralığa bölmekle kurulur. Ortaya çıkan $\Omega_{\tau-d}^N$ ağı



Şekil 5.2: (5.1.3) probleminin ayrıklaştırılması için alt aralıklar

$$h_1 = \frac{4\tau}{N} \text{ ve } h_2 = \frac{4(d - \tau)}{N}$$

olmak üzere

$$x_0 = 0 \text{ ve } x_i - x_{i-1} = \begin{cases} h_1, & 0 < i \leq N/4 \quad \text{veya} \quad N/2 < i \leq 3N/4 \\ h_2, & N/4 < i \leq N/2 \quad \text{veya} \quad 3N/4 < i \leq N \end{cases} \quad (5.1.5)$$

ile tarif edilir.

$$\Delta_{d,i} = \begin{cases} \frac{1}{h_{i+1}}, & d \in [x_i, x_{i+1}) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

değiştirilmiş *Dirac*-delta fonksiyonunun bir yaklaşımı ve $b_i = \lim_{x \rightarrow x_i^-} b(x)$ olmak üzere (5.1.3) denkleminde (5.1.5)'de tanımlanan parçalı düzgün ağ üzerindeki geri metot kullanılarak yaklaşılır.

$$\begin{cases} U_0 = 0, \quad U_N = 0 \text{ ve } U \in V(\Omega_{\tau-d}^N) \\ -\varepsilon D^+ D^- U_i - b_i D^+ U_i + c_i U_i = f_i + \Delta_{d,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (5.1.6)$$

(5.1.6) nümerik metodun çözümü (5.1.3) denkleminin çözümüne düğümsel olarak yakınsar.

Teorem 5.1 $\Omega_{\tau-d}^N$ parçalı düzgün sabitlenmiş ağı ile birlikte (5.1.6) sabitlenmiş ağ sonlu fark metodu, τ 'nin yukarıdaki (5.1.4) koşulunu sağlayacak şekilde seçilmiş olması şartıyla (5.1.3) problemi için ε -düzgündür. Ayrıca (5.1.3)'in u çözümü ve (5.1.6)'in U_D çözümü C , ε 'dan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|u - U_D\|_{\Omega_{\tau-d}^N} \leq CN^{-1} \ln N$$

ε -düzgün hata tahmini sağlar.

İspat: (Linss, 2002).

6. NÜMERİK YÖNTEMİN ÇIKARILMASI

6.1 Sekiz Bilinmeyenli Sistemin Elde Edilmesi ve Çözümü

Bu bölümde (1.0.1) denkleminin nümerik çözümünü araştırılıp, uygun metodlar yardımıyla hata analizi yapılacaktır. Öncelikle;

$$-\varepsilon D^+ D^- G_j - b D^+ G_j = \Delta X_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (6.1.1)$$

Denkleminin, ileri fark ve geri fark formüllerinden yararlanılarak nümerik çözümünün elde edilebilmesi için aşağıdaki formüller yazılırsa;

$$D^+ G_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{h_{j+1}}, \quad D^- G_j = \frac{G_j - G_{j-1}}{h_j}$$

bu türevler düzgün ağ parçalarımızın adım uzunluklarına göre farklı ΔX değerlerine karşılık gelecektir. Bu durum, parçalı tanımlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\Delta X_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{h_{j+1}} & , \quad x_i \in (x_j, x_{j+1}) \\ 0 & , \quad \text{Diğer durumlar} \end{cases}$$

$\Delta X_{i,j}$ ifadesi, x_i 'nin aralığa ait bir nokta olup olmadığına göre farklı değerlere karşılık gelir. Bu durumda;

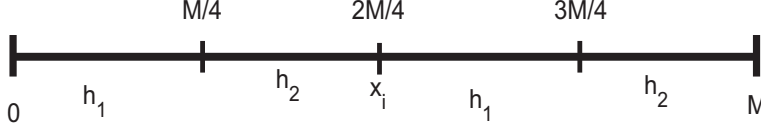
$$-\varepsilon D^+ D^- G_j - b D^+ G_j = f_i + \Delta X_{i,j}$$

denkleminde türevler yerine yazılırsa;

$$-\varepsilon \left(\frac{G_{j+1} - G_j}{h_{j+1}} - \frac{G_j - G_{j-1}}{h_j} \right) \frac{1}{h_j} - b \left(\frac{G_{j+1} - G_j}{h_{j+1}} \right) = \Delta X_{i,j}$$

denklemini elde edilir.

Bu eşitlik $j = 0$ ya da $j = N$, $G_0 = 0$ ya da $G_N = 0$ şartlarında geçerlidir. O halde $[0, M]$ aralığını x_i tekil noktasına göre parçalanırsa,



Şekil 6.1: İntegral sınırlarının parçalanışı

verilen aralıkta adım uzunlukları indislere göre düzenli bir örüntü oluşturur. Bu örüntüde adım uzunlukları;

$$h_j = \begin{cases} h_1 & , & 1 \leq j \leq M/4 - 1 \\ h_2 & , & M/4 \leq j \leq M/2 - 1 \\ h_1 & , & M/2 \leq j \leq 3M/4 - 1 \\ h_2 & , & 3M/4 \leq j \leq M - 1 \end{cases}$$

eşitsizlikleri ile elde edilerek, nümerik formüllerde yerine yazılırsa;

$$-\varepsilon \left(\frac{G_i - 2G_j + G_{j-1}}{h_2^2} \right) - b \left(\frac{G_{j+1} - G_j}{h_2} \right) = 0$$

ve bu denklem ortak paydalara göre açılarak, G_{j+1} , G_j ve G_{j-1} ifadelerine göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{-\varepsilon G_{j+1}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon G_j}{h_1^2} - \frac{\varepsilon G_{j-1}}{h_1} - \frac{b G_{j-1}}{h_1} + \frac{b G_{j+1}}{h_1} &= 0 \\ G_{j+1} \left(\frac{-\varepsilon}{h_1^2} - \frac{b}{h_1} \right) + G_j \left(\frac{2\varepsilon}{h_1^2} + \frac{b}{h_1} \right) + G_{j-1} \left(\frac{-\varepsilon}{h_1^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

bu denklem, $\frac{h_1^2}{\varepsilon}$ ile çarpılırsa;

$$-G_{j+1} \left(\frac{\varepsilon}{h_1^2} + \frac{b}{h_1} \right) \frac{h_1^2}{\varepsilon} + G_j \left(\frac{2\varepsilon}{h_1^2} + \frac{b}{h_1} \right) \frac{h_1^2}{\varepsilon} + G_{j-1} \left(\frac{-\varepsilon}{h_1^2} \right) \frac{h_1^2}{\varepsilon} = 0$$

gerekli sadeleştirmeler yapırsa;

$$-G_{j+1} \left(1 + \frac{bh_1}{\varepsilon} \right) + G_j \left(2 + \frac{bh_1}{\varepsilon} \right) + G_{j-1} (-1) = 0$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemde $G_{j+1} = r^2$, $G_j = r$ ve $G_{j-1} = r^0$ alınır, denklemde yerine yazıldığında;

$$-r^2 \left(1 + \frac{bh_1}{\varepsilon}\right) + r \left(2 + \frac{bh_1}{\varepsilon}\right) + r^0(-1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Son durumda parantez içerisindeki ifadeler de $1 + \frac{bh_1}{\varepsilon} = \lambda_1$ dönüşümü uygulanırsa;

$$-r^2 \lambda_1 + r(1 + \lambda_1) - 1 = 0$$

ikinci dereceden polinomu elde edilir. Bu denklem çarpanlarına ayrılırsa;

$$(1 - r\lambda_1)(r - 1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Denklem kökleri sırasıyla $r_1 = 1$ ve $r_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $1 + \frac{bh_2}{\varepsilon} = \lambda_2$ dönüşümü alınır $-r^2 \lambda_2 + r(1 + \lambda_2) - 1 = 0$ ikinci dereceden polinomunun kökleri $r_3 = 1$ ve $r_4 = \frac{1}{\lambda_2}$ bulunur.

$$G_j^i = \begin{cases} a_1 r_1^j + a_2 r_2^j, & 0 \leq j \leq \frac{M}{4} \\ a_3 r_3^j + a_4 r_4^j, & M/4 \leq j \leq \frac{M}{2} \\ a_5 r_1^j + a_6 r_2^j, & M/2 \leq j \leq \frac{3M}{4} \\ a_7 r_3^j + a_8 r_4^j, & 3M/4 \leq j \leq M \end{cases} \quad (6.1.2)$$

Yukarıdaki iki denklemin r_1, r_2, r_3 ve r_4 kökleri (6.1.2) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$G_j^i = \begin{cases} a_1 + a_2 \lambda_1^{-j}, & 0 \leq j \leq \frac{M}{4} \\ a_3 + a_4 \lambda_2^{-j}, & M/4 \leq j \leq \frac{M}{2} \\ a_5 + a_6 \lambda_1^{-j}, & M/2 \leq j \leq \frac{3M}{4} \\ a_7 + a_8 \lambda_2^{-j}, & 3M/4 \leq j \leq M \end{cases} \quad (6.1.3)$$

parçalı tanımlı G_j fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun sınır noktalarının eşitliğinden;

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \lambda_1^{-j} &= a_3 + a_4 \lambda_2^{-j} \\ a_3 + a_4 \lambda_2^{-j} &= a_5 + a_6 \lambda_1^{-j} \\ a_5 + a_6 \lambda_1^{-j} &= a_7 + a_8 \lambda_2^{-j} \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir. Bu eşitliklerden üç farklı denklem yazılabilir. Denklemimizin sınır değerleri olan $G_0 = G_M = 0$ ifadelerinin de G_j^i fonksiyonunda yerine yazılması ile

$$a_1 + a_2 \lambda^{-j} = 0 \quad (6.1.4)$$

$$a_7 + a_8 \lambda_2^{-j} = 0 \quad (6.1.5)$$

denklemleri elde edilir. G_j^i fonksiyonunun geçiş noktalarında tanımlanan denklemler de sırasıyla;

$$a_1 - a_3 + a_2 \lambda_1^{-j} - a_4 \lambda_2^{-j} = 0 \quad (6.1.6)$$

$$a_3 - a_5 + a_4 \lambda_2^{-j} - a_6 \lambda_1^{-j} = 0 \quad (6.1.7)$$

$$a_5 + a_6 \lambda_1^{-j} - a_7 - a_8 \lambda_2^{-j} = 0 \quad (6.1.8)$$

burada $j = M/4$ olmak üzere geçiş noktalarından üç farklı denklem sistemi oluşturulur.

$$(-\lambda_1)G_{M/4+1} + \left(\frac{h_2^*}{h_1^*} + \lambda_1\right)G_{M/4} + \left(-\frac{h_2^*}{h_1^*}\right)G_{M/4-1} = 0$$

eğer, $j = M/4$ ise $j = M/4$ için G_j^i fonksiyonunda indislere göre denklemler yerine yazılırsa,

$$(-\lambda_1)(a_3 + a_4 \lambda_2^{-j}) + \left(\frac{h_2^*}{h_1^*} + \lambda_1\right)(a_1 + a_2 \lambda_1^{-j}) + \left(-\frac{h_2^*}{h_1^*}\right)(a_1 + a_2 \lambda_1^{-j}) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem açılarak sadeleştirilirse,

$$-a_3 \lambda_1 - a_4 \lambda_1 \lambda_2^{-j} + a_1 \frac{h_2^*}{h_1^*} + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1 \lambda_1^{-1} - a_1 \frac{h_2^*}{h_1^*} - a_2 \frac{h_2^*}{h_1^*} \lambda_1^{-j} = 0$$

elde edilen bu ifade a_1, a_2, a_3, a_4 katsayılarına göre düzenlenirse,

$$a_1 \left(\lambda_1 + \frac{h_2}{h_1} - \frac{h_2}{h_1} \right) + a_2 \left(\lambda_1 \lambda_1^{-1} - \frac{h_2}{h_1} \lambda_1^{-j} \right) + a_3 (-\lambda_1) - a_4 (\lambda_1 \lambda_2^{-j}) = 0$$

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \left(1 - \lambda_1 \frac{h_2}{h_1} \right) - a_3 \lambda_1 - a_4 \lambda_1 \lambda_2^{-j} = 0$$

elde edilen bu denklemde ise $\lambda_1^{M/4} = \kappa_1$, $\lambda_2^{M/4} = \kappa_2$, $\lambda_1\lambda_2^{-1} = \kappa_3$ olarak seçilirse, $\kappa_1^{-1} = \lambda_1^{-M/4}$ ve $\kappa_2^{-1} = \lambda_2^{-M/4}$ dönüşümleri yapılabilir. Bu dönüşümler denklemde yerine yazılırsa;

$$a_1(\lambda_1) + a_2(\kappa_1^{-1}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)) - a_3\lambda_1 + a_4\lambda_1\lambda_2^{-1}\lambda_2^{-M/4} = 0$$

$$a_1(\lambda_1) + a_2(\kappa_1^{-1}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)) - a_3\lambda_1 + a_4\kappa_2^{-1}\kappa_3 = 0 \quad (6.1.9)$$

elde edilir. (6.1.1) denkleminin $\frac{h_2}{\varepsilon}$, 'a eşit olduğu durumda da G_j^i değerlerine karşılık gelen sınırlara göre denklem tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned} (-\lambda_2) \left(a_5 + a_6\lambda_1^{-(M/2+1)} \right) + \left(\frac{h_1}{h_2} + \lambda_2 \right) (a_3 + a_4\lambda_2^{-M/2}) \\ + \left(-\frac{h_1}{h_2} \right) (a_3 + a_4\lambda_2^{-(M/2-1)}) = \frac{h_2}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

bu denklem a_3 , a_4 , a_5 , a_6 katsayılarına göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2\lambda_1^{-M/2-1} \right) + a_3 \left(\frac{h_1}{h_2} + \lambda_2 \right) + a_4 \left(\frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2} + \lambda_2\lambda_2^{-M/2} \right) \\ + a_3 \left(-\frac{h_1}{h_2} \right) + a_4 \left(-\frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2+1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon} \\ a_3 \left(\frac{h_1}{h_2} - \frac{h_1}{h_2} + \lambda_2 \right) + a_4 \left(\frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2} + \lambda_2\lambda_2^{-M/2} - \frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2+1} \right) + a_5(-\lambda_2) + \\ a_6 \left(-\lambda_2\lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon} \\ a_3(\lambda_2) + a_4 \left(\frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2} + \lambda_2^{-M/2+1} - \frac{h_1}{h_2}\lambda_2^{-M/2+1} \right) \\ + a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2\lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

ifadesinde a_4 katsayılı terim $\frac{h_1}{h_2}$ ortak parantesinde yazılırsa, denklem düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} a_3(\lambda_2) + a_4 \left(\frac{h_1}{h_2} \left(\lambda_2^{-M/2} - \lambda_2^{-M/2+1} \right) + \lambda_2^{-M/2+1} \right) \\ + a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2\lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

a_4 katsayılı terim $\lambda_2^{-M/2}$ ortak parantezine alınıp, $\lambda_2^{-M/2+1}$ ifadesi parçalanırsa,

$$a_3(\lambda_2) + a_4 \left(\frac{h_1}{h_2} \left(\lambda_2^{-M/2} (1 - \lambda_2) \right) + \lambda_2^{-M/2} \lambda_2 \right) \quad (6.1.13)$$

$$+ a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2 \lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon}$$

Bu denklemde $\frac{h_1}{h_2}$ yerine $\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - 1}$ yazılırsa, denklem bu katsayı ile çarpıldığında daha önce tanımlanmış olan κ_2 κ_1 ve κ_3 sabitlerine bağlı denklem sistemi elde edilecektir. Fakat daha önce bir kaç ön tanımlama yapılması gereklidir. Bu tanımlamalar denklemin sadeleşebilmesi için gerekli olan katsayının bulunmasına yardımcı olacaktır. O halde, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - 1}$ eşitliğinden yola çıkılarak, $\lambda_1 = 1 + \frac{bh_1}{\varepsilon}$ $\lambda_2 = 1 + \frac{bh_2}{\varepsilon}$ olmak üzere,

$$\lambda_1 - 1 = \frac{bh_1}{\varepsilon} \quad \lambda_2 - 1 = \frac{bh_2}{\varepsilon}$$

alınırsa,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} \quad \text{ve} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}$$

olarak denklemi sadeleştirecek olan çarpan elde edilir. (6.1.1) denkleminde $\frac{h_1}{h_2}$ yerine $\frac{(1 - \lambda_1)}{(1 - \lambda_2)}$ yazılırsa,

$$a_3(\lambda_2) + a_4 \left(\frac{(1 - \lambda_1)}{(1 - \lambda_2)} \left(\lambda_2^{-M/2} (1 - \lambda_2) \right) + \lambda_2^{-M/2} \lambda_2 \right) \quad (6.1.14)$$

$$+ a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2 \lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon}$$

$$a_3(\lambda_2) + a_4 \left((1 - \lambda_1) \lambda_2^{-M/2} + \lambda_2^{-M/2} \lambda_2 \right) + a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2 \lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon}$$

a_4 katayılı denklem $\lambda_2^{-M/2}$ ortak parantezine alınırsa,

$$a_3(\lambda_2) + a_4 \left(\lambda_2^{-M/2} (1 - \lambda_1 + \lambda_2) \right) + a_5(-\lambda_2) + a_6 \left(-\lambda_2 \lambda_1^{-M/2-1} \right) = \frac{h_2}{\varepsilon}$$

elde edilir. Burada $\lambda_2^{-M/2} = \kappa_2^{-2}$ $\kappa_1 = \lambda_1^{M/4}$ ve $\kappa_3 = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ olduğundan, a_6 katsayılı denklemi κ 'a göre düzenlendiğinde;

$$-\lambda_2 \lambda_1^{-M/2-1} = -\kappa_1^{-2} \kappa_3^{-1}$$

olarak yazılırsa

$$a_3(\lambda_2) + a_4(\kappa_2^{-2}(1 - \lambda_1 + \lambda_2)) + a_5(-\lambda_2) + a_6(-\kappa_1^{-2}\kappa_3^{-1}) = \frac{h_2}{\varepsilon} \quad (6.1.15)$$

denklemi elde edilir.Sınır değerlerinin bir diğeri olan ;

$$\begin{aligned} (-\lambda_1)(a_7 + a_8\lambda_2^{-(3M/4+1)}) + \left(\frac{h_2}{h_1} + \lambda_1\right) \left(a_5 + a_6\lambda_1^{-(3M/4)}\right) \\ - \frac{h_2}{h_1} \left(a_5 + a_6\lambda_1^{-(3M/4-1)}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

denklemi ele alınırsa, denklem a_5, a_6, a_7, a_8 katsayılarına göre ,

$$\begin{aligned} a_7(-\lambda_1) + a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) + a_5\left(\frac{h_2}{h_1} + \lambda_1\right) + a_6\left(\frac{h_2}{h_1}\lambda_1^{-3M/4} + \lambda_1\lambda_1^{-3M/4}\right) + \\ a_5\left(-\frac{h_2}{h_1}\right) + a_6\left(-\frac{h_2}{h_1}\lambda_1^{-3M/4+1}\right) = 0 \end{aligned}$$

küçükten büyüğe düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a_5\left(\frac{h_2}{h_1} + \lambda_1 - \frac{h_2}{h_1}\right) + a_6\left(\frac{h_2}{h_1}\lambda_1^{-3M/4} + \lambda_1\lambda_1^{-3M/4} - \frac{h_2}{h_1}\lambda_1^{-3M/4+1}\right) + a_7(-\lambda_1) + \\ a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) = 0 \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapıp,

$$\begin{aligned} a_5(\lambda_1) + a_6\left(\frac{h_2}{h_1}\left(\lambda_1^{-3M/4} - \lambda_1^{-3M/4+1}\right) + \lambda_1^{-3M/4+1}\right) \\ + a_7(-\lambda_1) + a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

denkleminde $\frac{h_2}{h_1}$ yerine $\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_5(\lambda_1) + a_6\left(\frac{h_2}{h_1}\left(\lambda_1^{-3M/4}(1 - \lambda_1)\right) + \lambda_1^{-3M/4+1}\right) \\ + a_7(-\lambda_1) + a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

$$\begin{aligned} a_5(\lambda_1) + a_6\left(\frac{(1 - \lambda_2)}{(1 - \lambda_1)}\left(\lambda_1^{-3M/4}(1 - \lambda_1)\right) + \lambda_1^{-3M/4+1}\right) \\ + a_7(-\lambda_1) + a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

olup, $(1 - \lambda_1)$ çarpanı sadeleştirildiğinde,

$$a_5(\lambda_1) + a_6\left((1 - \lambda_2)\lambda_1^{-3M/4} + \lambda_1^{-3M/4+1}\right) + a_7(-\lambda_1) + a_8(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4-1}) = 0$$

uygun çözüme ulaşmak için λ_1 ve λ_2 'lerin üsleri düzenlendiğinde,

$$a_5(\lambda_1) + a_6 \left((1 - \lambda_2)\lambda_1^{-3M/4} + \lambda_1^{-3M/4}\lambda_1 \right) + a_7(-\lambda_1) + a_8 \left(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4}\lambda_2^{-1} \right) = 0$$

burada $\lambda_1^{-3M/4}$ parantezine alınarak,

$$a_5(\lambda_1) + a_6 \left(\lambda_1^{-3M/4} ((1 - \lambda_2) + \lambda_1) \right) + a_7(-\lambda_1) + a_8 \left(-\lambda_1\lambda_2^{-3M/4}\lambda_2^{-1} \right) = 0$$

denklemini $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ türünden yazılabilir.

$$\kappa_1 = \lambda_1^{M/4}, \quad \kappa_2 = \lambda_2^{M/4}, \quad \kappa_3 = \lambda_1\lambda_2^{-1},$$

olmak üzere,

$$a_5(\lambda_1) + a_6 \left((\lambda_1^{M/4})^{-3} (1 - \lambda_2 + \lambda_1) \right) + a_7(-\lambda_1) + a_8 \left(-\lambda_1\lambda_2^{-1} (\lambda_2^{M/4})^{-3} \right) = 0$$

denklemini;

$$a_5(\lambda_1) + a_6 \left(\kappa_1^{-3} (1 - \lambda_2 + \lambda_1) \right) + a_7(-\lambda_1) + a_8 \left(-\kappa_3\kappa_2^{-3} \right) = 0 \quad (6.1.20)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklemlerin katsayılar matrisini oluşturmak için $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ ve a_8 katsayılarına bağlı denklemler yazılırsa

$$a_1 + a_2\kappa_1^{-0} = 0 \quad (6.1.21)$$

$$a_1 + a_2 = 0 \quad (6.1.22)$$

$$a_1 - a_3 + a_2\kappa_1^{-M/4} - a_4\kappa_2^{-M/4} = 0 \quad (6.1.23)$$

$$a_1 - a_2\kappa_1^{-1} - a_3 - a_4\kappa_2^{-M/4} = 0 \quad (6.1.24)$$

$$a_7 + a_8\kappa_2^{-M} = 0 \quad (6.1.25)$$

$$a_3 - a_5 + a_4\lambda_2^{-M/2} - a_6\lambda_1^{-M/2} = 0 \quad (6.1.26)$$

$$a_3 - a_5 + a_4\lambda_2^{-M/2} - a_6\lambda_1^{-M/2} = 0 \quad (6.1.27)$$

denklemler katsayılarına göre düzenli olarak yazılırsa sekiz adet doğrusal denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$a_1 + a_2 = 0 \quad (6.1.28)$$

$$a_1 - a_2 \kappa_1^{-1} - a_3 - a_4 \kappa_2^{-1} = 0 \quad (6.1.29)$$

$$a_7 + a_8 \kappa_2^{-4} = 0 \quad (6.1.30)$$

$$a_3 + a_4 \kappa_2^{-2} - a_5 - a_6 \kappa_1^{-2} = 0 \quad (6.1.31)$$

$$a_5 + a_6 \kappa_1^{-3} a_7 - a_8 \kappa_2^{-3} = 0 \quad (6.1.32)$$

$$a_1(\lambda_1) + a_2(\kappa_1^{-1}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)) - a_3 \lambda_1 - a_4 \kappa_2^{-1} \kappa_3 = 0 \quad (6.1.33)$$

$$a_3(\lambda_2) + a_4(\kappa_2^{-1}(1 - \lambda_1 + \lambda_1)) - a_5 \lambda_2 - a_6 \kappa_1^{-2} \kappa_3^{-1} = \frac{h_2}{\varepsilon} \quad (6.1.34)$$

$$a_5(\lambda_1) + a_6(\kappa_1^{-3}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)) - a_7 \lambda_1 - a_8 \kappa_3 \kappa_2^{-3} = 0 \quad (6.1.35)$$

yukarıdaki denklem sisteminde $\kappa_1 = \lambda_1^{M/4}$, $\kappa_2 = \lambda_2^{M/4}$, $\kappa_3 = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ olmak üzere, denklem sistemi tekrar düzenlenirse,

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 \kappa_1^{-1} - a_3 - a_4 \kappa_2^{-1} = 0$$

$$a_3 + a_4 \kappa_2^{-2} - a_5 - a_6 \kappa_1^{-2} = 0$$

$$a_5 + a_6 \kappa_1^{-3} - a_7 - a_8 \kappa_2^{-3} = 0$$

$$a_1 \lambda_1 + a_2[\kappa_1^{-1}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)] - a_3 \lambda_1 - a_4 \kappa_2^{-1} \kappa_3 = 0$$

$$a_3 \lambda_2 + a_4[\kappa_2^{-2}(1 - \lambda_1 + \lambda_2)] - a_5 \lambda_2 - a_6 \kappa_1^{-2} \kappa_3^{-1} = \frac{h_2}{\varepsilon}$$

$$a_5 \lambda_1 + a_6[\kappa_1^{-3}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)] - a_7 \lambda_1 - a_8(\kappa_3 \kappa_2^{-3}) = 0$$

$a_7 + a_8 \kappa_2^{-4} = 0$ elde edilir. Elde edilen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi oluşturulursa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \kappa_1^{-1} & -1 & -\kappa_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \zeta_1 & -\lambda_1 & -\kappa_2^{-1} \kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \kappa_2^{-2} & -1 & -\kappa_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \zeta_2 & -\lambda_2 & -\kappa_1^{-2} \kappa_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa_1^{-3} & -1 & -\kappa_2^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \zeta_3 & -\lambda_1 & -\kappa_3 \kappa_2^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa_2^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{h_2}{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.36)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\zeta_1 = \kappa_1^{-1}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)$, $\zeta_2 = \kappa_2^{-2}(1 - \lambda_1 + \lambda_2)$ ve $\zeta_3 = \kappa_1^{-3}(1 - \lambda_2 + \lambda_1)$ alınmaktadır. Bu sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ biçiminde de yazılabilir. (6.1.36)

lineer denklem sistemi sembolik hesaplama programlama dillerinden biri yardımıyla çözümlerse

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h_2 \lambda_1^{1+\frac{M}{4}}}{\varepsilon \lambda_2 (\lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) + (-1 + \lambda_1) \lambda_2^{-M/4})}, & a_2 &= -\frac{h_2 \lambda_1^{1+\frac{M}{4}}}{\varepsilon \lambda_2 (\lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) + (-1 + \lambda_1) \lambda_2^{-M/4})} \\ a_3 &= \frac{h_2 (\lambda_1 (-1 + \lambda_1^{M/4}) + \lambda_2)}{\varepsilon \lambda_2 (\lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) + (-1 + \lambda_1) \lambda_2^{-M/4})}, & a_4 &= \frac{h_2 \lambda_2^{M/2}}{\varepsilon (-1 + \lambda_1 + \lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) \lambda_2^{M/4})} \\ a_5 &= \frac{-h_2 \lambda_2 + h_2 \lambda_2^{M/4} (-\lambda_1 + \lambda_2)}{\varepsilon (-1 + \lambda_1 + \lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) \lambda_2^{M/4})}, & a_6 &= \frac{-h_2 \lambda_1^{1+\frac{M}{4}}}{\varepsilon \lambda_2 (\lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) + (-1 + \lambda_1) \lambda_2^{-M/4})} \\ a_7 &= \frac{h_2}{\varepsilon (-1 + \lambda_1 + \lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) \lambda_2^{M/4})}, & a_8 &= \frac{h_2 \lambda_2^M}{\varepsilon (-1 + \lambda_1 + \lambda_1^{M/4} (1 + \lambda_1) \lambda_2^{M/4})} \end{aligned}$$

$a_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ bilinmeyenleri elde edilir. $\kappa_1 = \lambda_1^{M/4}$, $\kappa_2 = \lambda_2^{M/4}$, $\kappa_3 = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$, $\eta = \varepsilon (\lambda_1 - 1) (1 + \lambda_1 M / 4 \lambda_2 M / 4)$ olmak üzere, $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ bilinmeyenleri tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h_2}{\eta} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \\ a_2 &= -\frac{h_2}{\eta} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{h_2}{\eta} (-\kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_2)$$

$$a_4 = -\frac{h_2}{\eta} \kappa_2^2$$

$$a_5 = -\frac{h_2}{\eta} (\lambda_2 - \lambda_2 \kappa_2 + \lambda_1 \kappa_2) \lambda_2^{-1}$$

$$a_6 = \frac{h_2}{\eta} (\kappa_1^3 \kappa_2 \kappa_3)$$

$$a_7 = -\frac{h_2}{\eta}$$

$$a_8 = \frac{h_2}{\eta} \kappa_2^4$$

kökleri elde edilir. Bu kökler G_j^i fonksiyonunda yerine yazılarak limitleri hesaplanacaktır. Bu limitler $g_i'(x_{i-1})$ ve $g_i'(x_{i+1})$ fonksiyonlarından elde edilecektir. Bunun için G_j^i parçalı tanımlı fonksiyonu kullanılırsa,

$$g_i'(x_{i-1}) \cong D^+ G_0 = \frac{G_1 - G_0}{h_1^*} \quad g_i'(x_{i+1}) \cong D^- G_M = \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*}$$

Bu gelişmiş nümerik metod bize (4.1.18) nolu denklemin çözümünü verecektir.

$$-\varepsilon D^+ G_0 \bar{U}_{i-1} + \bar{U}_i + \varepsilon D^- G_M \tilde{U}_{i+1} = (f_i - c \tilde{U}_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx$$

Bu denklem ancak ε - Düzgün Yakınsak metodu kullanılarak çözülebilir. Bunun için Bir sonraki bölümde G^i fonksiyonunun indislerine göre T_1 , T_2 , T_3 ve T_4 değerleri elde edilecek ve yakınsaklık durumları incelenecektir.

7. YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

(6.1.1) nümerik metodunun yakınsaklık özelliklerini araştırmak için; düşünülen bu metodun ε da düzgün yakınsadığını ispatlamak için gereken iyi bilinen bazı sonuçlar hatırlatılacaktır. Öncelikle problem (4.1.1) için türevi (4.1.18) yerel Green probleminin tam çözümünü kullanan Şekil (6.1) geri formda yeniden yazılır:

$$B_D(\rho_i) = \frac{\rho}{e^\rho - 1}$$

$$B_C(\rho_i) = 1$$

$$B_R(\rho_i) = 1$$

olmak üzere

$$\begin{cases} U_0 = u_0, U_N = u_1, U \in V(\Omega^N) \text{ ve } 1 \leq i \leq N-1 \\ -\varepsilon B_D(\rho_i) D^+ D^- U_i + b_i B_C(\rho_i, \gamma_i) D^- U_i + c_i B_R(\rho_i) U_i = f_i. \end{cases} \quad (7.0.1)$$

Diğer taraftan $\hat{\sigma}_i > 0$, $\hat{\eta}_i \gg 0$ ve $\hat{\theta}_i > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \hat{U}_0 = u_0, \hat{U}_N = u_1, \text{ ve } \hat{U} \in V(\Omega^N) \\ -\varepsilon \hat{\sigma}_i D^+ D^- \hat{U}_i + \hat{\xi}_i b_i D^- \hat{U}_i + \hat{\theta}_i c_i \hat{U}_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{cases} \quad (7.0.2)$$

formunda bir fark şeması ele alınır. (Farrell, 1982)'de (7.0.2) formunda yazılmış şemaların düzgün yakınsaklığı için yeter şartlar türetilmiştir ve katsayıları (7.0.1) metodunun katsayılarına yakın olan (7.0.2) tipindeki şemaların da düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Bu bağlamda (7.0.2) denlemini yeniden ifade edildiğinde

$$-\varepsilon D^2 U_i \sigma_i + \xi_i b D^- U_i + \theta_i U_i \cdot c = f_i \quad (7.0.3)$$

$$-\varepsilon \sigma \left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} \right) + b \xi \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h} \right) + \theta \cdot c \cdot U_i = f_i \quad (7.0.4)$$

denklemleri U_i , U_{i-1} , U_{i+1} katsayılarına göre düzenlenirse,

$$U_{i-1} \left(-\frac{\varepsilon\sigma}{h^2} - \frac{b\xi}{h} \right) + U_i \left(\frac{2\varepsilon\sigma}{h^2} + \frac{b\xi}{h} + c\theta \right) + U_{i+1} \left(\frac{-\varepsilon\sigma}{h^2} \right) = f_i \quad (7.0.5)$$

$\varphi = \frac{bh}{2\varepsilon}$ olmak üzere, (7.0.5) denkleminin parantez içerisindeki terimlerinin paydaları eşitlenip, gerekli kesirler $\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}$ ifadesi ile çarpılırsa ,

$$U_{i-1} \left(-\frac{\varepsilon\sigma}{h^2} - \frac{\xi bh \cdot 2\varepsilon}{h^2 \cdot 2\varepsilon} \right) + U_i \left(\frac{2\varepsilon\sigma}{h^2} + \frac{\xi 2b \cdot h 2\varepsilon}{h^2 \cdot 2\varepsilon} + c\theta \frac{bh^2}{h^2} \right) - U_{i+1} \left(\frac{\varepsilon\sigma}{h^2} \right) = f_i \quad (7.0.6)$$

bu denklemde, $\varphi = \frac{bh}{2\varepsilon}$ ifadesi oluşturulup, yerine yazıldığında (7.0.6) denkleminin katsayıları ε çarpanına göre tekrar düzenlendiğinde,

$$-\varepsilon U_{i-1} \left(\frac{\sigma + 2\xi\varphi}{h^2} \right) + 2\varepsilon U_i \left(\frac{\sigma + \xi\varphi + \theta \cdot \frac{c \cdot h^2}{2\varepsilon}}{h^2} \right) - \varepsilon U_{i+1} \left(\frac{\sigma}{h^2} \right) = f_i \quad (7.0.7)$$

$$-U_{i-1} \left(\frac{\sigma + \xi\varphi}{\sigma + \xi \cdot \varphi + c \cdot \theta \cdot \frac{h^2}{2\varepsilon}} \right) + U_i + \left(\frac{-\frac{\sigma}{2}\varepsilon}{\sigma + \xi \cdot \varphi + c \cdot \theta \cdot \frac{h^2}{2\varepsilon}} \right) U_{i+1} = \frac{f_i(h^2/2\varepsilon)}{\sigma + \xi \cdot \varphi + c \cdot \theta \cdot \frac{h^2}{2\varepsilon}}$$

yukarıdaki denklemde $\Delta = \sigma + \xi \cdot \varphi + c \cdot \theta \cdot \frac{h^2}{2\varepsilon}$ olmak üzere (7.0.7) denklemini yeniden yazılırsa

$$-U_{i-1} \left(\frac{\sigma + \xi\varphi}{\Delta} \right) + U_i + \left(\frac{-\frac{\sigma}{2}\varepsilon}{\Delta} \right) U_{i+1} = \frac{f_i(h^2/2\varepsilon)}{\Delta} \quad (7.0.8)$$

denklemini elde edilir. (7.0.8) denkleminde parantez içerisindeki ifadelerle sırasıyla T_1 , T_2 ve T_3 dönüşümü uygulanırsa,

$$T_1 = \frac{\frac{\sigma}{2} + \xi \cdot \varphi}{\Delta} \quad (7.0.9)$$

$$T_2 = \frac{\sigma}{2\Delta} \quad (7.0.10)$$

$$T_3 = \frac{h^2}{2\Delta\varepsilon} \quad (7.0.11)$$

olmak üzere

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{\frac{\sigma}{2\Delta}}{\frac{h^2}{2\Delta\varepsilon}} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\Delta} = \frac{h^2}{2\Delta\varepsilon} \frac{T_2}{T_3} \quad (7.0.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{2} = \frac{h^2}{2\varepsilon} \frac{T_2}{T_3} \quad (7.0.13)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{h^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T_3} \quad (7.0.14)$$

bulunur. Bu eşitliklerden yararlanılarak T_1 , T_2 ve T_3 denklemleri tekrar yazılırsa,

$$T_1 = \frac{\sigma}{2\Delta} + \frac{\tau\varphi}{\Delta} \quad (7.0.15)$$

$$T_2 = \frac{\sigma}{2\Delta} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\sigma}{2\Delta} + \frac{\xi\varphi}{\Delta} - \frac{\sigma}{2\Delta} \quad (7.0.16)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\xi\varphi}{\Delta} \quad (7.0.17)$$

$\varphi = \frac{bh}{2\varepsilon}$ olmak üzere sadeleştirmeler yapılırsa,

$$T_3 = \frac{h^2}{2\Delta\varepsilon} \Rightarrow \frac{T_1 - T_2}{T_3} = \frac{\xi\varphi}{\frac{h^2}{2\Delta\varepsilon}} \quad (7.0.18)$$

$$\Rightarrow \xi\varphi = \frac{h^2}{2\varepsilon} \frac{T_1 - T_2}{T_3} \quad (7.0.19)$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{h^2}{2\varepsilon\varphi} \frac{T_1 - T_2}{T_3} \quad (7.0.20)$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{h^2}{2\varepsilon\frac{bh}{2\varepsilon}} \frac{T_1 - T_2}{T_3} = \frac{h^2}{\varepsilon\frac{bh}{\varepsilon}} \frac{T_1 - T_2}{T_3} \quad (7.0.21)$$

$\rho = \frac{bh}{\varepsilon}$ olmak üzere, (7.0.18) denklemini en sade şekli ile

$$\xi = \frac{h^2}{\varepsilon\rho} \frac{T_1 - T_2}{T_3} \quad (7.0.22)$$

olarak elde edilir.

$$\Delta = \sigma + \xi.\varphi + \theta.\frac{ch^2}{2\varepsilon} \quad (7.0.23)$$

$$\Delta = \frac{2\sigma}{2} + \xi.\varphi + \theta.\frac{ch^2}{2\varepsilon} \quad (7.0.24)$$

şeklinde yazılırsa,

$$\theta.\frac{ch^2}{2\varepsilon} = \Delta - \left(\frac{2\sigma}{2} + \xi\varphi\right) \quad (7.0.25)$$

$$\theta.\frac{ch^2}{2\varepsilon} = \frac{h^2}{2\varepsilon} \left(\frac{1 + c.T_3 - T_1 - T_2}{T_3}\right) \quad (7.0.26)$$

θ bilinmeyenini elde edebilmek için (7.0.26) denklemini uygun şekilde düzenlendiğinde,

$$\theta = \frac{1}{c} \left(\frac{1 + c.T_3 - T_1 - T_2}{T_3}\right) \quad (7.0.27)$$

olarak elde edilir. O halde (7.0.27) denkleminde T_1 , T_2 ve T_3 denklemleri, G_i fonksiyonu kullanılarak,

$$T_1 = \frac{\varepsilon G_1}{h_1}, \quad T_2 = \frac{\varepsilon G_{M-1}}{h_2} \quad \text{ve} \quad T_3 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G_i dx \quad (7.0.28)$$

olarak yazılabilir.

$$\sigma_i = \frac{h^2}{\varepsilon} \frac{T_2}{T_3}, \quad \xi_i = \frac{h^2}{\varepsilon \rho_i} \frac{T_1 - T_2}{T_3}, \quad \theta_i = \frac{1}{c_i} \left(\frac{1 + c_i T_3 - T_1 - T_2}{T_3} \right) \quad (7.0.29)$$

ve

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= \varepsilon D^+ G_0, \\ T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= -\varepsilon D^- G_M, \\ T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx \end{aligned} \quad (7.0.30)$$

olmak üzere (7.0.1) nümerik metodu bazı cebirsel işlemler yapılarak (7.0.2) formunda yeniden yazılır:

$$-\varepsilon \sigma_i D^+ D^- \tilde{U}_i + \xi_i b_i D^- \tilde{U}_i + \theta_i c_i \tilde{U}_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (7.0.31)$$

Bu durumda (7.0.31) metodunun düzgün yakınsak olduğunun ispatlanabilmesi için (7.0.2) denklemindeki σ_i , ξ_i ve θ_i katsayılarının (7.0.1) nümerik metodunun katsayılarına keyfi şekilde yakın yapılabilmesi yeterlidir. Yani düzgün yakınsaklık için,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_D(\rho_i), \quad (7.0.32)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \xi_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_C(\rho_i), \quad (7.0.33)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = B_R(\rho_i) \quad (7.0.34)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. G^i , x_{i-1} noktasından x_{i+1} noktasına kadar integralde kesin pozitif olan bir fonksiyon olduğundan ilk olarak (7.0.30)'te sırasıyla $i = 1, 2, 3$ için $\lim_{M \rightarrow \infty} T_i$ değerleri bulunabilir ve sonra bunlar (7.0.32)-(7.0.34) limitlerini bulmak için bir araya getirilir.

Lema 7.1 $T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (7.0.30) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \varepsilon D^+ G_0 \quad (7.0.35)$$

olsun. Eğer ρ_i değişkeni sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_1(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \frac{e^{\rho_i}}{1 + e^{\rho_i}}. \quad (7.0.36)$$

İspat: τ ya göre iki durumun göz önüne alınması gerekir. $\tau = h/2$ olan ilk durumda ağ $h_1^* = h_2^* = 2h/M$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + \frac{2b_i h}{M\varepsilon}$ ile birlikte düzgündür. Bu gerçekler kullanılarak T_1 değeri, yeniden düzenlenilerek ve (6.1.3) denklemindeki G^i nin tam çözümü kullanılarak yeniden yazılabilir.

$$T_1 = \frac{G_1 - G_0}{h_1} = \frac{h_2 (\lambda_1^{M/4} \lambda_1 \cdot \lambda_2^{M/4} \lambda_2^{-1}) (1 - \lambda_1^{-1})}{h_1 \eta} \quad (7.0.37)$$

ve $G_0 = 0$ olduğundan $G_1 = a_1 + a_2 \lambda_1^{-j}$ denkleminde

$$G_1 = \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{\lambda_1^{M/4+1} \lambda_2^{M/4-1}}{(\lambda_1 - 1)(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} + \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{\lambda_1^{M/4+1} \lambda_2^{M/4-1}}{(\lambda_1 - 1)(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} \lambda_1^{-1} \quad (7.0.38)$$

$$G_1 = h_2 \frac{\lambda_1^{M/4+1} \lambda_2^{M/4-1}}{\eta} (1 - \lambda_1^{-1}) \quad (7.0.39)$$

$$G_1 = \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{\lambda_1^{M/4} \lambda_2^{M/4} \lambda_1 \lambda_2^{-2}}{(\lambda_1 - 1)(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} (1 - \lambda_1^{-1}) \quad (7.0.40)$$

$$G_1 = \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{\lambda_1^{M/4} \lambda_2^{M/4} \lambda_1}{\lambda_2 (\lambda_1 - 1)(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} \frac{(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1} \quad (7.0.41)$$

$$G_1 = \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{1}{\lambda_2 (1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-M/4})} \quad (7.0.42)$$

(7.0.42) denkleminde her iki taraf $\frac{1}{h_1}$ ile çarpılırsa, $\frac{G_1}{h_1} = \frac{h_2}{h_1 \varepsilon \lambda_2 (1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-M/4})}$ olarak yazılabilir. Burada

$$\lambda_1 = 1 + \frac{bh_1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{bh_1}{\varepsilon} = \lambda_1 - 1 \quad (7.0.43)$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{bh_2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{bh_2}{\varepsilon} = \lambda_2 - 1 \quad (7.0.44)$$

eşitliklerinden ; $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}$ elde edilir ve (7.0.37) denkleminde yerine yazılırsa,

$$T_1 = \frac{G_1 - G_0}{h_1} = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} \frac{1}{\varepsilon \lambda_2 (1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{-M/4})} \quad (7.0.45)$$

olarak elde edilir. $h_2 = h_1 = \frac{2h}{M}$ olması durumunda denklem en sade şeklini alacaktır.

Bu da düzgün parçalanmış aralıklara karşılık gelir.

Her $x \in \mathfrak{R}$ için $\lim_{M \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{M})^M = e^x$ olduğu gerçeği kullanılarak bir hesaplamayla

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_1 - G_0}{h_1^*} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\rho_i}}{1 + e^{\rho_i}}.$$

elde edilir.

Lema 7.2 $T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (7.0.30) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = -\varepsilon D^- G_M \quad (7.0.46)$$

olsun. Eğer ρ_i değişkeni sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_2(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + e^{\rho_i}}. \quad (7.0.47)$$

İspat: Lemma (7.1)'in ispatındakilerle aynı akıl yürütmeler kullanılır. $\tau = h/2$ olan durum için yine (6.1.3) denklemindeki G^i fark çözümü ve $h_1^* = h_2^* = 2h/M$ değeri kullanılırsa $T_2 = \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2}$ değeri için,

$$a_7 + a_8 \lambda_2^{-j} = -\frac{h_2}{\eta} + \frac{h_2}{\eta} \lambda_2^M \lambda_2^{-j} \quad (7.0.48)$$

eşitliğini düzenlersek,

$= \frac{h_2}{\eta} (-1 + \lambda_2^{-j+M})$ eşitliğine G_{M-1} fonksiyonu uygulanırsa,

$G_M = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2} \\ &= \frac{-\frac{h_2}{\eta} (-1 + \lambda_2^{-(M-1)+M})}{h_2} = \frac{1 - \lambda_2}{\eta} = \frac{(1 - \lambda_2)}{\varepsilon (\lambda_1 - 1) (1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} \\ &= \frac{-(\lambda_2 - 1)}{\varepsilon (\lambda_1 - 1) (1 + \lambda_1 \lambda_2)^{M/4}} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{h_2}{h_1} \frac{1}{(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})} \end{aligned}$$

olarak yazılırsa,

$$T_2 = \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = \frac{-(\lambda_2 - 1)}{\varepsilon(\lambda_1 - 1)(1 + \lambda_1 \lambda_2)^{M/4}} = \frac{-1}{\varepsilon} \frac{h_2}{h_1} \frac{1}{(1 + (\lambda_1 \lambda_2)^{M/4})}$$

ve buradan

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G_M - G_{M-1}}{h_2^*} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + e^\rho}. \quad (7.0.49)$$

olduğunu gösterir.

Lema 7.3 $T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M)$ değeri (7.0.30) denklemindeki gibi verilsin; yani

$$T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx \quad (7.0.50)$$

olsun. Eğer ρ_i değişkeni sabit ise

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T_3(\varepsilon, b_i, c_i, h, M) = \frac{h}{b_i} \frac{e^{\rho_i} - 1}{e^{\rho_i} + 1}. \quad (7.0.51)$$

İspat: (7.0.50) integralini hesaplamak için (6.1.3) denklemindeki G^i nin tam çözümü ve yamuklar yöntemi kullanılırsa

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\tau} G^i dx + \int_{x_{i-1}+\tau}^{x_i} G^i dx + \int_{x_i}^{x_i+\tau} G^i dx + \int_{x_i+\tau}^{x_{i+1}} G^i dx. \quad (7.0.52)$$

$\tau = h/2$ olan ilk durumda (7.0.52) ifadesi dikkate değer bir şekilde

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \lim_{M \rightarrow \infty} I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

olmak üzere T_3 integrali, I_1 I_2 I_3 ve I_4 integrallerinin toplamı olarak yazıldığından,

$$\begin{aligned}
\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx &= \frac{1}{2b^2} \left(bh - \frac{2bh}{1 + \left(1 + \frac{2bh}{\varepsilon M}\right)^{M/2}} \right. \\
&+ \frac{bh(M-2) - 2\varepsilon M + 2(bh + \varepsilon M) \left(\frac{\varepsilon M}{2bh + \varepsilon M}\right)^{M/4}}{M \left(1 + \left(\frac{\varepsilon M}{2bh + \varepsilon M}\right)^{M/2}\right)} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon M \left(1 + \left(\frac{\varepsilon M}{2bh + \varepsilon M}\right)^{M/2}\right)^2} (2bh + \varepsilon M)^{-M} (\\
&- 2b^2 h^2 (\varepsilon M)^M - bh \varepsilon M (\varepsilon M)^M - 2\varepsilon (\varepsilon M)^{1 + \frac{3M}{4}} (2bh + \varepsilon M)^{M/4} \\
&- 2bh \varepsilon (\varepsilon M)^{\frac{3M}{4}} (2bh + \varepsilon M)^{M/4} - 2bh \varepsilon (\varepsilon M)^{M/4} (2bh + \varepsilon M)^{3M/4} \\
&- 2\varepsilon (\varepsilon M)^{\frac{4+M}{4}} (2bh + \varepsilon M)^{3M/4} + 2b \varepsilon h (2bh + \varepsilon M)^M \\
&+ 2\varepsilon^2 M (2bh + \varepsilon M)^M + (\varepsilon M (2bh + \varepsilon M))^{M/2} (2bh(\varepsilon - bh) \\
&+ \varepsilon(2\varepsilon - bh)M))
\end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \frac{h \tanh\left(\frac{bh}{2\varepsilon}\right)}{b} = \frac{b}{h} \frac{-1 + e^{\frac{bh}{\varepsilon}}}{\frac{bh}{\varepsilon} + 1}$$

$$T_3 = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G^i dx = \frac{h}{b_i} \frac{e^{\rho_i} - 1}{e^{\rho_i} + 1}$$

olarak gösterilmiş olur.

Sonuç 7.1 Eğer ρ_i değişkeni sabit ise, (7.0.31) denklemindeki σ_i , ξ_i ve θ_i katsayıları (7.0.1) nümerik metodunun katsayılarına yakınsar. Yani;

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i(\varepsilon, b_i, h, M) = B(\rho_i), \quad (7.0.53)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \xi_i(\varepsilon, b_i, h, M) = 1, \quad (7.0.54)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i(\varepsilon, b_i, h, M) = 1. \quad (7.0.55)$$

İspat: (7.0.29) denkleminin σ_i değişkeninin tanımı hatırlanır ve Lemma 7.2 ve Lemma 7.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_i &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{h^2 T_2}{\varepsilon T_3} = \frac{h^2 \lim_{M \rightarrow \infty} T_2}{\varepsilon \lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = \frac{h^2}{\varepsilon} \frac{1}{e^{\rho_i} + 1} \frac{h e^{\rho_i} - 1}{b e^{\rho_i} + 1} = B(\rho_i) \\
&= \frac{h^2}{\varepsilon} \frac{1}{e^{\rho_i} + 1} \frac{b e^{\rho_i} + 1}{h e^{\rho_i} - 1} = \rho_i \frac{1}{e^{\rho_i} - 1} \quad (7.0.56)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (7.0.54) ve (7.0.55) in ispatları da benzerdir fakat bunları ispatlamak için aynı zamanda Lemma 7.1 de kullanılır.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \xi_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{h (T_1 - T_2)}{b_i T_3} = \frac{h}{b_i} \frac{\lim_{M \rightarrow \infty} (T_1 - T_2)}{\lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = B_C(\rho_i).$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \theta_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{c_i} \left(\frac{1 - T_1 - T_2}{T_3} \right) = \frac{1}{c_i} \frac{\lim_{M \rightarrow \infty} (1 - T_1 - T_2)}{\lim_{M \rightarrow \infty} T_3} = B_R(\rho_i).$$

Teorem 7.2 (7.0.31) fark denkleminin çözümü maksimum normda (2.1.1) probleminin tam çözümüne ε da düzgün olarak yakınsar.

İspat: (Farrell, 1982).

8. ÖRNEK PROBLEM

8.1 Nümerik Çözüm ve Tartışma

Kullanmış olduğumuz nümerik metodun güvenirliliğini ölçmek için $(0, 1)$ aralığında $u(0) = u(1) = 0$ sınır değerleri ile verilen

$$-\varepsilon u'' + u' = 2x \quad (8.1.1)$$

sınır değer problemi ele alındığında, Green fonksiyonun özelliklerinden yararlanılarak, (8.1.1) problemi $(0,1)$ aralığında düzenli aralıklara parçalanarak uygun bir ağ oluşturulursa, bu ağ üzerinde düğüm noktaları M ve N ile temsil edildiğinde, $4 \leq m \leq 7$ ve $3 \leq n \leq 16$ olmak üzere, $M = 2^m$ ve $N = 2^n$ ile oluşturulan düzenli bir ağ üzerinde $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$, ve $\varepsilon = 10^{-6}$ olacak şekilde ε değerleri için hata analizi yapılarak aşağıdaki tablolar ile verilmektedir.

Yerel Ağ Noktalarının Sayısı (M)

N ↓	16	32	64	128	256	II'in
2^4	1.2122e-004	9.9112e-005	8.9119e-005	8.4424e-005	8.2073e-005	2.1709e-005
2^5	4.2366e-005	3.0481e-005	2.4882e-005	2.2311e-005	2.1122e-005	2.8356e-006
2^6	1.6759e-005	1.0623e-005	7.6372e-006	6.2271e-006	5.5802e-006	3.6219e-007
2^7	7.2976e-006	4.1943e-006	2.6575e-006	1.9099e-006	1.5572e-006	4.5761e-008
2^8	3.3832e-006	1.8255e-006	1.0489e-006	6.6450e-007	4.7752e-007	5.7508e-009
2^9	1.6258e-006	8.4602e-007	4.5645e-007	2.6225e-007	1.6613e-007	7.2076e-010
2^{10}	7.9651e-007	4.0649e-007	2.1152e-007	1.1411e-007	6.5563e-008	9.0224e-011
2^{11}	3.9417e-007	1.9913e-007	1.0163e-007	5.2884e-008	2.8522e-008	1.1274e-011
2^{12}	1.9609e-007	9.8541e-008	4.9814e-008	2.5376e-008	1.3198e-008	1.4222e-012
2^{13}	9.7669e-008	4.8885e-008	2.4662e-008	1.2467e-008	6.3709e-009	2.8032e-013
2^{14}	4.8865e-008	2.4206e-008	1.2010e-008	6.2972e-009	3.2516e-009	2.1770e-013
2^{15}	2.5499e-008	1.2208e-008	5.7307e-009	1.5420e-009	1.4740e-011	4.5766e-013

Çizelge 8.1: M ve N nin artan değerleri için hata tablosu ($\varepsilon = 1$)

Yerel Ağ Noktalarının Sayısı (M)

N ↓	16	32	64	128	256	II'in
2 ⁴	5.8592e-002	5.8592e-002	5.8592e-002	5.8592e-002	5.8592e-002	5.8592e-002
2 ⁵	3.0272e-002	3.0272e-002	3.0272e-002	3.0272e-002	3.0272e-002	3.0272e-002
2 ⁶	1.5379e-002	1.5379e-002	1.5379e-002	1.5379e-002	1.5379e-002	1.5379e-002
2 ⁷	7.7495e-003	7.7495e-003	7.7495e-003	7.7495e-003	7.7495e-003	7.7495e-003
2 ⁸	3.8890e-003	3.8890e-003	3.8890e-003	3.8890e-003	3.8890e-003	3.8890e-003
2 ⁹	1.9473e-003	1.9473e-003	1.9473e-003	1.9473e-003	1.9473e-003	1.9473e-003
2 ¹⁰	9.7361e-004	9.7361e-004	9.7361e-004	9.7361e-004	9.7361e-004	9.7361e-004
2 ¹¹	4.8604e-004	4.8604e-004	4.8604e-004	4.8604e-004	4.8604e-004	4.8604e-004
2 ¹²	2.4209e-004	2.4208e-004	2.4208e-004	2.4208e-004	2.4208e-004	2.4208e-004
2 ¹³	1.2045e-004	1.2006e-004	1.2006e-004	1.2006e-004	1.2006e-004	1.2006e-004
2 ¹⁴	6.5135e-005	1.1517e-004	5.9032e-005	5.9032e-005	5.9032e-005	5.9032e-005
2 ¹⁵	1.1517e-004	2.9680e-005	2.8527e-005	2.8517e-005	2.8517e-005	2.8517e-005

Çizelge 8.2: M ve N nin artan değerleri için hata tablosu ($\varepsilon = 10^{-6}$)

(Herceg, 2011)'de $-\varepsilon^2 y'' + \mu y' + y = 0$, $y(0) = y(1) = f(x)$ sınır değer problemini ele alarak yeni yöntemler ile dördüncü mertebeden yakınsatan çözümleri N ve ε 'nin farklı değerleri için iki tablo halinde verilmektedir.

9. SONUÇ

Bu tezde önemi iki kat artmış olan, tekil noktada pertürbe edilmiş bir sınır değer problemi için ε -düzgün bir nümerik metod düşünüldü. Bu problem temelde bir ön bilgi gerektirmez. Çünkü tekil noktada pertürbe edilmiş bir sınır değer probleminin çözümü bilinmiş klasik uygun örüntülerle uygulanmış metodlarda güvenilir sonuçlar vermez. Bir başka ifadeyle daha önce bu tür problemler için uygun örüntüler oluşturulmuş ve kullanılmış olsa da yerel sınır değer problemi için bu sonuçlar tam bir çözüm içermemektedir. Bu tez ile var olan bu klasik çözüme karşın ε -düzgün yakınsak bir metod detaylı olarak ispatlandı ve böylece bu metodun ε -düzgün ağlar üzerinde geliştirilebileceği de gösterilerek, tam olarak düzgün ağlar üzerinde bir ε -düzgün yakınsak metoda geliştirilebileceği mümkün kılındı. Son olarak teorik sonuçlar ile nümerik sonuçların güvenilir bir şekilde örtüştüğü de tablolar ile gösterildi.

KAYNAKLAR

- El-Mistikawy, T.M., Werle, M.J. 1978. Numerical method for boundary layers with blowing-The exponential box scheme. **AIAA J.**, 16: 749–751.
- Farrell, P.A. 1982. Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of Difference Schemes for Singularly Perturbed Turning and Non-turning Point Problems. Computational and Asymptotic Methods for Boundary and Interior Layers, Boole Press, 230–235.
- Filiz A., Neslitürk A. I., Ekici M., 2009. An ε -uniform Numerical Method for A Singularly-Perturbed Problem XXII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Şirince, İzmir.
- Filiz A., 2010. ε -uniform Convergence for A Boundary Value Problem. XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erciyes Üniversitesi (Kayseri).
- Hegarty, P.A., Miller, J.J.H., O’Riordan, E. 1980. Sufficient Conditions for the Uniform Second Order Difference Schemes for Singular Perturbation Problems. In J. J. H. Miller editör, BAIL II-Proceedings, Boole Press, pp. 301–305.
- Herceg, Dj. 2011. Fourth-Order Finite Difference Method for Boundary Value Problems with Two Small Parameters. **Appl. Math. Comput.**, in Press..
- Il’in, A.M. 1969. Differencing scheme for a partial differential equation with a small parameter affecting the highest derivative. Math. Notes, 6: pp. 596–602.
- Linss, T. 2002. Finite Difference Schemes for Convection Diffusion Problems with a Concentrated Source and a Discontinuous Convection Field. **Comp. Math. in Appl. Math.**, 2: pp. 41–49.
- Marchuk, G.I. 1977. Methods of Numerical Mathematics. Springer, Berlin.
- O’Malley, Jr, R.E. 1991. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, Newyork.

- O’Riordan, E., Stynes, G. 1986. An Analysis of Some of a superconvergence result for a Singularly Perturbed boundary value problem. **Math.Comput.**, 46: pp. 81–92.
- Roos, H.G., Stynes, M., Tobiska, L. 2008. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations.
- Shishkin, G.I. 1988. A Difference Scheme for Singularly Perturbed Equation of Parabolic Type with a Discontinuous Initial Condition. Soviet Math. Dokl., 37: pp. 792-796.
- Shishkin, G. I., 1989. Approximation of solutions of singularly perturbed boundary value problems with a parabolic boundary layer. **U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.**, 29(4): 1-10.
- Shishkin, G.I. 1990. Grid approximation of singularly perturbed elliptic and parabolic equations. Second Doctoral Thesis, Keldysh Institute, Moscow, (In Russian).
- Shishkin, G. I., 1991. Grid approximation of a singularly perturbed parabolic equations degenerating on the boundary. USSR Comput. Maths. Math. Phys., 31(10):53-63.
- Shishkin, G. I., 1992. A difference scheme for a singularly perturbed parabolic equation degenerating on the boundary. USSR Comput. Maths. Math. Phys., 32: 621-636.
- Shishkin, G. I., 1995. On finite difference fitted schemes for singularly perturbed boundary value problems with a parabolic boundary layer. INCA Preprint, 4, Dublin.
- Shishkin, G. I., 2000. Approximation of singularly perturbed convection-diffusion equations with low smoothness of the derivatives involved in the equation. Analytical and numerical methods for convection-dominated and singularly perturbed problems, Nova Science. 13.
- Stynes, M., Tobiska, L. 1998. A finite difference analysis of a streamline diffusion method on a Shishkin mesh. Numer Algorithms, 18(3-4), 337-360.
- TMS, Warrendale, PA, 1994. D.R. Poirier and G.H. Geiger: Transport Phenomena in Materials Processing.
- Tobiska, L., 1976. Die Asymptotische Lösung von Wärmeleitungsproblemen. Phd. Th., Otto von Guericke University, Magdeburg.
- Varga, R. S., 1962. Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 322.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mustafa Bardak
Doğum Yeri ve Tarihi : Kolonya / ALMANYA, 28.03.1984

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Dumlupınar Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Lisans Öğrenimi : Anadolu Üniversitesi
İktisadi İdari Bilimler Fakültesi, İktisat Bölümü.
Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Uygulamalı Matematik
Pedagojik Formasyon : Ege Üniversitesi
Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce, Almanca

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

- a) Yayınlar
-SCI
-Diğer
b) Bildiriler
-Uluslararası : XIX.Uluslararası Matematik Sempozyumu
Dumlupınar Üniversitesi
-Ulusal : Akademik Bilişim 2008
Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi
c) Katıldığı Projeler : Dumlupınar Üniversitesi Enformatik Bölümü
Web Yazılım ve Bilgi Teknolojileri 2004 - 2006

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Dumlupınar Üniversitesi
Enformatik Bölümü, 2004 - 2006
: Kavaklı Dershanesi, 2006 - 2007
: AydınSoft Bilişim Hizmetleri, 2008 - 2009
: Özel Basamak Dershaneleri, 2009
: Çözüm Dergisi Dershaneleri, 2009 - 2011
: İhtiyaç Akademi Aydın, 2011 -

İLETİŞİM

E-posta Adresi : mustafabardak@msn.com
Kişisel Web Sitesi : www.mbardak.com
Tarih : 29.07.2011