ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2012-YL-041

CLIFFORD MİNİMAL HİPERYÜZEYLERİ

Dilek AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Leyla ONAT

AYDIN

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Dilek AÇIKGÖZ tarafından hazırlanan Clifford Minimal Hiperyüzeyleri başlıklı tez, 10.12.2012 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Doç. Dr. Leyla ONAT	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ	Ege Üni. Fen Fakültesi	
Üye :	Doç. Dr. Adnan MELEKOĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fakültesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2012 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

10.12.2012

Dilek AÇIKGÖZ

ÖZET

CLIFFORD MİNİMAL HİPERYÜZEYLERİ

Dilek AÇIKGÖZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Leyla ONAT
2012, 77 sayfa

Bu çalışma temel olarak üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan Temel Kavramlar kısmında, diferensiyel geometride sık sık kullanılan bazı temel kavramların yanısıra ileri diferensiyel geometrinin temel konularından olan tensör bileşenleri, tensör türevi, diferensiyellenebilir operatörler gibi kavramlar da ayrıntılarıyla verilmiştir. Ayrıca, çalışmada yararlanılan makalelerdeki temel teorem ve örnekler yine bu kısımda incelenmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümü, küre içindeki Clifford hiperyüzeylerine ayrılmıştır. Bu konuda günümüze kadar yapılan çalışmalardan özellikle 2008 yılındaki Alias, Brasil ve Perdomo'nun çalışması [11] ile 2010 yılındaki Deshmukh'un çalışması [12] incelenmiştir.

Küre içindeki Clifford minimal hiperyüzeyleri için Chern, DoCarmo ve Kobayashi ve Lawson'un birbirlerinden bağımsız olarak ispatladıkları karakterizasyon için Oscar Perdomo'nun 2005 yılında yaptığı bir başka ispat [4] bu çalışmanın son bölümünde incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler
Hiperyüzey, Minimal hiperyüzey, Küre, Şekil operatörü, Clifford hiperyüzeyi, Ortalama Eğrilik

ABSTRACT

CLIFFORD MINIMAL HYPERSURFACES

Dilek AÇIKGÖZ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Leyla ONAT
2012, 77 pages

The study essentially consists of three chapters. The notions of advanced differential geometry such as tensor components, tensor derivations, differential operators besides the basic notions of differential geometry are given in the first chapter. Furthermore, the fundamental theorems and examples in the papers used in this study are given in this chapter.

In the second chapter of this study, The Clifford hypersurfaces in the spheres are given. In particular, the paper of Alias, Brasil and Perdomo [11] in 2008 and the paper of Deshmukh [12] in 2010 are examined in this chapter.

Chern, DoCarmo and Kobayashi and indepedently Lawson have proved the characterization for the Clifford minimal hypersurfaces in the spheres. An another proof for the characterization of Oscar Perdomo in 2005 [4] are given in the final chapter of this study.

Key Words
Hypersurfaces, Minimal Hypersurfaces, Sphere, Shape Operator, Clifford hypersurfaces, Mean curvature

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Leyla ONAT'a; tez döneminde Murcia Üniversitesi'nde bulunduğum süre boyunca benden yardımını esirgemeyen hocam sayın Prof. Luis J. ALIAS'a; tezin yazımında ve biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma ve başta Araş. Gör. Okan ARSLAN olmak üzere tüm bölüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Dilek AÇIKGÖZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M	Diferensiyellenebilir manifold
(U,ξ)	M manifoldunun koordinat komşuluğu
$\xi=\{x^1,\ldots,x^n\}$	M manifoldu üzerinde koordinat sistemi
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$v,w,\ldots$	M manifoldunun p noktasındaki teğet vektörleri
$\{E_{1_p},\ldots,E_{n_p}\}$	$T_p(M)$ nin koordinat çatısı
$\chi(M)$	M üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$\chi^*(M)$	M üzerindeki 1- formların kümesi
$\{\partial_1,\ldots,\partial_n\}$	M manifoldu üzerindeki koordinat çatı alanı
$\{dx^1,\ldots,dx^n\}$	M manifoldu üzerindeki dual çatı alanı
$X,Y,V,W,\ldots$	M manifoldu üzerindeki vektör alanları
$\theta,\omega,\ldots$	M manifoldu üzerindeki 1- formlar
D	M manifoldu üzerinde konneksiyon
II	M manifoldu üzerinde ikinci temel form
μ	M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü
H	M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği
$\kappa_1,\ldots,\kappa_n$	M hiperyüzeyinin asal eğrilikleri
$\mathfrak{F}(M)$	M den $\mathbb{R}$ ye tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{T}^r_s(M)$	M manifoldu üzerindeki (r,s)- tipindeki tensör alanlarının kümesi
$\mathscr{D}$	Tensör türevi
∇f	f fonksiyonunun gradiyenti
$divA$	A tensör alanının divergensi
$Hessf$	f fonksiyonunun hessiyanı
$\triangle f$	f fonksiyonunun laplaciyanı
$\triangle A$	A lineer dönüşümünün laplaciyanı
Ric	M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü
S	M manifoldunun skalar eğriliği

1. GİRİŞ

Küre içindeki minimal hiperyüzeyler ile ilgili günümüze kadar, bu yüzeylerin hem cebirsel hem geometrik özelliklerini veren birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda, şekil operatörünün normunun karesinin $\|A\|^2 = n$ olması ayırt edici bir özelliktir.

M, S^n küresi içinde $(n-1)$- boyutlu hiperyüzey olmak üzere, M kompakt, minimal ve $0 \leq \|A\|^2 \leq n-1$ olduğunda Simons [1] te $\|A\|^2 = 0$ veya $\|A\|^2 = n-1$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra Chern, DoCarmo, Kobayashi [2] ve Lawson [3] birbirinden bağımsız olarak $\|A\|^2 = n-1$ olan küre içindeki minimal hiperyüzeylerin yalnızca Clifford minimal hiperyüzeyleri olduğunu göstermişlerdir. Açık olarak, $\|A\|^2 = 0$ olması durumunda küre içindeki minimal hiperyüzeylerin en basit örnekleri totally geodezikler olan kürenin ekvatorlarıdır.

2005 yılında Perdomo [4], daha önce [2] ve [3] çalışmalarında küre içindeki Clifford minimal hiperyüzeyleri için verilen karakterizasyonu farklı bir teknik kullanarak ispatlamıştır. Bunun için, öncelikle Simons formülü olarak bilinen $\frac{1}{2}\triangle\|A\|^2 = \|DA\|^2 + (n-\|A\|^2)\|A\|^2$ eşitliğinden yararlanarak M, S^n içinde ekvator olmayan minimal hiperyüzeyinin şekil operatörü A olmak üzere $\|A\|^2 = n-1$ olması için $DA \equiv 0$ olmasının gerek ve yeter olduğunu göstermiştir. Yine bu çalışmada, 2004 yılında teorem olarak verdiği "B, $(n+1)\times(n+1)$- tipinde tersinir, simetrik matrisi için $M = \{x \in S^n \;:\; \langle Bx, x\rangle = 0\} \subset S^n$ kümesi minimal hiperyüzeyi ise bu durumda, M, Clifford minimal hiperyüzeyidir" önermesini temel olarak almıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremlerin yanısıra, genel olarak konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla diferensiyel geometride sık sık kullanılan bazı kavramlar da ayrıntılarıyla verilecektir.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1 [5] M topolojik uzay olsun. U, M nin bir açık alt kümesi ve U' , $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\xi : U \to U'$ biçiminde bir ξ homeomorfizmine, M topolojik uzayı üstünde n- boyutlu bir koordinat sistemi, denir.

M topolojik uzay ve ξ, M içinde bir koordinat sistemi olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki koordinat fonksiyonları $u^1, u^2, \ldots, u^n$ ile gösterildiğine göre,

$$x^i = u^i \circ \xi$$

eşitliği ile tanımlı $x^1, x^2, \ldots, x^n$ fonksiyonlarına, ξ koordinat sisteminin koordinat fonksiyonları denir. $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ dir.

M topolojik uzayı üzerinde, n- boyutlu, tanım kümeleri sırasıyla U_1 ve U_2,

$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde ξ ve η koordinat sistemleri verilsin.

$\eta \circ \xi^{-1} : \xi(U_1 \cap U_2) \to \eta(U_1 \cap U_2)$

ve

$\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U_1 \cap U_2) \to \xi(U_1 \cap U_2)$

fonksiyonları birer homeomorfizmdir. Burada, $(\xi \circ \eta^{-1})^{-1} = (\eta \circ \xi^{-1})$ dir.

$\eta \circ \xi^{-1}$ ve $\xi \circ \eta^{-1}$ dönüşümlerine ξ ve η koordinat sistemlerinden elde edilen özdeşleme dönüşümleri denir. Bu özdeşleme dönüşümleri diferensiyellenebilir ise ξ ve η koordinat sistemleri, düzgün örtüşürler (overlap smoothly), denir.

Tanım 2.2 [5] M topolojik uzayı içindeki n- boyutlu koordinat sistemlerinin kümesinin bir alt kümesi $\mathscr{A}$ olsun. $\mathscr{A}$ kümesi aşağıdaki iki önermeyi sağlıyorsa $\mathscr{A}$ kümesine "M topolojik uzayı üstünde n- boyutlu bir atlas" denir.

(A1) Mnin her bir noktası, $\mathscr{A}$ kümesinin en az bir elemanının tanım bölgesinde bulunur.

(A2) $\mathscr{A}$ içindeki her iki koordinat sistemi düzgün örtüşür.

Tanım 2.3 [5] M topolojik uzayı üstünde bir $\mathscr{A}$ atlası verilsin. $\mathscr{A}$ ın elemanları ile düzgün örtüşen her koordinat sistemi yine $\mathscr{A}$ nın elemanı oluyorsa $\mathscr{A}$ ya, M üstünde bir tam atlas denir.

Teorem 2.4 [5, Teorem 7.1.2] *M topolojik uzayı üzerindeki her bir atlası içeren bir ve yalnız bir tam atlas vardır.*

Tanım 2.5 [5] M Haussdorf uzayı üstünde bir tam atlas varsa bu tam atlasla birlikte M ye, bir diferensiyellenebilir manifold denir.

Bu çalışmada, M manifoldu denildiğinde diferensiyellenebilir manifold anlaşılacaktır.

M bir manifold ise bu manifold üstündeki tam atlasın boyutuna, M manifoldunun boyutu denir.

ξ, M manifoldu içinde bir koordinat sistemi ise ξ, M yi manifold yapan tam atlasın bir elemanıdır. ξ koordinat sisteminin tanım kümesi U olmak üzere $p \in U$ için ξ ye p noktasının bir koordinat sistemi denir. U kümesine de p noktasının bir koordinat komşuluğu denir.

Örnek 2.6 $\mathbb{R}^3$ uzayında, merkezi başlangıç noktasında bulunan birim yarıçaplı küre yüzeyi S^2 olsun.

S^2 uzayında, i nci bileşeni pozitif olan noktaların kümesi U_i^+, i nci bileşeni negatif olan p noktalarının kümesi U_i^- olmak üzere

$$\xi_i^+ : U_i^+ \to B^2 \quad ve \quad \xi_i^- : U_i^- \to B^2$$

izdüşüm fonksiyonları gözönüne alınsın. Buradaki B^2, düzlemde merkezi orijin noktası olan birim yuvarı göstermektedir. $\{\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-, \xi_3^+, \xi_3^-\}$ kümesi S^2 için bir atlastır. Buna göre, S^2 kümesi 2- boyutlu bir manifolddur.

Örnek 2.7 M ve N, sırasıyla, m ve n- boyutlu iki manifold olsun.

$$\xi : U \to \xi(U), \qquad \xi = (x^1, x^2, \ldots, x^m),$$

$$\eta : V \to \eta(V), \qquad \eta = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

sırasıyla M ve N manifoldları üstünde koordinat sistemleri olmak üzere

$$\xi \times \eta : U \times V \quad \to \quad \xi(U) \times \eta(V),$$

$$(\xi \times \eta)(p,q) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^m(p), y^1(q), y^2(q), \ldots, y^n(q))$$

dönüşümü, $M \times N$ topolojik uzayı üstünde $(m+n)$- boyutlu bir koordinat sistemi olur. Bu koordinat sistemine, ξ ve η koordinat sistemlerinin çarpımı denir. M ve N üstündeki bütün koordinat sistemlerinin çarpımı alınarak elde edilen küme $M \times N$ üstünde bir atlas olur. Bu atlasın belirttiği tam atlasla birlikte $M \times N$ bir manifold olur. Bu manifolda, M ve N manifoldlarının çarpımı, denir.

$boy\,(M \times N) = boy\,M + boy\,N$ dir.

Tanım 2.8 [5] M bir manifold, $p \in M$ olsun. Aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir $v_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, p noktasında bir teğet vektör, denir.

(i) Her a, $b \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ için

$$v_p(af + bg) = av_p f + bv_p g$$

dir.

(ii) *Her* $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ *için*

$$v_p(fg) = v_p(f).g(p) + f(p).v_p(g)$$

dir.

p noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir. $T_p(M)$ kümesinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri

$$(v_p + w_p)(f) = v_p f + w_p f$$

ve

$$(\lambda v_p)(f) = \lambda(v_p(f))$$

eşitlikleriyle tanımlanır. $T_p(M)$ kümesi üzerinde tanımlanan bu işlemlerle birlikte bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.9 [5] M bir manifold ve $p \in M$ olmak üzere $T_p(M)$ vektör uzayına, M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı, denir.

Bu çalışmada $T_p(M)$ nin elemanları olan teğet vektörler $v, w, \ldots$ gibi harflerle gösterilecektir.

Tanım 2.10 [5] (U, ξ), M için bir koordinat komşuluğu olsun. $\xi : U \to \xi(U)$ dönüşümü diffeomorfizm olduğundan, $\xi(p) = q$ için

$$\xi_{*p} : T_p(M) \to T_q(\mathbb{R}^n)$$

fonksiyonu lineer izomorfizm ve

$$(\xi^{-1})_{*q} = (\xi_{*p})^{-1}$$

dir.

$\mathbb{R}^n$ deki Öklidyen koordinat sistemi $\{u^1,\ldots,u^n\}$ olmak üzere,

$$\xi_{*q}^{-1}(\frac{\partial}{\partial u^i}(q)) = E_{ip}$$

olsun. ξ_{*q}^{-1} izomorfizm olduğundan $\{E_{1p},E_{2p},\ldots,E_{np}\}$ kümesi $T_p(M)$ nin bir tabanıdır. Bu tabana, $T_p(M)$ nin koordinat çatısı, denir.

Tanım 2.11 [6] M, n- boyutlu manifold olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan P manifolduna, M nin bir alt manifoldu denir.

(i) P, M nin topolojik alt uzayıdır.

(ii) $j : P \to j(P) \subset M$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir ve her $p \in P$ için j_{*p} dönüşümü birebirdir.

Örnek 2.12 N, n- boyutlu manifold, N, M açık alt kümesi olsun. N kümesi M den indirgenmiş topolojik ve diferensiyellenebilir yapı ile birlikte bir manifolddur. N manifolduna, M manifoldunun açık alt manifoldu denir.

Lemma 2.13 [6, Lemma 1.33] *M ve N sırasıyla m ve n- boyutlu manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $p \in M$ için aşağıdaki önermeler denktir.*

(i) *F_{*p} dönüşümü birebirdir.*

(ii) *$JF|_p$, Jakobiyen matrisinin rankı m dir.*

(iii) *$\{x^1,\ldots,x^n\}$ kümesi N manifoldunun $F(p)$ noktasında koordinat sistemi olsun. Bu durumda,*

$$y^{i_1}\circ F,\ldots,y^{i_m}\circ F$$

fonksiyonları M nin p noktası komşuluğunda koordinat sistemi olacak şekilde $1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le n$ tamsayıları vardır.

Tanım 2.14 [5] M ve N sırasıyla m ve n- boyutlu manifoldlar, $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için F_{*p} dönüşümü birebir ise F fonksiyonuna, bir immersiyon (daldırma) denir.

$j : P \to j(P) \subset M$ dönüşümü immersiyon ise P ye, M nin daldırılmış alt manifoldu denir. Böylece alt manifoldlar daldırılmış alt manifoldlardır. Fakat, karşıtı doğru değildir.

Tanım 2.15 [5] N, n- boyutlu diferensiyellenebilir manifold, $0 < m \leq n$ ve $M \subset N$ olsun. M nin her p noktası için aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir (U, ξ) koordinat komşuluğu varsa M ye N nin regüler alt manifoldu, denir.

(i) $\xi(p) = (0, 0, \ldots, 0)$

(ii) $\xi(U) = C^n_\varepsilon(0)$

(iii) $\xi(U \cap M) = \{q : q \in C^n_\varepsilon(0)\}$ ve $q_{m+1} = \ldots = q_n = 0$

Teorem 2.16 [8, Teorem 3.5.8] *M ve N sırasıyla m ve n- boyutlu manifoldlar, F, M den N ye diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. F nin M üstünde rankı sabit ve $k \in \mathbb{Z}^+$ sayısına eşit ise $q \in F(M)$ için $F^{-1}(q)$ kümesi, M nin $(m-k)$- boyutlu, kapalı, regüler alt manifoldudur.*

Örnek 2.17 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F = (a - \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2})^2 + (x^3)^2$ olsun.

$a > b > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F^{-1}(b^2) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(p_1, p_2, p_3) = b^2\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}^3 \,|\, (a - \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2})^2 + (p_3)^2 = b^2\} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$JF|_p = \begin{pmatrix} -2(a - \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2})\frac{p_1}{\sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2}} \\ -2(a - \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2})\frac{p_2}{\sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2}} \\ 2p_3 \end{pmatrix}$$

olduğundan $rank JF|_p = 1$ dir. Buradan,

$F^{-1}(b^2)$ nin her p noktasında rankı sabittir. Dolayısıyla, $F^{-1}(b^2)$ kümesi 2-boyutlu kapalı regüler alt manifolddur. Bu alt manifolda tor yüzeyi denir.

Tanım 2.18 [5] M, $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $N \subset M$ olsun. N, M manifoldunun $(n-1)$- boyutlu kapalı, regüler alt manifoldu ise N manifolduna, M manifoldunun bir hiperyüzeyi denir.

Tanım 2.19 [5] M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve $\mathbb{R}^n$ deki konneksiyon $\overline{D}$ olsun. M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere M nin her bir p noktasında

$$A_p : T_p(M) \to T_p(M), \quad A_p(v) = -\overline{D}_v N$$

biçiminde tanımlı A fonksiyonuna, M hiperyüzeyinin şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir.

Tanım 2.20 [5] M hiperyüzeyinin birim dik vektör alanı

$$N = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olsun. Burada b_i fonksiyonları M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$\mathbb{R}^n$ uzayında birim küre yüzeyi S^{n-1} olmak üzere,

$$\mu : M \to S^{n-1}, \; \mu(p) = (b_1(p), \ldots, b_n(p))$$

fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss dönüşümü denir.

$v \in T_p(M)$ olsun. M içinde $\alpha(0) = p$, $\alpha'(O) = v$ olacak biçimde bir $\alpha(I)$ eğrisi gözönüne alınsın.

$$\mu_*(v) = \mu_*(\alpha_*(\tfrac{d}{dt}|_0)) = (\mu \circ \alpha)_*(dt|_0) = (\frac{d(b_1 \circ \alpha)}{dt}(p), \ldots, \frac{d(b_n \circ \alpha)}{dt}(p))$$

olur. $(b_i \circ \alpha)'(0) = v[b_i]$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mu_*(v) = (v[b_1], \dots, v[b_n])_{\mu(p)} &= \sum_{i=1}^{n} v[b_i] \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu(p)) \\
&= (\overline{D}_v N)_{\mu(p)} \\
&= -(A(v))_{\mu(p)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.21 $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında $S^n(r) = \{(p_1, \dots, p_{n+1}) : p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 = r^2\}$ eşitliği ile $S^n(r)$ küre yüzeyi verilsin.

$$f(p_1, \dots, p_{n+1}) = p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 - r^2$$

eşitliğiyle tanımlı $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradiyent vektör alanı ∇f olmak üzere $S^n(r)$ küresinin birim dik vektör alanı $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ dir.

$$\overline{N} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

eşitliği ile tanımlı $\overline{N}$ vektör alanı $\mathbb{R}^{n+1}$ de tanımlıdır. $\overline{N}$ vektör alanının S^n ye kısıtlanmışı N olmak üzere N, $S^n(r)$ yüzeyinin birim dik vektör alanıdır. Buna göre,

$$A_p(v) = -\overline{D}_v \overline{N} = -\overline{D}_v N = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n+1} v[x^i] \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

olur. $v \in T_p(S^n(r))$ için, $v = \sum_{i=1}^{n+1} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ olsun. Bu durumda,

$$1 \le i \le n+1, \quad v[x^i] = \sum_{j=1}^{n+1} v_j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_{ij} v_j = v_i$$

dir. Buna göre,

$$A_p(v) = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n+1} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = -\frac{1}{r}.v$$

olarak bulunur. I_p, $T_p(S^n(r))$ nin özdeşlik dönüşümü olmak üzere

$$A_p = -\frac{1}{r} I_p$$

ve

$$A = -\frac{1}{r}I$$

dir.

Lemma 2.22 [6, Lemma 4.19] *M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve M nin şekil operatörü A olsun. A, M hiperyüzeyinin her p noktasına bir lineer dönüşüm karşılık getirir ve*

her $v, w \in T_p(M)$ için,

$$\langle A_p(v), w\rangle = \langle v, A_p(w)\rangle$$

dir.

Tanım 2.23 [5] M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey olmak üzere M nin her bir p noktasına

$$II(v,w) = \langle A(v), w\rangle$$

eşitliği ile tanımlı II fonksiyonuna M yüzeyi üstünde ikinci temel form denir.

Tanım 2.24 [5] M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey, $\overline{D}$ ve D, sırasıyla, $\mathbb{R}^n$ ve M üzerindeki konneksiyonlar ve N, hiperyüzeyin birim dik vektör alanı olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$\overline{D}_X Y = D_X Y + II(X,Y)N$ Gauss formülü

$\overline{D}_X N = -AX$ Weingarten formülü

$R(X,Y)Z = \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY$ Gauss denklemi

$(D_X A)Y = (D_Y A)X$ Codazzi denklemi

dir.

Teorem 2.25 [7, Teorem 6.2.5] *M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir hiperyüzeyi olsun. π, $T_p(M)$ nin iki boyutlu bir alt uzayı olmak üzere, π nin M ve $\overline{M}$*

içindeki Riemann eğrilikleri $K(\pi)$ *ve* $\overline{K}(\pi)$ *ile gösterilsin.* $\{v,w\}$ *kümesi* π *için ortonormal bir taban olduğuna göre,*

$$\overline{K}(\pi) = K(\pi) + \langle A(v),v\rangle\langle A(w),w\rangle - \langle A(v),w\rangle^2$$

dir.

Tanım 2.26 [5] M hiperyüzeyinin bir p noktasında A_p lineer dönüşümünün determinantına p noktasında yüzeyin Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir.

A_p nin izinin ortalamasına M hiperyüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve $H(p)$ ile gösterilir.

Tanım 2.27 [5] M hiperyüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü A_p $T_p(M)$ uzayının birim dönüşümünün bir katı ise p noktasına M yüzeyinin umbilik noktası denir. M hiperyüzeyinin her noktası umbilik nokta ise M ye totally umbilik hiperyüzey, denir.

Örnek 2.28 $\mathbb{R}^n$ uzayında $S^n(r) = \{(p_1,\ldots,p_{n+1}) : p_1^2 + \ldots + p_{n+1}^2 = r^2\}$ eşitliği ile $S^n(r)$ küre yüzeyi verilsin. $p \in S^n(r)$ olmak üzere, Örnek (2.21) de $S^n(r)$ kümesinin p noktasındaki şekil operatörü $A_p = -\frac{1}{r}I_p$ olarak bulunmuştu. Buna göre, $S^n(r)$ küre yüzeyinin her noktası umbilik noktadır.

Tanım 2.29 [5] $A_p : T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine M hiperyüzeyinin p noktasındaki asal eğrilikler ve karakteristik vektörlerine asal vektörler denir. Bir asal vektörün gerdiği alt vektör uzayına p noktasında bir asal doğrultu veya eğrilik doğrultusu denir.

A_p lineer dönüşümü kendine eş bir dönüşüm olduğundan, $(n-1)$- tane lineer bağımsız eğrilik doğrultusu vardır.

Tanım 2.30 [5] M hiperyüzeyinin her noktasında ortalama eğriliği sıfır ise M hiperyüzeyine, minimal hiperyüzey, denir.

Örnek 2.31 M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperdüzlem olsun. M nin dik birim vektör alanı

$\mu = (a_1, \ldots, a_n)$ eşitliği ile belirli ise, $v \in T_p(M)$ için

$$A_p(v) = -\overline{D}_v\mu = (v[a_1], \ldots, v[a_n])$$

olur. $a_1, \ldots, a_n$ fonksiyonları sabit fonksiyonlar olduğundan $v[a_i] = 0$ olur. Buna göre, her $v \in T_p(M)$ için, $A_p = 0$ dır. Buradan, her $p \in M$ için $H(p) = 0$ dır. Dolayısıyla, M minimaldir.

2.2. Tensör Alanları

M, n- boyutlu manifold, (U, ξ), M için bir koordinat komşuluğu,

$\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bu koordinat komşuluğundan elde edilen koordinat sistemi,

$1 \leq i \leq n$ için, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ koordinat çatı alanı ve bu çatı alanının duali $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ olsun.

$$\mathfrak{F}(M) = \{f \mid f : M \xrightarrow{dif.bilir} R\}$$

olmak üzere, $\mathfrak{F}(M)$ kümesi aşağıda tanımlanan işlemlerle birlikte bir halkadır.

Her $x \in M$, (f+g)(x)=f(x)+g(x),

(f.g)(x)=f(x).g(x).

M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$, M üzerindeki $1-$ formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilecektir.

$\chi(M)$ ve $\chi^*(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde birer vektör uzayı, $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde birer modüldür.

Tanım 2.32 [6] $r, s \geq 0$ tamsayıları için

$$A : (\chi^*(M))^r \times \chi(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

$\mathfrak{F}(M)-$ çoklineer dönüşümüne, M manifoldu üzerinde (r,s)- tipinde (r-inci basamaktan kontravaryant, s-inci basamaktan kovaryant) tensör alanı denir.

$p \in M$ olmak üzere, $A_p : (T_p(M))^r \times (T_p(M))^s \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$- çoklineer dönüşümüne $T_p(M)$ uzayı üzerinde (r,s)- tipinde bir tensör denir.

M manifoldu üzerindeki (r,s)- tipindeki tensör alanlarının $\mathfrak{T}^r_s(M)$ kümesi $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

Özel olarak, $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$ dir.

Örnek 2.33 $E(\theta,X) = \theta(X)$ eşitliği ile verilen $E : \chi^*(M) \times \chi^(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ değerlendirme dönüşümü her $f,g \in \mathfrak{F}(M)$, $\theta,\omega \in \chi^*(M)$ ve $X,Y \in \chi(M)$ için,
$E(f\theta+g\omega,X) = (f\theta+g\omega)(X) = f\theta(X)+g\omega(X) = fE(\theta,X)+gE(\omega,X)$

ve

$E(\theta,fX+gY) = \theta(fX+gY) = f\theta(X)+g\theta(Y) = fE(\theta,X)+gE(\theta,Y)$

olduğundan $\mathfrak{F}(M)$- lineerdir. Buna göre, E dönüşümü M manifoldu üzerinde $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır.

Örnek 2.34 $X \in \chi(M)$ olsun. Her $\theta \in \chi^*(M)$ için, $X(\theta) = \theta(X)$ eşitliği ile $X : \chi^*(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü tanımlansın.

Her f,g $\mathfrak{F}(M)$ ve $\theta,\omega \in \chi^*(M)$ için,

$X(f\theta+g\omega) = (f\theta+g\omega)(X) = f\theta(X)+g\omega(X) = fX(\theta)+gX(\omega)$

olduğundan $\mathfrak{F}(M)$-lineerdir. Buna göre, X vektör alanı $(1,0)$- tipinde bir tensör alanıdır.

Diğer yandan, $\omega \in \chi^*(M)$ 1- formu için, $\omega : \chi(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü $\mathfrak{F}(M)$-lineer olduğundan $\omega \in \mathfrak{T}^0_1(M)$ dir. Buradan, M manifoldu üzerindeki herbir vektör alanı $(1,0)$- tipinde tensör alanı, M manifoldu üzerindeki herbir 1-form $(0,1)$- tipinde tensör alanı olarak düşünülebilir.

Örnek 2.35 $A : \chi(M)^s \longrightarrow \chi(M) \quad \mathfrak{F}(M)-$ çoklineer dönüşümü verilsin.

$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s)), \quad \forall \theta \in \chi^*(M), \quad \forall X_i \in \chi(M), \ (1 \leq i \leq s)$ eşitliğiyle tanımlanan

$$\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

dönüşümü

her $f, g \in \mathfrak{F}(M), \quad \theta, \omega \in \chi^*(M)$ ve $X_i, Y_i \in \chi(M) \quad (1 \leq i \leq s)$ için,

$$\begin{aligned} \overline{A}(f\theta + g\omega, X_1, \ldots, X_s) &= (f\theta + g\omega)(A(X_1, \ldots, X_s)) \\ &= f\theta(A(X_1, \ldots, X_s)) + g\omega(A(X_1, \ldots, X_s)) \end{aligned}$$

ve

$$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, fX_i + gY_i, \ldots X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, fX_i + gY_i, \ldots X_s))$$

$$\begin{aligned} &= \theta(fA(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_s) + gA(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_s)) \\ &= f\theta(A(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_s)) + g\theta(A(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_s)) \\ &= f\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_s) + g\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_s) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından M manifoldu üzerinde $(1, s)$- tipinde tensör alanıdır.

$A, B \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ olmak üzere, $\mathfrak{T}^r_s(M)$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$(A+B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) + B(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

eşitliğiyle ve

A, B herhangi tipten iki tensör alanı olmak üzere, A ve B tensör alanlarının $A \otimes B$ tensör çarpımı

$$\begin{aligned} &(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) \\ &= A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s).B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_s, \ldots, X_{s+s'}) \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Özel olarak, $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$f \otimes A = fA$ dır.

Örnek 2.36 $A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ ve $B \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ olsun.

Her $\theta, \omega \in \chi^*(M)$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(A \otimes B)(\theta, \omega, X, Y, Z) = A(\theta, X).B(\omega, Y, Z)$$

eşitliği ile belirli olan $A \otimes B$, M manifoldu üzerinde $(2,3)$- tipinde tensör alanıdır.

Örnek 2.37 dx^1, dx^2 1- formları için,

$(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1$

$(dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0$

olduğundan tensör çarpımı genellikle değişmeli değildir.

2.2.1. Tensör Bileşenleri

M, n- boyutlu manifold, (U, ξ), M için bir koordinat komşuluğu,

$\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bu koordinat komşuluğundan elde edilen koordinat sistemi ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun.

$$A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = A(dx^{i_1}, \ldots dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \ldots \partial_{j_s})$$

olmak üzere, A tensör alanı

$$A = \sum A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

eşitliğiyle belirlidir.

Burada, $A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ fonksiyonlarına, A tensör alanının bileşenleri denir.

Örnek 2.38 $A \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ olsun. Her $\theta \in \chi^*(M)$, $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$\theta = \sum_i \theta_i dx^i$, $X = \sum_j X^j \partial_j$, $Y = \sum_k Y^k \partial_k$

için,

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) &= A(\sum_i \theta_i dx^i, \sum_j X^j \partial_j, \sum_k Y^k \partial_k) \\ &= \sum_{i,j,k} A(dx^i, \partial_j, \partial_k) \theta_i X^j Y^k \\ &= \sum_{i,j,k} A(dx^i, \partial_j, \partial_k) \partial_i(\theta) dx^j(X) dx^k(Y) \\ &= \sum_{i,j,k} A^i_{jk} (\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k)(\theta, X, Y) \end{aligned}$$

olduğundan

$$A = \sum_{i,j,k} A^i_{jk} \partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

dir. Burada, A tensör alanlarının bileşenleri $A^i_{jk} = A(dx^i, \partial_j, \partial_k)$ eşitliği ile belirli olan A^i_{jk} fonksiyonlarıdır.

Örnek 2.39 $A : \chi(M)^s \longrightarrow \chi(M)$ $\mathfrak{F}(M)-$ çoklineer dönüşümü ve

$$\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s))$ eşitliğiyle verilen $(1, s)$- tipinde bir tensör alanı olsun. Buna göre, $\overline{A}$ tensör alanının bileşenleri $\overline{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s})$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \overline{A}^j_{i_1 \ldots i_s} = \overline{A}(dx^j, \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}) &= dx^j(A(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s})) \\ &= dx^j(\sum_k A^k_{i_1 \ldots i_s} \partial_k) \\ &= \sum_k A^k_{i_1 \ldots i_s} dx^j(\partial_k) \\ &= A^j_{i_1 \ldots i_s} \end{aligned}$$

dir. O halde, A çoklineer dönüşümü de $(1, s)$- tipinde bir tensör alanı olarak düşünülebilir.

Örnek 2.40 $A : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$ dönüşümü verilsin. A lineer dönüşümünün $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ koordinat çatı alanına göre bileşenleri $A(\partial_j) = \sum\limits_k A_j^k \partial_k$ eşitliğiyle belirli olan A_j^k fonksiyonları olmak üzere,

$$\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M), \quad \overline{A}(\theta, X) = \theta(A(X))$$

eşitliğiyle tanımlanan $(1,1)$- tipindeki $\overline{A}$ tensör alanının bileşenleri

$$\overline{A}_j^i = \overline{A}(dx^i, \partial_j) = dx^i(A(\partial_j)) = dx^i(\sum_k A_j^k \partial_k) = \sum_k A_j^k dx^i(\partial_k) = A_j^i$$

dır. Buna göre, A lineer dönüşümü de $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır.

2.2.2. Daraltma (Contraction) Dönüşümü

Bu kısımda (r,s)- tipindeki tensör alanlarını $(r-1, s-1)$- tipinde tensör alanlarına dönüştüren özel fonsiyonlar verilecektir.

Lemma 2.41 [6, Lemma 2.6] *$X \in \chi(M)$, $\theta \in \chi^*(M)$ için, $\boldsymbol{C}(X \otimes \theta) = \theta X$ eşitliği ile tanımlı $\mathfrak{F}(M)-$ lineer bir tek $\boldsymbol{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü vardır. Bu dönüşüme $(1,1)$- tipinde daraltma denir.*

İspat. $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi, $X \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ ve $\theta \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ olsun. $X \otimes \theta \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ dir.

$A = \sum\limits_{i,j} A_j^i \partial_i \otimes dx^j \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tensör alanının $\mathbf{C} : \chi(M) \times \chi^*(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümündeki görüntüsü,

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}A &= \mathbf{C}(\sum_{i,j} A_j^i \partial_i \otimes dx^j) \\
&= \sum_{i,j} A_j^i \mathbf{C}(\partial_i \otimes dx^j) \\
&= \sum_{i,j} A_j^i dx^j(\partial_i) \\
&= \sum_i A_i^i
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca, bu eşitlikle tanımlanan **C** dönüşümünün $\mathfrak{F}(M)-$ lineer ve koordinat sisteminin seçilişinden bağımsız olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Buna göre, **C** $\mathfrak{F}(M)-$ dönüşümü vardır ve tektir. □

Şimdi $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve $F = A(\theta^1, \ldots, \cdot, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, \cdot, \ldots, X_{s-1})$ olmak üzere,

$$F(\theta, X) = A(\theta^1, \ldots, \theta, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X, \ldots, X_{s-1})$$

eşitliğiyle belirli $F : \chi^*(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır.

Tanım 2.42 [6] **C** $(1,1)$- tipinde daraltma, $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve F yukarıdaki eşitlikle tanımlı $(1,1)$- tipinde tensör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}(C_j^i A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) &= \boldsymbol{C}F \\ &= \boldsymbol{C}(A(\theta^1, \ldots, \cdot, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, \cdot, \ldots, X_{s-1}))\end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlı $C_j^i A$ fonksiyonuna, A tensör alanının (i,j)- tipinde daraltması denir.

Örnek 2.43 $A \in \mathfrak{T}_3^2(M)$ olsun. A tensör alanının $(1,3)$- tipinde daraltması aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}(C_3^1 A)(\theta, X, Y) &= \boldsymbol{C}(A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)) \\ &= \boldsymbol{C}F.\end{aligned}$$

$C_3^1 A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ tensör alanının bileşenleri ise,

$$\begin{aligned}(C_3^1 A)(dx^i, \partial_j, \partial_k) &= \boldsymbol{C}(A(\cdot, dx^i, \partial_j, \partial_k, \cdot)) \\ &= \boldsymbol{C}F \\ &= \sum_m F_m^m \\ &= \sum_{i,j,k,m} A(dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_m) \\ &= \sum_{i,j,k,m} A_{jkm}^{mi}\end{aligned}$$

dir.

2.2.3. Tensör Türevi

Tanım 2.44 [6] A ve B herhangi tipte iki tensör ve C daraltma fonksiyonu olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan $\mathscr{D} = \mathscr{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$ $\mathbb{R}$- lineer dönüşümüne, M manifoldu üzerinde tensör türevi denir.

(i) $\mathscr{D}(A \otimes B) = \mathscr{D}A \otimes B + A \otimes \mathscr{D}B$

(ii) $\mathscr{D}(CA) = C(\mathscr{D}A)$.

Özel olarak, $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$\mathscr{D}(fA) = \mathscr{D}(f \otimes A) = (\mathscr{D}f)A + f\mathscr{D}A$ dır.

Önerme 2.45 [6, Önerme 2.13] (Çarpım Kuralı) *$\mathscr{D}$, M üzerinde bir tensör türevi ve $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun. Bu durumda,*

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)) &= (\mathscr{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\
&+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathscr{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s) \\
&+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\mathscr{D}X_j,\ldots,X_s)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Kolaylık olması amacıyla $r = s = 1$ olması durumu incelenecektir.

Öncelikle, $\overline{C}$ herhangi iki daraltma fonksiyonunun bileşkesi olmak üzere,

$A(\theta,X) = \overline{C}(A \otimes \theta \otimes X)$ eşitliğinin doğru olduğu gösterilecektir.

$A = \sum_{i,j} A_j^i \partial_i \otimes dx^j \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, $\theta = \sum_k \theta(\partial_k)dx^k \in \chi^*(M)$, $X = \sum_l X(dx^l)\partial_l \in \chi(M)$
olmak üzere,

$A(\theta,X)=\sum\limits_{i,j}A^i_j\theta_i X^j$ dir.

Diğer taraftan,

$$A\otimes\theta\otimes X=\sum_{i,j,k,l}A^i_j\theta_k X^l\partial_i\otimes\partial_l\otimes dx^j\otimes dx^k$$

ve $\overline{C}=\mathbf{C}\circ C^1_2$ için,

$$\overline{C}(A\otimes\theta\otimes X)=\mathbf{C}(C^1_2(A\otimes\theta\otimes X))$$

dir. $A\otimes\theta\otimes X=B$ olsun.

$C^1_2B=\sum\limits_{j,l,m}B^{ml}_{jm}\partial_l\otimes dx^j \quad \in\mathfrak{T}^1_1(M) \quad$ dir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(C^1_2B)=\mathbf{C}(\sum_{j,l,m}B^{ml}_{jm}\partial_l\otimes dx^j) &= \sum_{j,l,m}B^{ml}_{jm}\mathbf{C}(\partial_l\otimes dx^j)\\
&= \sum_{j,l,m}B^{ml}_{jm}dx^j(\partial_l)\\
&= \sum_{m,p}B^{mp}_{pm}\\
&= \sum_{m,p}B(dx^m,dx^p,\partial_p,\partial_m)\\
&= \sum_{m,p}(A\otimes\theta\otimes X)(dx^m,dx^p,\partial_p,\partial_m)\\
&= \sum_{m,p}A(dx^m,\partial_p)\theta(\partial m)X(dx^p)\\
&= \sum_{m,p}A^m_p\theta_m X^p.
\end{aligned}$$

Buradan, $\overline{C}(A\otimes\theta\otimes X)=A(\theta,X)$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(A(\theta,X)) &= \mathscr{D}(\overline{C}(A\otimes\theta\otimes X))\\
&= \overline{C}(\mathscr{D}(A\otimes\theta\otimes X))\\
&= \overline{C}(\mathscr{D}A\otimes\theta\otimes X+A\otimes\mathscr{D}\theta\otimes X+A\otimes\theta\otimes\mathscr{D}X)\\
&= \overline{C}(\mathscr{D}A\otimes\theta\otimes X)+\overline{C}(A\otimes\mathscr{D}\theta\otimes X)+\overline{C}(A\otimes\theta\otimes\mathscr{D}X)\\
&= (\mathscr{D}A)(\theta,X)+A(\mathscr{D}\theta,X)+A(\theta,\mathscr{D}X)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

2.3. Diferensiyel Operatörler

M manifoldu üzerinde indeksi sabit, $(0,2)$ tipinde, simetrik, nondegenere **g** tensör alanına M manifoldu üzerinde bir metrik tensörü denir. **g** metrik tensörü ile birlikte M manifolduna Semi-Riemann manifoldu denir. M Riemann manifoldu olduğunda **g** metrik tensör alanının indeksi sıfırdır. Yani, **g**, M manifoldunun her p noktasına $T_p(M)$ üzerinde bir iç çarpımı karşılık getiren bir fonksiyondur.

Bu kısımda bazı tanım ve önermeler M nin Semi- Riemann manifoldu olduğu durum için verilecektir. Özel olarak, bu tanım ve önermeler M, Riemann manifoldu olduğunda da geçerlidir.

Tanım 2.46 [7] M, n- boyutlu Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (V,W) &\rightarrow D_V W \end{aligned}$$

dönüşümüne, M manifoldu üzerinde bir konneksiyon ya da kovaryant türev operatörü denir.

(D1) $D_V W$, V vektör alanına göre $\mathfrak{F}(M)-$ lineer

(D2) $D_V W$, W vektör alanına göre $\mathbb{R}-$ lineer

(D3) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W, \qquad f \in \mathfrak{F}(M).$

$D_V W$ vektör alanına W vektör alanının V vektör alanına göre kovaryant türevi denir.

Önerme 2.47 [6, Önerme 3.10] *M bir Semi-Riemann manifoldu olsun.*

Her $V \in \chi(M)$ için, M üzerinde

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle, \qquad \forall\, X \in \chi(M)$$

eşitliği ile bir V^* $1-$ *formu tanımlansın. Bu durumda,*

$$\varphi : \chi(M) \to \chi^*(M) \quad , \quad \varphi(V) = V^*$$

dönüşümü $\mathfrak{F}(M)-$ *lineer izomorfizmdir.*

İspat. Her $V_1,\ V_2,\ V,\ X \in \chi(M),$ her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\varphi(V_1+V_2))(X) = (V_1+V_2)^*(X) = \langle V_1+V_2, X\rangle &= \langle V_1, X\rangle + \langle V_2, X\rangle \\
&= V_1^*(X) + V_2^*(X) \\
&= \varphi(V_1)(X) + \varphi(V_2)(X) \\
&= (\varphi(V_1) + \varphi(V_2))(X)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi(fV))(X) = (fV^*)(X) = \langle fV, X\rangle = f\langle V, X\rangle &= fV^*(X) \\
&= f\varphi(V)(X) \\
&= (f\varphi(V))(X)
\end{aligned}$$

olduğundan φ lineerdir.

Her $V, W \in \chi(M)$ için, $\varphi(V) = \varphi(W)$ olsun. Her $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
(\varphi(V))(X) = (\varphi(W))(X) &\Rightarrow V^*(X) = W^*(X) \\
&\Rightarrow \langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle \\
&\Rightarrow \langle V - W, X\rangle = 0
\end{aligned}$$

$\langle , \rangle$ nondegenere olduğundan, $V = W$ dir.

Şimdi, φ dönüşümünün örten olduğu gösterilecektir.

$\theta = \sum\limits_i \theta(\partial_i)dx^i$ 1- formu ve $V = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$ vektör alanı için,

$\langle V, \partial_k\rangle = \langle \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k\rangle = \sum\limits_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle\theta_k = \theta(\partial_k)$

dır. Ayrıca,

$(\varphi(V))(\partial_k) = V^*(\partial_k) = \langle V, \partial_k \rangle$ olduğundan φ örtendir.

Böylece, φ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. □

Bu teoremin bir sonucu olarak, her vektör alanına bir $1-$ form, her $1-$ forma bir vektör alanı karşılık gelir.

Teorem 2.48 [8, Teorem 7.3.3] *M, n- boyutlu Riemann manifoldu olsun. M üzerinde aşağıdaki önermeler sağlanacak şekilde bir tek D konneksiyonu vardır.*

(D4) $[V,W] = D_V W - D_W V$.

(D5) $X\langle V,W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$.

Bu konneksiyona M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir.

Levi-Civita konneksiyonu Koszul eşitliği adı verilen aşağıdaki eşitliği sağlar.

$2\langle D_V W, X\rangle = V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$

İspat.

$F(V,W,X) = V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$

eşitliği ile $F : \chi(M)^3 \to \mathfrak{F}(M)$ dönüşümü verilsin. V ve W vektör alanları sabit olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} A : \chi(M) & \to & \mathfrak{F}(M) \\ X & \to & \frac{1}{2}F(V,W,X) \end{array}$$

dönüşümü her $f,g \in \mathfrak{F}(M)$, $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
A(fX+gY) = \tfrac{1}{2}F(V,W,fX+gY) & \\
&= \frac{1}{2}F(V,W,fX+gY) \\
&= \frac{1}{2}[V\langle W,fX+gY\rangle + W\langle fX+gY,V\rangle - (fX+gY)\langle V,W\rangle - \\
&- \langle V,[W,fX+gY]\rangle + \langle W,[fX+gY,V]\rangle + \langle fX+gY,[V,W]\rangle] \\
&= \frac{1}{2}[(V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \\
&+ \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle) + g(V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - \\
&- X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle)] \\
&= \frac{1}{2}[fF(V,W,X) + gF(V,W,X)] \\
&= fA(X) + gA(Y)
\end{aligned}
$$

eşitliğini sağlar. Böylece, A dönüşümü M manifoldu üzerinde 1- formdur. Önerme (2.47) ye göre bu 1- form için,

$$\langle D_V W, X\rangle = \frac{1}{2}F(V,W,X)$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $D_V W$ vektör alanı vardır.

Şimdi, bu eşitlikle belirli olan D fonksiyonu için, (D1),(D2),(D3),(D4),(D5) önermelerinin sağlandığı gösterilecektir.

(D1) ve (D2) önermelerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

(D3) önermesi için, gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$
\begin{aligned}
2\langle D_V(fW),X\rangle &= F(V,fW,X) \\
&= V\langle fW,X\rangle + fW\langle X,V\rangle - X\langle V,fW\rangle - \\
&- \langle V,[fW,X]\rangle + \langle fW,[X,V]\rangle + \langle X,[V,fW]\rangle \\
&= V(f\langle W,X\rangle) + fW\langle X,V\rangle - X(\langle V,W\rangle) - \\
&- \langle V,-Xf.W + f[W,X]\rangle + f\langle W,[X,V]\rangle + \langle X,Vf.W + f[V,W]\rangle \\
&= 2Vf\langle W,X\rangle + fF(V,W,X) \\
&= 2\langle Vf.W + fD_V W,X\rangle
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$D_V fW = Vf.W + fD_V W$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W - D_W V, X\rangle &= 2\langle D_V W, X\rangle + 2\langle D_W V, X\rangle \\ &= F(V,W,X) + F(W,V,X) \\ &= 2\langle [V,W], X\rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan, (D4) önermesinin sağlandığı açıktır.

(D5) önermesi için, yine F fonksiyonun tanımı kullanılarak,

$X\langle V,W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$

eşitliği elde edilir. Buraya kadar, (D1)-(D5) önermelerini doğrulayan en az bir D konneksiyonunun bulunduğu gösterildi. Bu D konneksiyonunun Koszul eşitliğini doğruladığı açıktır.

Şimdi, M manifoldu üzerinde (D4) ve (D5) önermelerini sağlayan bir başka konneksiyon $\overline{D}$ olsun. $\overline{D}$ konneksiyonu için de

$V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle \overline{D}_V W, X\rangle + \langle W, \overline{D}_V X\rangle + \langle \overline{D}_W X, V\rangle + \langle X, \overline{D}_W V\rangle - \langle \overline{D}_X V, W\rangle - \langle V, \overline{D}_X W\rangle - \\ &- \langle V, \overline{D}_W X - \overline{D}_X W\rangle + \langle W, \overline{D}_X V - \overline{D}_V X\rangle + \langle X, \overline{D}_V W - \overline{D}_W V\rangle \\ &= 2\langle \overline{D}_V W, X\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, her $X \in \chi(M)$ için,

$$\langle \overline{D}_V W, X\rangle = \langle D_V W, X\rangle \Rightarrow \overline{D}_V W = D_V W$$

olur. Buradan, M manifoldu üzerinde (D4) ve (D5) önermelerini sağlayan bir tek D konneksiyonu vardır.

$\square$

Her $V,W \in \chi(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $D_V f = Vf$ ve $D_V W$ Levi-Civita kovaryant türevi anlamında olan bir tek D_V tensör türevi vardır.

Tanım 2.49 [6] $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ olsun.

Her $V,\ X_i \in \chi(M)$, $\theta^j \in \chi^*(M)$, $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ için,

$(DA)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s,V) = (D_V A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)$

eşitliği ile tanımlı $(r,s+1)$- tipinde DA tensör alanına, M manifoldu üzerinde A tensör alanının kovaryant diferensiyeli denir.

Özel olarak, $r = s = 0$ için,

$(Df)(V) = D_V f = Vf = df(V), \quad \forall\, V \in \chi(M)$

dir. Burada, $df \in \chi^*(M)$ dir.

Lemma 2.50 [6, Lemma 3.35] *M bir Semi-Riemann manifoldu ve D, M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun.*

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

eşitliği ile verilen

$$R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$$

dönüşümü M manifoldu üzerinde $(1,3)$- tipinde bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir.

$(M,\mathbf{g})$ Semi-Riemann manifoldu ve v,w, $T_p(M)$ uzayında lineer bağımsız vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği düzlem π olmak üzere, π $T_p(M)$ uzayının $2-$ boyutlu alt uzayıdır. π alt uzayına M manifoldunun p noktasındaki teğet düzlemi denir.

Tanım 2.51 [6] π, M manifoldunun p noktasındaki nondegenere teğet düzlemi olsun.

$$K(\pi) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

sayısına M manifoldunun p noktasındaki kesitsel eğriliği denir.

Tanım 2.52 [6] $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ve $1 \leq a \leq r$, $1 \leq b \leq s$ tamsayılar olsun. X_b^*, X_b vektör alanına karşılık gelen 1- form olmak üzere,

$$(\downarrow_b^a A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \ldots, X_b^*, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_{b+1}, \ldots, X_{s+1})$$

eşitliği ile tanımlı

$$\downarrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$$

dönüşümü ve θ^a 1- formuna karşılık gelen V vektör alanı için,

$$(\uparrow_b^a A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) = A(\theta^1, \ldots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, V, \ldots, X_{s-1})$$

eşitliği ile tanımlı

$$\uparrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(M)$$

dönüşümü verilsin.

Verilen bir A tensör alanınından yukarıdaki işlemler ile elde edilen bütün tensör alanlarına A tensör alanına metrikçe denk tensör alanları denir.

Örnek 2.53 $A \in \mathfrak{T}_2^2(M)$ olsun. $B = \downarrow_2^1 A$ olmak üzere $B \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ dir.

Her $\theta \in \chi^*(M)$, $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$B(\theta, X, Y, Z) = (\downarrow_2^1 A)(\theta, X, Y, Z) = A(Y^*, \theta, X, Z)$$

dir. Burada, Y^*, Y vektör alanına karşılık gelen 1- formdur.

B tensör alanının $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} B^i_{jkl} = B(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_k) &= (\downarrow^1_2 A)(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= A(\sum_m g_{km} dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{km} A(dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l) \\ &= \sum_m g_{km} A^{mi}_{jl} \end{aligned}$$

dir. Burada, ∂_i vektör alanı $\sum_j g_{ij} dx^j$ 1- formuna metriksel olarak denktir. Kısaca, $\partial_i^* = \sum_j g_{ij} dx^j$ dir.

$B \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ tensör alanının $\downarrow^1_2$ işleminin tersi olan $\uparrow^1_2$ işlemindeki görüntüsünün bileşenleri ise,

$$\begin{aligned} (\uparrow^1_2 B)^{ij}_{kl} &= (\uparrow^1_2 B)(dx^i, dx^j, \partial_k, \partial_l) \\ &= B(dx^j, \partial_k, \sum_p g^{ip} \partial_p, \partial_l) \\ &= \sum_p g^{ip} B(dx^j, \partial_k, \partial_p, \partial_l) \\ &= \sum_p g^{ip} B^j_{kpl} \end{aligned}$$

dir. Burada, dx^i 1- formu $\sum_j g^{ij} \partial_j$ vektör alanına metriksel denktir.

Örnek 2.54 $A : \chi(M) \to \chi(M)$ $\mathfrak{F}(M)-$ lineer dönüşümü verilsin.

$$\overline{A}(\theta, X) = \theta(A(X))$$

eşitliğiyle tanımlı $\overline{A} : \chi^*(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M)$ $(1,1)$- tipindeki tensör alanına göre A, $\mathfrak{F}(M)$- lineer dönüşümü de $(1,1)$- tipinde tensör alanıdır. Buna göre,

$$(\downarrow^1_1 \overline{A})(V, X) = \overline{A}(V^*, X) = V^*(A(X)) = \langle V, A(X) \rangle$$

dır.

Örnek 2.55 $R:\chi(M)^3 \to \chi(M)$ Riemann eğrilik tensörü verilsin. Bu durumda, $\overline{R}(\theta,X,Y,Z)=\theta(R(X,Y,Z))$ eşitliği ile $\overline{R}:\chi^*(M)\times\chi(M)^3 \to \mathfrak{F}(M)$, $\mathfrak{F}(M)$-lineer dönüşümün tanımlandığı ve R nin $(1,3)$- tipinde tensör alanı olarak alınabileceği biliniyor.

Buna göre, $\downarrow_1^1 \overline{R} \in \mathfrak{T}_4^0(M)$ dir. Bu tensör alanının koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$\begin{aligned}(\downarrow_1^1 \overline{R})(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l) &= \overline{R}(\sum_m g_{im}dx^m,\partial_j,\partial_k,\partial_l)\\ &= \sum_m g_{im}\overline{R}^m_{jkl}\end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_m g_{im}\overline{R}(dx^m,\partial_j,\partial_k,\partial_l) &= \sum_m g_{im}dx^m(R(\partial_j,\partial_k,\partial_l))\\ &= \sum_m g_{im}\langle\sum_p g^{pm}\partial_p, R(\partial_j,\partial_k,\partial_l)\rangle\\ &= \sum_{m,p} g_{im}g^{pm}\langle\partial_p, R(\partial_j,\partial_k,\partial_l)\rangle\\ &= \delta_{ip}\langle\partial_p, R(\partial_j,\partial_k,\partial_l)\rangle\\ &= R_{ijkl}\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}R_{ijkl}=(\downarrow_1^1 \overline{R})(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l) &= \langle\partial_i, R(\partial_j,\partial_k,\partial_l)\rangle\\ &= \sum_m g_{im}R^m_{jkl}\end{aligned}$$

dir.

Buna göre, $(1,3)$- tipindeki Riemann eğrilik tensörü ile $(0,4)$- tipindeki $\downarrow_1^1 \overline{R}$ tensör alanı metrik olarak denktir.

Tanım 2.56 [6] $A=\sum A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\partial_{i_1}\otimes\dots\otimes\partial_{i_r}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_n}$ olmak üzere M manifoldu üzerinde (r,s)- tipinde bir A tensör alanı verilsin.

$1 \leq a < b \leq s, \quad r \in \mathbb{Z}^+$ *için,* $C_{ab} = C_a^1 \uparrow_b^1$ *olmak üzere,*

$$(C_{ab}A)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{s-2}} = \sum_{p,q} g_{pq} A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots p \ldots q \ldots j_{s-2}}$$

eşitliğiyle tanımlı $C_{ab} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^r_{s-2}(M)$ $\mathfrak{F}(M)$- lineer dönüşümüne metrik daraltma dönüşümü, $C_{ab}A \in \mathfrak{T}^r_{s-2}(M)$ tensör alanına da A tensör alanının metrik daraltması denir.

Benzer olarak, $1 \leq a < b \leq r$ ve $s \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$C^{ab} : \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-2}_s(M)$$

dönüşümü

$$(C^{ab}A)^{i_1 \ldots i_{r-2}}_{j_1 \ldots j_s} = \sum_{p,q} g_{pq} A^{i_1 \ldots p \ldots q \ldots i_{r-2}}_{j_1 \ldots j_s}$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Örnek 2.57 $A \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ olsun. A tensör alanının C_{12} metrik daraltması için, $C_{12}A \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ dir. $C_{12}A$ tensör alanının koordinat sistemine göre bileşenleri, $(C_{12}A)^i_j = \sum_{p,q} g^{pq} A^i_{pqj}$ dir. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned}
(C_{12}A)^i_j = (C^1_1(\uparrow^1_2 A))^i_j = (C^1_1(\uparrow^1_2 A))(dx^i, \partial_j) &= \boldsymbol{C}(\uparrow^1_2 A(\cdot, dx^i, \cdot, \partial_j)) \\
&= \sum_p (\uparrow^1_2 A)(dx^p, dx^i, \partial_p, \partial_j) \\
&= \sum_p A(dx^i, \partial_p, \sum_q g^{pq} \partial_q, \partial_j)) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} A(dx^i, \partial_p, \partial_q, \partial_j) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} A^i_{pqj}.
\end{aligned}$$

Örnek 2.58 M, koordinat çatı alanı $\{E_1, \ldots, E_n\}$ olan n- boyutlu Semi-Riemann manifoldu olsun. $A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ olmak üzere,

$$(C_{ab}A)(X_1, \ldots, X_{s-2}) = \sum_m \varepsilon_m A(X_1, \ldots, E_m, \ldots, E_m, \ldots, X_{s-2})$$

dir. Burada, $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$ dir.

Lemma 2.59 [6, Lemma 3.45] *D_V kovaryant türev ve D kovaryant diferensiyeli hem $\uparrow^a_b$, $\downarrow^a_b$ işlemleri hem de daraltma dönüşümleri ile değişmelidir.*

Tanım 2.60 [6] $f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $df \in \chi^*(M)$ 1- formuna metrikçe denk olan vektör alanı $gradf$ olmak üzere $gradf = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$ eşitliğiyle tanımlı vektör alanına f fonksiyonunun gradiyenti denir. f fonksiyonunun gradiyenti ∇f ile de gösterilir.

Her $X \in \chi(M)$ için,

$$df(X) = \langle gradf, X \rangle$$

ve

$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ olduğundan, $gradf = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$ dir.

Ayrıca, $X = \sum_k X^k \partial_k$ için,

$$\begin{aligned}
\langle gradf, X \rangle &= \langle \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j, \sum_k X^k \partial_k \rangle \\
&= \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial x^i} X^k g^{ij} g_{jk} \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i \\
&= Xf
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.61 $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun.

$$\begin{aligned}
(\uparrow^1_1 df)(dx^k) &= df(\sum_i g^{ik} \partial_i) \\
&= \sum_i g^{ik} (df)(\partial_i) \\
&= \sum_i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(grad f)(dx^k) &= (\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j)(dx^k) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} (\partial_j)(dx^k) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta_{jk} \\
&= \sum_{i} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

olduğundan $\uparrow_1^1 df = grad f$ dir.

Tanım 2.62 [6] Bir M manifoldu üzerinde $(0,2)$- tipinde simetrik A tensör alanı verilsin. A tensör alanının kovaryant diferensiyeli DA olmak üzere, $C_{13}(DA)$ 1- formuna, A tensörünün divergensi denir ve $div\, A$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre, $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, $DA \in \mathfrak{T}_3^0(M)$ ve $C_{13}(DA) \in \chi^*(M)$ dir. Buna göre, $C_{13}(DA)$ 1- formunun koordinat sistemine göre bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
(div\, A)_i = (C_{13}(DA))_i = (C_1^1 \uparrow_3^1)(DA)(\partial_i) &= C_1^1(\uparrow_3^1 (DA))(\partial_i) \\
&= \mathbf{C}(\uparrow_3^1 (DA)(\cdot,\cdot,\partial_i)) \\
&= \sum_p (\uparrow_3^1 (DA)(dx^p, \partial_p, \partial_i)) \\
&= \sum_p (DA)(\partial_p, \partial_i, \sum_q g^{pq} \partial_q) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} (DA)(\partial_p, \partial_i, \partial_q) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} (D_{\partial_q})(\partial_p, \partial_i) \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} A_{pi;q}
\end{aligned}
$$

dir.

Özel olarak, $V \in \chi(M)$ için $div\ V = \mathbf{C}(DV)$ dir. Buna göre, $V = \sum_k V^k \partial_k$ için,

$$\begin{aligned}
div\ V = \mathbf{C}(DV) = C_1^1(DV) &= \mathbf{C}((DV)(\cdot,\cdot)) \\
&= \sum_p (DV)(dx^p, \partial_p) \\
&= \sum_p (D_{\partial_p} V)(dx^p) \\
&= \sum_p dx^p(D_{\partial_p} V) \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, D_{\partial_p} V\rangle \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, D_{\partial_p}(\sum_k V^k \partial_k)\rangle \\
&= \sum_p \langle \sum_q g^{pq}\partial_q, \sum_k [\partial_p(V^k)\partial_k + V^k D_{\partial_p}\partial_k]\rangle \\
&= \sum_{p,q} g^{pq} g_{qk}\partial_p(V^k) + \sum_{p,q,k,s} g^{pq} g_{qs} V^k \Gamma^s_{pk} \\
&= \sum_p \partial_p(V^p) + \sum_{p,k} V^k \Gamma^p_{pk} \\
&= \sum_p (\frac{\partial V^p}{\partial x^p} + \sum_k V^k \Gamma^p_{pk})
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 2.63 [7] $f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $Hess\ f(v) = D_v grad f$, $v \in T_p(M)$ eşitliği ile tanımlı $Hess\ f : T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümüne, f fonksiyonunun Hessiyanı denir ve $Hess\ f$ ile gösterilir.

Her $X,Y \in \chi(M)$ için, $\langle Hess\ f(Y), X\rangle = \langle Y, Hess\ f(X)\rangle$ dir. Buna göre, $Hess\ f$ self- adjoint dönüşümünün tanımladığı bilineer dönüşüm,

$Hess\ f(X,Y) = \langle D_X grad f, Y\rangle$ eşitliği ile tanımlı $Hess\ f : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M)$ dönüşümüdür. Kısaca, $\langle D_X grad f, Y\rangle = D(df)(X,Y) = D^2 f(X,Y)$ olduğundan f fonksiyonunun ikinci kovaryant diferensiyeli, f fonksiyonunun Hessiyanıdır.

Lemma 2.64 [6, Lemma 3.49] *$f \in \mathfrak{F}(M)$ için, $Hess\ f$, $(0,2)$ tipinde, simetrik tensör alanıdır. Ayrıca, f fonksiyonunun gradiyenti $grad f$ olmak üzere,*

$$H^f(X,Y) = XYf - (D_XY)f = \langle D_X(grad f), Y\rangle$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} Hess\ f(X,Y) = (D(Df))(X,Y) &= (D_Y Df)(X) \\ &= D_Y((Df)(X)) - Df(D_Y X) \\ &= D_Y(Xf) - (D_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (D_Y X)f \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan,

$X\langle grad f, Y\rangle = \langle D_X grad f, Y\rangle + \langle grad f, D_X Y\rangle$

ve

$X\langle grad f, Y\rangle = X(Yf)$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle D_X grad f, Y\rangle &= X(Yf) - (D_X Y)f \\ &= Hess\ f(Y,X) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$Hess\ f(X,Y) = \langle D_Y grad f, X\rangle$$

dir. Ayrıca, $XY - YX = [X,Y] = D_X Y - D_Y X$ olduğundan,

$Hess\ f(X,Y) = Hess\ f(Y,X)$

dir. □

Tanım 2.65 [6] $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere, $div(grad f)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun Laplaciyanı denir ve $\triangle f$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned}
\triangle f = div(grad f) = \boldsymbol{C}(D(grad f)) &= \boldsymbol{C}D(\uparrow_1^1 df) \\
&= (\boldsymbol{C}\uparrow_1^1)(D(df)) \\
&= (\boldsymbol{C}\uparrow_1^1)(Hess\ f) \\
&= C_{12}(Hess\ f)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$C_{12}(Hess\ f) = C_{12}(Hess\ f(X,Y)) = C_{12}\langle D_X(grad f), Y\rangle$

olduğundan,

$\triangle f = \sum_{i,j} g^{ij}H^{ij} = \sum_{i,j} g^{ij}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\}$

dır. $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal koordinat sistemine göre, $\triangle f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.66 [1, 9] M, ortonormal çatı alanı $\{E_1, \ldots, E_n\}$ olan n- boyutlu manifold ve $A : \chi(M) \to \chi(M)$ lineer dönüşüm olsun. Her $V \in \chi(M)$ için,

$$(\triangle A)(V) = iz(D^2A(V,\cdot,\cdot)) = \sum_{i=1}^{n} D^2A(V,E_i,E_i)$$

eşitliği ile tanımlı $\triangle A : \chi(M) \to \chi(M)$ dönüşümüne A lineer dönüşümünün Laplaciyanı denir.

Tanım 2.67 [6] M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, C_3^1R tensör alanına M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü denir. Ricci eğrilik tensörü Ric ile gösterilir. $Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ dir.

Ricci eğrilik tensörünün koordinat çatı alanına göre bileşenleri R_{ij} olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j) = (C_3^1R)(\partial_i, \partial_j) &= \boldsymbol{C}\{R(\cdot, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\
&= \sum_m R(dx^m, \partial_i, \partial_j, \partial_m) \\
&= \sum_m R_{ijm}^m.
\end{aligned}$$

Lemma 2.68 [6, Lemma 3.52] *$Ric \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ tensör alanı simetriktir.*

$\varepsilon_m = \langle E_m, E_m\rangle$ olmak üzere, $Ric(X,Y) = \sum\limits_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m}, E_m\rangle$ dir.

İspat. Her $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) = (C^1_3 R)(X,Y) &= \mathbf{C}\{R(\cdot,X,Y,\cdot)\} \\ &= \sum_m R(E^*_m, X, Y, E_m) \\ &= \sum_m E^*_m(R(X,Y,E_m)) \\ &= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R(X,Y,E_m)\rangle \\ &= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R_{YE_m}X\rangle \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R_{YE_m}X\rangle \\ &= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m}Y, E_m\rangle \\ &= Ric(Y,X) \end{aligned}$$

olduğundan Ricci eğrilik tensörü simetriktir. □

Tanım 2.69 [6] M manifoldunun Ricci eğrilik tensörünün $\mathbf{C}(Ric)$ metrik daraltmasına M manifoldunun skalar eğriliği denir ve S ile gösterilir.

$$\begin{aligned} S = C_{12}(Ric) = (C^1_1 \uparrow^1_2)(Ric) = C^1_1(\uparrow^1_2 Ric) &= C\{(\uparrow^1_2 Ric)(\cdot,\cdot)\} \\ &= \sum_p (\uparrow^1_2 Ric)(dx^p, \partial_p) \\ &= \sum_p Ric(\partial_p, \sum_q g^{pq}\partial_q) \\ &= \sum_{p,q} g^{pq} Ric(\partial_p, \partial_q) \\ &= \sum_{p,q} g^{pq} R_{pq} \\ &= \sum_{p,q,k} g^{pq} R^k_{pqk} \end{aligned}$$

dır. Ayrıca, $p = q$ olduğunda, $S = \sum\limits_p Ric(\partial_p, \partial_p)$ dir.

Lemma 2.70 [10, Lemma 1.1] *M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey, $p \in M$ olmak üzere, V, p noktasının açık komşuluğu ve $f : V \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $p \in V$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(i) $\triangle f(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^n)^2} = \sum_{i=1}^{n} \langle Hess(f)_p(e_i), e_i \rangle$

Burada, $\{e_1, \ldots, e_n\}, \mathbb{R}^n$ uzayının ortonormal tabanı ve $Hess(f)$, f nin $n \times n$ tipinde Hessiyan matrisidir.

(ii) $\langle Hess(f)\nabla f, \nabla f \rangle = \frac{1}{2}\langle \nabla \|\nabla f\|^2, \nabla f \rangle$

(iii) *α, V de herhangi bir eğri olmak üzere,*

$$\frac{d\nabla f(\alpha(t))}{dt} = Hess(f)_{\alpha(t)}\alpha'(t)$$

İspat. (i) de verilen eşitliğin ispatında, $gradf$ vektör alanı ile df 1- formu metrikçe denk olduğu ve f fonksiyonunun Laplaciyanının tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \triangle f(p) = (div(gradf))(p) &= (\mathbf{C}(D(gradf)))(p) \\ &= (\mathbf{C}(D(df)))(p) \\ &= (\mathbf{C}(Hess\ f))(p) \\ &= iz(Hess\ f)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle Hess\ (f)_p e_i, e_i \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

∇f, f fonksiyonunun gradiyenti olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle Hess(f)\nabla f, \nabla f \rangle = \langle D_{\nabla f}\nabla f, \nabla f \rangle &= \frac{1}{2} D_{\nabla f}\langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \frac{1}{2} D_{\nabla f}\|\nabla f\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla \|\nabla f\|^2, \nabla f \rangle \end{aligned}$$

dır.

(iii) için, ∇f gradiyent vektör alanının türevinin tanımı kullanılarak,

$$\frac{d\nabla f(\alpha(t))}{dt} = (\nabla f \circ \alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)} \nabla f = Hess(f)_{\alpha(t)} \alpha'(t)$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.71 [10, Teorem 2.1] *f, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir V açık alt kümesinden $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $p \in M$ için, $\|\nabla f(p)\| \neq 0$ olsun.*

$M = \{p \in V \mid f(p) = 0\}$ olmak üzere, M hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$\|\nabla f\|^2 \triangle f = \frac{1}{2}\langle \nabla \|\nabla f\|^2, \nabla f\rangle$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $\mu : M \to S^{n-1}$, M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü olsun.

$(d\mu)_p : T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümdür. Her $v \in T_p(M)$ için, α, M içinde $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ olacak şekilde bir eğri olsun.

$$\begin{aligned}
\langle d\mu_p(v), v\rangle &= \langle \frac{d\mu(\alpha(t))}{dt} \mid_{t=0}, v\rangle \\
&= \langle \frac{d\|\nabla f(\alpha(t))\|^{-1}.\nabla f(\alpha(t))}{dt} \mid_{t=0}, v\rangle \\
&= \langle \frac{d\|\nabla f(\alpha(t))\|^{-1}}{dt} \mid_{t=0} \nabla f(p) + \|\nabla f(p)\|^{-1} \frac{d\nabla f(\alpha(t))}{dt} \mid_{t=0}, v\rangle \\
&= \frac{d\|\nabla f(\alpha(t))\|^{-1}}{dt} \mid_{t=0} \langle \nabla f(p), v\rangle + \|\nabla f(p)\|^{-1} \langle \frac{d\nabla f(\alpha(t))}{dt} \mid_{t=0}, v\rangle \\
&= \|\nabla f(p)\|^{-1} \langle Hess(f)_p v, v\rangle
\end{aligned}$$

dir. $\mathbb{R}^n$ uzayının bir ortonormal tabanı, $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ kümesi $T_p(M)$ uzayının tabanı, v_n vektörü $T_p(M)^{\perp}$ uzayının bir tabanı olacak şekilde seçilebilir. $v_n = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ olsun.

Buna göre, M hiperyüzeyinin ortonormal eğriliği $H = -\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle d\mu_p(v_i), v_i\rangle$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle d\mu_p(v_i), v_i\rangle \\
&= -\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\|\nabla f(p)\|^{-1}\langle Hess(f)_p v_i, v_i\rangle \\
&= -\frac{1}{n-1}\|\nabla f(p)\|^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\langle Hess(f)_p v_i, v_i\rangle - \langle Hess(f)_p v_n, v_n\rangle\right] \\
&= -\frac{1}{n-1}\|\nabla f(p)\|^{-1}\left[\triangle f(p) - \langle Hess(f)_p \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\|\nabla f(p)\|^{-1}(-\triangle f(p) + \|\nabla f(p)\|^{-2}\langle Hess(f)_p \nabla f(p), \nabla f(p)\rangle) \\
&= \frac{1}{n-1}\|\nabla f(p)\|^{-1}(-\triangle f(p) + \|\nabla f(p)\|^{-2}\frac{1}{2}\langle \nabla\|\nabla f\|^2(p), \nabla f(p)\rangle)
\end{aligned}
$$

dir. Bu eşitlikten yararlanılarak, M hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul her $p \in M$ için, $\|\nabla f(p)\|^2\triangle f(p) = \frac{1}{2}\langle\nabla\|\nabla f\|^2(p), \nabla f(p)\rangle$ eşitliğinin sağlanmasıdır. □

Örnek 2.72 (Clifford Minimal Koni) k ve l, $k+l = n-2$ olacak şekilde pozitif tam sayılar olmak üzere, $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(p) = f(p_1, \ldots, p_n) = k(p_1^2 + \ldots + p_{l+1}^2) - l(p_{l+2}^2 + \ldots + p_n^2)$$

eşitliği ile verilsin. $f^{-1}\{0\}$ kümesi M_{lk} ile gösterilsin. M_{lk} hiperyüzeyi yukarıdaki teoreme göre $(n-1)$- boyutlu bir minimal hiperyüzeydir. Gerçekten, bunu göstermek için sırası ile $\nabla f(p)$, $\|\nabla f(p)\|^2$, $\nabla\|\nabla f(p)\|^2$, $\frac{1}{2}\langle\nabla\|\nabla f\|^2(p), \nabla f(p)\rangle$ ve $\triangle f(p)$ terimleri hesaplandığında,

$$
\begin{aligned}
\nabla f(p) &= (2kp_1, \ldots, 2kp_{l+1}, -2lp_{l+2}, \ldots, -2lp_n) \\
&= 2(kp_1, \ldots, kp_{l+1}, -lp_{l+2}, \ldots, -lp_n)
\end{aligned}
$$

$\|\nabla f(p)\|^2 = \langle \nabla f(p), \nabla f(p) \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle 2(kp_1,\ldots,kp_{l+1},-lp_{l+2},\ldots,-lp_n), 2(kp_1,\ldots,kp_{l+1},-lp_{l+2},\ldots,-lp_n)\rangle \\ &= 4k^2(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)+4l^2(p_{l+2}^2+\ldots+p_n^2) \end{aligned}$$

$\nabla\|\nabla f(p)\|^2 = 8(k^2p_1,\ldots,k^2p_{l+1},l^2p_{l+2},\ldots,l^2p_n)$

$\frac{1}{2}\langle \nabla\|\nabla f\|^2(p), \nabla f(p)\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle 8(k^2p_1,\ldots,k^2p_{l+1},l^2p_{l+2},\ldots,l^2p_n), 2(kp_1,\ldots,kp_{l+1},-lp_{l+2},\ldots,-lp_n)\rangle$

$= 8k^3(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)-8l^3(p_{l+2}^2+\ldots+p_n^2)$

$$\begin{aligned} \triangle f(p) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}+\ldots+\tfrac{\partial^2 f}{\partial p_n^2} &= 2k(l+1)-2l(k+1) \\ &= 2(k-l) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir

Ayrıca, $p \in M_{lk}$ için,

$k(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)-l(p_{l+2}^2+\ldots+p_n^2)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|\nabla f(p)\|^2\triangle f(p) &= 2(k-l)(4k^2(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)+4l^2(p_{l+2}^2+\ldots+p_n^2)) \\ &= 2(k-l)(4k^2(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)+4kl(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)) \\ &= 8k^3(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)-8kl^2(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2) \\ &= 8k^3(p_1^2+\ldots+p_{l+1}^2)-8l^3(p_{l+2}^2+\ldots+p_n^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla\|\nabla f\|^2(p), \nabla f(p)\rangle \end{aligned}$$

dir.

3. KÜRE İÇİNDEKİ CLIFFORD HİPERYÜZEYLERİ

L.J. Alias, A. Brasil ve O. Perdomo, 2008 yılında küre içindeki ortalama eğriliği sabit hiperyüzeylerin karakterizasyonu ile ilgili yaptıkları çalışmada [11] küre içindeki Clifford hiperyüzeylerine örnekler vermişlerdir. Bu bölümde, konuyla ilgili yapılan çalışma ve örnekler incelenecektir.

3.1. Giriş

M, S^{n+1} küresi içinde $\phi : M \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ immersiyonu ile verilen n-boyutlu, tam (complete) ve yönlendirilebilir manifold olsun. Burada, $\phi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi ile M manifoldu, $p \in M$ olmak üzere $T_p(M)$ tanjant uzayı ile $\phi_{*p}(T_p(M))$ uzayı özdeş olarak düşünülecektir.

M hiperyüzeyi boyunca birim normal vektör alanı $\mu : M \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ dönüşümüyle verilsin. Burada, her $p \in M$ için $\mu(p)$ vektörü hem P yer vektörüne hem de $T_p(M)$ uzayına dik bir vektördür.

M içindeki $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = v$ olacak biçimdeki bir α eğrisi için

$\beta(t) = (\mu \circ \alpha)(t)$ olsun. Buna göre, M hiperyüzeyinin şekil operatörü

$A_p : T_p(M) \to T_p(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A_p(v) = -D_v\mu = -(\mu \circ \alpha)'(0) &= -\beta'(0) \\
&= -\beta_{*0}(\frac{d}{dx}|_0) \\
&= -(\mu \circ \alpha)_{*0}(\frac{d}{dx}|_0) \\
&= -\mu_{*p}(\alpha_{*0}(\frac{d}{dx}|_0)) \\
&= -\mu_{*p}(\alpha'(0)) \\
&= -\mu_{*p}(v) \\
&= -d\mu_p(v)
\end{aligned}$$

dır. $A_p : T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümü simetrik olduğundan, n- tane $\kappa_1(p),\ldots,\kappa_n(p)$ karakteristik değeri vardır. Bu karakteristik değerlerin her biri M hiperyüzeyinin p noktasındaki asal eğrilikleridir. M hiperyüzeyinin p noktasındaki asal eğriliklerinin ortalaması olan

$$H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_n(p)}{n}$$

sayısına M hiperyüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir. Ayrıca, A şekil operatörünün normunun karesi

$$\|A\|_p^2 = iz\ (A_p^2) = \kappa_1^2(p) + \ldots + \kappa_n^2(p)$$

eşitliği ile belirlidir.

3.2. Örnekler

Aşağıdaki örneklerde S^{n+1} küresi içinde hem H ortalama eğriliği hem de $\|A\|^2$ operatörünün sabit olduğu hiperyüzeyler verilecektir.

Örnek 3.1 [11] $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ birim sabit vektör ve $|c| < 1$ olmak üzere c bir reel sayı olsun.

$$S^n(v,c) = \{p \in S^{n+1} | \ \langle p, v\rangle = c\}$$

kümesi verilsin. $S^n(v,c)$ kümesi S^{n+1} küresi içinde bir hiperyüzeydir. Özel olarak, $c = 0$ için $S^n(v,0)$ kümeleri S^{n+1} küresinin ekvatorlarıdır.

$S^n(v,c)$ hiperyüzeyi boyunca birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned} \mu : S^n(v,c) &\longrightarrow S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \\ p &\longrightarrow \mu(p) \end{aligned}$$

olsun.

$\mu(p)$, $S^n(v,c)$ küresinin teğet uzayına dik ve S^{n+1} küresinin teğet uzayı içinde bulunan birim vektördür.

S^{n+1}, $S^n(v,c)$ küresini kapsayan bir küre olduğundan $T_p(S^n) \subset T_p(S^{n+1})$ dir. $\overrightarrow{OP}$ vektörü $T_p(S^{n+1})$ uzayına dik olduğundan $T_p(S^n)$ uzayına da dik olur. Kısaca, $\overrightarrow{OP} \in T_p(S^n(v,c))^{\perp}$ dir. $T_p(\mathbb{R}^{n+2})$ uzayının boyutu $(n+2)$, $T_p(S^n(v,c))$ uzayının boyutu n- olduğundan $T_p(S^n(v,c))^{\perp}$ uzayının boyutu 2 dir. Buna göre,

$\overrightarrow{OP} \in T_p(S^n(v,c))^{\perp}$, $v \in T_p(S^n(v,c))^{\perp}$, $\mu(p) \in T_p(S^n(v,c))^{\perp}$ olduğundan $\{\overrightarrow{OP}, v, \mu(p)\} \subset T_p(S^n(v,c))^{\perp}$ dir. Ayrıca, boy $T_p(S^n(v,c))^{\perp} = 2$ olduğundan $\{\overrightarrow{OP}, v, \mu(p)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Bu durumda,

$$\mu(p) = \lambda_1 v + \lambda_2 p \tag{3.2.1}$$

olacak biçimde λ_1, λ_2 reel sayıları vardır.

$\|\mu(p)\| = 1$ ve $\langle \overrightarrow{OP}, \mu(p) \rangle = 0$ olduğundan λ_1, λ_2 sayıları tek olarak belirlidir.

$$\begin{aligned} \|\mu(p)\| = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{\langle \lambda_1 v + \lambda_2 p, \lambda_1 v + \lambda_2 p \rangle} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 c + \lambda_2^2 = 1 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OP}, \mu(p) \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle p, \lambda_1 v + \lambda_2 p \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 \langle p, v \rangle + \lambda_2 \langle p, p \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 c + \lambda_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

dır. (3.2.2) ve (3.2.3) eşitliklerinden,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \qquad ve \qquad \lambda_2 = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

dir. Bu sayılar (3.2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu(p) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(v - cp)$$

olarak elde edilir.

$S^n(v,c)$ hiperyüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü A_p olmak üzere,

$$A_p : T_p(S^n(v,c)) \longrightarrow T_p(S^n(v,c))$$

dönüşümü $A_p(w) = -D_w\mu$ eşitliği ile tanımlıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} D_w\mu &= \sum_{i=1}^{n} w(\mu_i)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\frac{\partial \mu_i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}w_i)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \\ &= -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sum_{i=1}^{n} w_i\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \\ &= -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}w \end{aligned}$$

olduğundan,

$$A_p = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}I$$

dır. Her $p \in S^n(v,c)$ için $S^n(v,c)$ hiperyüzeyinin asal eğrilikleri $\kappa_1(p),\ldots,\kappa_n(p)$ olmak üzere,

$$\kappa_1(p) = \ldots = \kappa_n(p) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

dir. Buna göre, $S^n(v,c)$ hiperyüzeyi totally umbiliktir.

$S^n(v,c)$ hiperyüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği H olmak üzere,

$$H = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

dir. Ayrıca,

$$\|A\|^2 = n\frac{c^2}{1-c^2}$$

olarak elde edilir. Buradan, $S^n(v,c)$ hiperyüzeyinin hem H ortalama eğriliği hem de $\|A\|^2$ şekil operatörünün normunun karesi sabittir.

Örnek 3.2 [11] $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ bir tamsayı ve r, $0 < r < 1$ olacak biçimde bir reel sayı olsun. $l = n-k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} M_k(r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^{l+1} : \|x\|^2 = r^2,\ \ \|y\|^2 = 1-r^2\} \\ &= S^k(r)\times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \subset S^{n+1} \end{aligned}$$

kümesi verilsin. Her $(x,y) \in M_k(r)$ için $M_k(r)$ hiperyüzeyinin (x,y) noktasındaki teğet uzayı

$$T_{(x,y)}M_k(r) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} : \langle x,v \rangle = 0, \quad \langle y,w \rangle = 0\}$$

dır.

$\mu(x,y)$, $M_k(r)$ hiperyüzeyinin birim normal vektörü olmak üzere $T_{(x,y)}(S^{n+1})$ teğet uzayı içinde bulunan ve (x,y) vektörüne dik olan birim uzunlukta bir vektördür. Kısaca,

$$\mu : M_k(r) \longrightarrow S^{n+1}$$

dönüşümü $M_k(r)$ hiperyüzeyinin Gauss dönüşümüdür. Gerekli işlemler yapılarak,

$$\mu(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}y \right)$$

olarak elde edilir.

Örneğin, $n = 4$ olmak üzere $k \in \{1,2,3\}$ için elde edilen hiperyüzeyler sırasıyla,

$M_1(r) = S^1(r) \times S^3(\sqrt{1-r^2})$

$M_2(r) = S^2(r) \times S^2(\sqrt{1-r^2})$

$M_3(r) = S^3(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$

dır. Şimdi, $M_1(r)$ hiperyüzeyinin şekil operatörü, asal eğrilikleri, ortalama eğriliği ve şekil operatörünün normunun karesi hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} M_1(r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 : \|x\|^2 = r^2, \quad \|y\|^2 = 1-r^2\} \\ &= S^1(r) \times S^3(\sqrt{1-r^2}) \subset S^5 \subset \mathbb{R}^6 \end{aligned}$$

ve

$$T_{(x,y)}M_1(r) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 : \langle x,v \rangle = 0, \quad \langle y,w \rangle = 0\}$$

dır. Ayrıca,

$T_{(x,y)}M_1(r) = T_x(S^1(r)) \oplus T_y(S^3\sqrt{1-r^2})$

olduğu da biliniyor.

$M_1(r)$ hiperyüzeyinin birim dik vektörü $\mu(x,y)$ olsun. $\mu : M_1(r) \to S^5$, immersiyon boyunca bir vektör alanıdır. Yani, $M_1(r)$ hiperyüzeyinin her (x,y) noktasına $T_{(x,y)}(S^5(1))$ uzayının bir elemanını karşılık getirir.

S^5 küresinin birim dik vektörü (x,y) olsun. (x,y) vektörü $(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)$ şeklindedir. $M_1(r) \subset S^5$ ve $T_{(x,y)}(M_1(r)) \subset T_{(x,y)}(S^5)$ olduğundan (x,y) vektörü aynı zamanda $M_1(r)$ hiperyüzeyinin de birim dik vektörüdür. Burada, x ve y sırası ile $S^1(r)$ ve $S^3\sqrt{1-r^2}$ hiperyüzeylerinin birim dik vektörleridir. Kısaca,

$$(x,y) \in T_{(x,y)}(M_1(r))^{\perp} = T_x(S^1(r))^{\perp} \oplus T_y\,(S^3\sqrt{1-r^2})^{\perp}$$

dir. Ayrıca,

$\mu(x,y) \in T_{(x,y)}(S^5)$ olduğundan, $\langle \mu(x,y),(x,y)\rangle = 0$ dır.

$$(x,y) \in T_{(x,y)}(M_1(r))^{\perp} \tag{3.2.4}$$

$$\mu(x,y) \in T_{(x,y)}(M_1(r))^{\perp} \tag{3.2.5}$$

ve

$$T_{(x,y)}(S^5(1)) = T_{(x,y)}(M_1(r)) + T_{(x,y)}(M_1(r))^{\perp}$$

eşitliği de gözönüne alınarak,

$$boy\ T_{(x,y)}(M_1(r))^{\perp} = 1 \tag{3.2.6}$$

bulunur. (3.2.4), (3.2.5) ve (3.2.6) eşitliklerinden,

$$\mu(x,y) = \lambda(x,y) \tag{3.2.7}$$

olacak şekilde bir λ sabiti vardır. Daha açık olarak,

$$(\mu_1(x),\mu_2(y)) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \tag{3.2.8}$$

olur. Şimdi, λ_1 ve λ_2 sabit sayılarını hesaplamak için,

$$
\begin{aligned}
\|\mu(x,y)\|^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{\langle(\lambda_1 x, \lambda_2 y), (\lambda_1 x, \lambda_2 y)\rangle} = 1 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1^2 \|x\|^2 + \lambda_2^2 \|y\|^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1^2 r^2 + \lambda_2^2 (1 - r^2) = 1
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\langle \mu(x,y), (x,y) \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle(\lambda_1 x, \lambda_2 y), (x,y)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 \|x\|^2 + \lambda_2 \|y\|^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 r^2 + \lambda_2 (1 - r^2) = 0
\end{aligned}
$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$
\lambda_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad \lambda_2 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}
$$

olarak bulunur. λ_1 ve λ_2 nin bu değerleri (3.2.8) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$
\mu(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} x, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} y \right)
$$

elde edilir.

$T_{(x,y)} M_1(r) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 : \langle x, v \rangle = 0, \quad \langle y, w \rangle = 0\}$

kümesinde $w = 0$ alınırsa *boy* $T_{(x,y)}(M_1(r)) = 1$ elde edilir. $(v,0) \in T_{(x,y)}(M_1(r))$ teğet vektörü $(v,0) = (v_1, v_2, 0, 0, 0, 0)$ şeklindedir. Bu vektör için,

$$
\begin{aligned}
A_{(x,y)}(v,0) &= -D_{(v,0)}\mu \\
&= -\sum_{i=1}^{6} (v,0)[\mu_i] \frac{\partial}{\partial x^i}(x,y) \\
&= -\sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{2} v_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j}(x,y) \right) \frac{\partial}{\partial x^i}(x,y) \\
&= -\sum_{i=1}^{6} \left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} v_i \right) \frac{\partial}{\partial x^i}(x,y) \\
&= \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}(v,0)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde, $v=0$ olduğunda da $(0,w)\in T_{(x,y)}(M_1(r))$ için,

$$A_{(x,y)}(0,w)=-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}(0,w)$$

elde edilir. Buna göre, $M_1(r)$ hiperyüzeyinin (x,y) noktasındaki asal eğrilikleri,

$$\kappa_1(x,y)=-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$$

$$\kappa_2(x,y)=\kappa_3(x,y)=\kappa_4(x,y)=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $M_1(r)$ hiperyüzeyinin ortalama eğriliği H olmak üzere

$$H=\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}+\frac{3r}{\sqrt{1-r^2}}\right)=\frac{4r^2-1}{4r\sqrt{1-r^2}}$$

ve

$$\|A\|^2=\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2=\frac{1}{r^2}+\frac{3}{1-r^2}-4$$

olur. Buradan, $M_1(r)$ hiperyüzeyinin hem ortalama eğriliği hem de şekil operatörünün normunun karesi sabittir.

Tanım 3.3 $\phi: M\to S^{n+1}\subset\mathbb{R}^{n+2}$ dönüşümü tam (complete), n- boyutlu, yönlendirilebilir M manifoldu için bir immersiyon olsun.

$k\in\{1,2,\dots,n-1\}$, $r\in(0,1)$, $l=n-k$ için,

$$M_k(r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^{l+1}\mid \|x\|^2=r^2,\ \|y\|^2=1-r^2\}$$

kümesi verilsin. M nin izometrilerinin kümesi $I(\mathbb{R}^n)$ içinde $M=\varphi(M_k(r))$ eşitliğini sağlayacak şekilde φ izometrisi varsa M hiperyüzeyine Clifford hiperyüzeyi denir.

Örnek 3.4 k ve l, $k+l=n$ olacak şekilde tam sayılar olmak üzere

$$S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\times S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^{l+1}\mid \|x\|^2=\frac{k}{n}\ ,\ \ \|y\|^2=\frac{l}{n}\}\subset S^{n+1}$$

kümesi Clifford hiperyüzeyidir.

3.3. Clifford Hiperyüzeyleri İçin Elde Edilen Karakterizasyonlar

Teorem 3.5 [11, Teorem 3] *M, n- boyutlu yönlendirilebilir, tam (complete) manifoldu $\phi : M \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ immersiyonu ile verilsin ve M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği sabit olsun.*

$v \in \mathbb{R}^{n+2}$ için, $l_v(x) = \langle \phi(x), v \rangle$ ve $f_v(x) = \langle \mu(x), v \rangle$ eşitlikleri ile verilen

$l_v : M \to \mathbb{R}$ ve $f_v : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $l_v = \lambda f_v$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı ve $v \neq 0$ vektörü varsa, $\phi(M)$ kümesi bir totally umbilik küre veya Clifford hiperyüzeyidir.

Bu teoreme benzer olarak, M hiperyüzeyinin minimal olduğu durum için aşağıdaki teorem ispatı ile verilecektir.

Teorem 3.6 [12, Teorem 1] *M, S^{n+1}, $n > 2$ küresi içinde daldırılmış (immersed), kompakt ve bağlantılı bir minimal hiperyüzey olsun. M hiperyüzeyinin bir Clifford hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşul N ve $\overline{N}$ sırasıyla M ve S^{n+1} yüzeylerinin birim normal vektör alanları olmak üzere sıfırdan farklı bir c sabiti için $\langle \mathfrak{a}, N \rangle = c \langle \mathfrak{a}, \overline{N} \rangle$ eşitliği sağlanacak şekilde $\mathbb{R}^{n+2}$ üzerinde sıfırdan farklı sabit bir $\mathfrak{a}$ vektör alanı olmasıdır.*

Teoremin ispatına geçmeden önce ispatta kullanılacak bazı eşitlikler ve lemma verilecektir.

M, S^{n+1} birim küresi içinde kompakt, daldırılmış (immersed), minimal hiperyüzey, N ve $\overline{N}$, sırasıyla, M hiperyüzeyinin ve S^{n+1} küresinin birim normal vektör alanıları, D ve $\overline{D}$, M ve S^{n+1} üzerindeki Riemann konneksiyonları olsun.

$\mathbb{R}^{n+2}$ üzerinde verilen sabit bir $\mathfrak{a}$ vektör alanı için, $f, h : M \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları

$$f = \langle \mathfrak{a}, N \rangle, \qquad h = \langle \mathfrak{a}, \overline{N} \rangle$$

eşitlikleriyle tanımlansın. $\mathfrak{a}$ vektör alanı, $Z \in \chi(M)$ için,

$$\mathfrak{a} = Z + fN + h\overline{N} \tag{3.3.9}$$

eşitliği ile verilebilir.

Buna göre, $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_X \mathfrak{a} &= \overline{D}_X (Z + fN + h\overline{N}) \\
&= \overline{D}_X Z + \overline{D}_X (fN) + \overline{D}_X (h\overline{N}) \\
&= D_X Z + \langle AX, Z \rangle N + (Xf)N + f\overline{D}_X N + (Xh)\overline{N} + h\overline{D}_X \overline{N} \\
&= D_X Z + \langle AX, Z \rangle N + (Xf)N - fA(X) + (Xh)\overline{N} + hX \\
&= D_X Z - fA(X) + hX + \langle AX, Z \rangle N + (Xf)N + (Xh)\overline{N}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_X Z = fA(X) - hX$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
Xf &= X\langle \mathfrak{a}, N \rangle \\
&= \langle \overline{D}_X \mathfrak{a}, N \rangle + \langle \mathfrak{a}, \overline{D}_X N \rangle \\
&= \langle Z + fN + h\overline{N}, -A(X) \rangle \\
&= -\langle Z, A(X) \rangle \\
&= -\langle A(Z), X \rangle
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
Xh &= X\langle \mathfrak{a}, \overline{N} \rangle \\
&= \langle \overline{D}_X \mathfrak{a}, \overline{N} \rangle + \langle \mathfrak{a}, \overline{D}_X \overline{N} \rangle \\
&= \langle Z + fN + h\overline{N}, X \rangle \\
&= \langle Z, X \rangle
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

olur. Buradan, f ve h fonksiyonlarının gradiyent vektör alanları sırasıyla, ∇f ve ∇h olmak üzere (3.3.10) ve (3.3.11) eşitliklerinden,

$Xf = \langle \nabla f, X \rangle$

ve

$Xh = \langle \nabla h, X \rangle$

olduğundan

$$\nabla f = -A(Z) \qquad ve \qquad \nabla h = Z$$

dir.

Şimdi yukarıdaki eşitlikler kullanılarak, f ve h fonksiyonlarının $\triangle f$ ve $\triangle h$ Laplaciyanlarını hesaplanacaktır.

$\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ kümesi M manifoldunun adapted (uyarlanmış) ortonormal çatısı olsun. Bu durumda, her $X \in \chi(M)$ için, $D_X E_i = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
D_{E_i}\nabla f = D_{E_i}(-A(Z)) &= -((D_{E_i}A)(Z) + A(D_{E_i}Z)) \\
&= -(D_{E_i}A)(Z) - A(D_{E_i}Z) \\
&= -(D_Z A)(E_i) - A(fA(E_i) - hE_i) \\
&= -((D_Z A)(E_i) + fA^2E_i - hA(E_i))
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\triangle f = div\nabla f = CD(\nabla f) = CD(\uparrow_1^1 df) &= (C\uparrow_1^1)(Ddf) \\
&= C\{\uparrow_1^1 (Ddf)(\cdot,\cdot)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\uparrow_1^1 (Ddf))(E_i^*, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (Ddf)(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (D_{E_i}df)(E_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} D_{E_i}((df)(E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D_{E_i}\langle \nabla f, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle D_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle (D_Z A)(E_i), E_i\rangle + h\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle - f\sum_{i=1}^{n}\langle A^2(E_i), E_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} [\langle D_Z(A(E_i)), E_i\rangle - \langle A(D_Z E_i), E_i\rangle] + nhH - \|A\|^2 f \\
&= -\sum_{i=1}^{n} [Z\langle A(E_i), E_i\rangle - \langle A(E_i), D_Z E_i\rangle - \langle A(D_Z E_i), E_i\rangle] + nHh - \|A\|^2 f \\
&= -nHZ + nHh - \|A\|^2 f
\end{aligned}
$$

dır. M minimal hiperyüzey olduğundan,

$$\triangle f = -\|A\|^2 f \tag{3.3.12}$$

elde edilir. $\triangle h$ fonksiyonu ise,

$$
\begin{aligned}
\triangle h = \sum_{i=1}^{n}\langle D_{E_i}\nabla h, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle D_{E_i} Z, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle fA(E_i) - h(E_i), E_i\rangle \\
&= f\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i), E_i\rangle - h\sum_{i=1}^{n}\langle E_i, E_i\rangle \\
&= nHf - nh
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$\triangle h = -nh \tag{3.3.13}$$

dir.

Lemma 3.7 [12, Lemma 2.1] *M, S^{n+1} birim küresinin kompakt ve yönlendirilebilir minimal hiperyüzeyi olsun. Bu durumda,*

$$\int_M \|Z\|^2 = n\int_M h^2, \qquad \int_M \|A(Z)\|^2 = \int_M \|A\|^2 f^2$$

dir.

İspat. (3.3.12) eşitliğinden $\triangle f = -\|A\|^2 f$ dir.

Ayrıca, $\frac{1}{2}\triangle f^2 = f\triangle f + \|\nabla f\|^2$ dir. Buna göre,

$\frac{1}{2}\int_M \triangle f^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_M f\triangle f &= -\int_M \|\nabla f\|^2 \\
\int_M f(-\|A\|^2 f) &= -\int_M \|\nabla f\|^2 \\
\int_M \|A\|^2 f^2 &= \|A(Z)\|^2
\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\int_M \|A(Z)\|^2 = \int_M \|A\|^2 f^2$$

olur.

Benzer olarak, h fonksiyonu için,

$\triangle h = -nh$ ve $\frac{1}{2}\triangle h^2 = h\triangle h + \|\nabla h\|^2$

eşitlikleri kullanılarak,

$$n\int_M h^2 = \int_M \|Z\|^2$$

elde edilir. $\square$

Şimdi, teorem (3.6) nın ispatı verilebilir:

İspat. M, S^{n+1} birim küresi içinde minimal hiperyüzey ve $\mathfrak{a}$, $\mathbb{R}^{n+2}$ üzerinde $c \neq 0$ sabiti için $\langle \mathfrak{a}, N\rangle = c\langle \mathfrak{a}, \overline{N}\rangle$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı sabit bir vektör alanı olsun.

$\triangle f = -\|A\|^2 f$ ve $\triangle h = -nh$ eşitliklerinde $f = ch$ yazılarak,

$$(n - \|A\|^2)h = 0$$

elde edilir. M bağlantılı olduğundan, $n = \|A\|^2$ veya $h = 0$ dır.

$h = 0$ olması durumunda $f = 0$ ve yukarıdaki lemmadan $Z = 0$ dır. Bununla birlikte, (3.3.9) eşitliğinden $\mathfrak{a} = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

Dolayısıyla, $\|A\|^2 = n$, $n > 2$ dir. Buna göre, [3, Lemma 1] den M, S^{n+1} içinde $S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right) \times S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$, $l+m=n$ bir Clifford hiperyüzeyidir.

Karşıt olarak, $M = S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right) \times S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$, $l + m = n$ eşitliği ile verilen Clifford hiperyüzeyi ve $S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right)$ ve $S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$ sırasıyla $\psi_1 : S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right) \to \mathbb{R}^{l+1}$ ve $\psi_2 : S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \to \mathbb{R}^{m+1}$ dönüşümleri ile birlikte birim normal vektör alanları N_1 ve N_2 olan daldırılmış alt manifoldlar olsun. Bu durumda, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, S^{n+1} küresi içinde $M = S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n}}\right) \times S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$, $l+m=n$ minimal hiperyüzeyini verir. S^{n+1} de M nin birim normali N ve $\mathbb{R}^{n+2}$ de S^{n+1} küresinin birim normali $\overline{N}$ olmak üzere

$$N = \left(\sqrt{\frac{m}{n}}N_1, -\sqrt{\frac{l}{n}}N_2\right) \;\; ve \;\; \overline{N} = \left(\sqrt{\frac{l}{n}}N_1, \sqrt{\frac{m}{n}}N_2\right)$$

dir. Bu durumda, $\mathbb{R}^{n+2}$ uzayı üzerinde $\mathfrak{a} = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ koordinat vektör alanı, $c = \sqrt{\frac{m}{l}} \neq 0$ için, $f = ch$ eşitliğini sağlar. □

4. KÜRE İÇİNDEKİ CLIFFORD MİNİMAL HİPERYÜZEYLERİ

Oscar Perdomo 2005 yılında yazdığı "S^n küresi içindeki Clifford minimal hiperyüzeylerinin katılığı (rigiditisi)" isimli makalesinde küre içindeki Clifford minimal hiperyüzeyleri için bir karakterizasyon vermiştir.

Bu bölümde, Clifford minimal hiperyüzeyleri ele alınarak Perdomo'nun bu konuyla ilgili yaptığı çalışması [4] incelenecektir.

4.1. Giriş

M, S^n küresi içinde minimal hiperyüzey ve M hiperyüzeyinin M boyunca birim vektör alanı $\mu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. Her $p \in M$ için $\mu(p)$ vektörü hem $\overrightarrow{OP}$ yer vektörüne hem de $T_p(M)$ uzayına diktir. Bu durumda, M hiperyüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü, α, M içinde $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = v$ olacak biçimdeki bir eğri olmak üzere $A_p(v) = -d\mu_p(v) = -\beta'(0)$ eşitliği ile tanımlıdır. Burada, $\beta(t) = (\mu \circ \alpha)(t)$ dir. M nin p noktasındaki asal eğrilikleri $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_{n-1}(p)$ olmak üzere $p \in M$ için $H(p) = \dfrac{\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_n(p)}{n-1}$ dir. Her $p \in M$ için $H(p) = 0$ ise M hiperyüzeyine minimaldir, denir. Ayrıca, A şekil operatörünün normunun karesi $\|A\|^2 = \kappa_1^2 + \ldots + \kappa_{n-1}^2$ dir.

Örnek 4.1 [4] $\mathbb{R}^{n+1}$ de v birim vektörü verilsin.

$$S^{n-1}(v) = \{p \in S^n \mid \langle p, v\rangle = 0\}$$

eşitliği ile verilen $S^{n-1}(v)$ kümesi S^n de bir hiperyüzeydir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu : S^{n-1}(v) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\longrightarrow \mu(p) \end{aligned}$$

dönüşümü $S^{n-1}(v)$ boyunca birim normal vektör alanıdır.

$\mu(p)$, $S^{n-1}(v)$ küresinin teğet uzayına dik ve S^n küresinin teğet uzayı içinde bulunan birim vektördür.

S^n , $S^{n-1}(v)$ küresini kapsayan bir küre olduğundan $T_p(S^{n-1}) \subset T_p(S^n)$ dir.

$\overrightarrow{OP}$ vektörü $T_p(S^n)$ uzayına dik olduğundan $T_p(S^{n-1}(v))$ uzayına da dik olur. Kısaca, $\overrightarrow{OP} \in T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$ dir. $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayının boyutu $(n+1)$-, $T_p(S^{n-1}(v))$ uzayının boyutu $(n-1)$- olduğundan $T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$ uzayının boyutu 2 dir. Buna göre,

$\overrightarrow{OP} \in T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$, $v \in T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$, $\mu(p) \in T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$ olduğundan $\{\overrightarrow{OP}, v, \mu(p)\} \subset T_p(S^{n-1}(v))^{\perp}$ dir. Ayrıca, boy $T_p(S^{n-1}(v))^{\perp} = 2$ olduğundan $\{\overrightarrow{OP}, v, \mu(p)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Bu durumda,

$$\mu(p) = \lambda_1 v + \lambda_2 p \tag{4.1.1}$$

olacak biçimde λ_1, λ_2 reel sayıları vardır.

$\|\mu(p)\| = 1$ ve $\langle \overrightarrow{OP}, \mu(p) \rangle = 0$ olduğundan λ_1, λ_2 sayıları tek olarak belirlidir. Şimdi, λ_1, λ_2 reel sayıları bulunarak $\mu(p)$ vektörü hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} | \mu(p)\| = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{\langle \lambda_1 v + \lambda_2 p, \lambda_1 v + \lambda_2 p \rangle} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OP}, \mu(p) \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle p, \lambda_1 v + \lambda_2 p \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 \langle p, v \rangle + \lambda_2 \langle p, p \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

olur. O halde, (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden,

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lambda_2 = 0$$

olarak elde edilir. Bu sayılar (4.1.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu(p) = v$$

olur. $S^{n-1}(v)$ hiperyüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü A_p olmak üzere,

$$A_p : T_p(S^{n-1}(v)) \longrightarrow T_p(S^{n-1}(v))$$

dönüşümü $w \in T_p(S^{n-1}(v))$ için $A_p(w) = -D_w\mu$ eşitliği ile tanımlıdır. Buna göre, $\mu(p) = v$ olduğundan

$A_p(w) = 0 = 0.w$ dir. Buradan, A_p sıfır lineer dönüşümüdür.

Her $p \in S^{n-1}(v)$ için $S^{n-1}(v)$ hiperyüzeyinin asal eğrilikleri $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p)$ olmak üzere

$$\kappa_1(p) = \ldots = \kappa_{n-1}(p) = 0$$

dır. Buradan, $S^{n-1}(v)$ hiperyüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği $H = 0$ dır. Dolayısıyla, $S^{n-1}(v)$ hiperyüzeyi minimaldir.

Açık olarak, $S^{n-1}(v)$ minimal hiperyüzeyi S^n küresinin ekvatorlarıdır. $S^{n-1}(v)$ ekvator yüzeyinin şekil operatörünün normunun karesi sıfırdır.

Örnek 4.2 [4] $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ tamsayısı için $l = (n-1) - k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_{kl} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} : \|x\|^2 = \frac{k}{n-1}\ ,\ \|y\|^2 = \frac{l}{n-1}\} \\ &= S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n-1}}\right) \times S^{(n-1)-k}\left(\sqrt{\frac{l}{n-1}}\right) \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

olsun. Şimdi, M_{kl} hiperyüzeyinin ortalama eğriliği ve şekil operatörünün normunun karesi hesaplanacaktır.

Her $(x,y) \in M_{kl}$ için M_{kl} hiperyüzeyinin (x,y) noktasındaki teğet uzayı

$$T_{(x,y)}M_{kl} = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1} : \langle x, v\rangle = 0,\ \ \langle y, w\rangle = 0\}$$

dır.

$\mu(x,y)$, M_{kl} hiperyüzeyinin birim normal vektörü olmak üzere $\mu(x,y)$, $T_{(x,y)}(S^n)$ teğet uzayı içinde bulunan ve (x,y) vektörüne dik olan birim uzunlukta bir vektördür. $\mu : M_{kl} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dönüşümü M_{kl} hiperyüzeyinin M_{kl} boyunca birim dik vektör alanıdır. Bu durumda,

(x,y) vektörü S^n küresinin birim dik vektörüdür. Aynı zamanda, M_{kl} hiperyüzeyinin de birim dik vektörüdür. Burada, x ve y sırası ile $S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n-1}}\right)$ ve $S^{(n-1)-k}\left(\sqrt{\frac{l}{n-1}}\right)$ hiperyüzeylerinin birim dik vektörleridir. Kısaca,

$$(x,y) \in T_{(x,y)}(M_{kl})^{\perp} = T_x\left(S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n-1}}\right)\right)^{\perp} \oplus T_y\left(S^{(n-1)-k}\left(\sqrt{\frac{l}{n-1}}\right)\right)^{\perp}$$

dir. Ayrıca,

$\mu(x,y) \in T_{(x,y)}(S^n)$ olduğundan, $\langle \mu(x,y),(x,y)\rangle = 0$ dır.

$$(x,y) \in T_{(x,y)}(M_{kl})^{\perp} \tag{4.1.4}$$

$$\mu(x,y) \in T_{(x,y)}(M_{kl})^{\perp} \tag{4.1.5}$$

ve

$$T_{(x,y)}(S^n) = T_{(x,y)}(M_{kl}) + T_{(x,y)}(M_{kl})^{\perp}$$

eşitliği gözönüne alınarak,

$$boy\ T_{(x,y)}(M_{kl})^{\perp} = 1 \tag{4.1.6}$$

bulunur. (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinden;

$$\mu(x,y) = \lambda(x,y)$$

olacak şekilde λ sabiti vardır. Daha açık olarak,

$$(\mu_1(x),\mu_2(y)) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \tag{4.1.7}$$

olacak şekilde λ_1, λ_2 sabiti vardır. λ_1 ve λ_2 sayılarını bulmak için

$$\begin{aligned}
\|\mu(x,y)\|^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{\langle(\lambda_1 x,\lambda_2 y),(\lambda_1 x,\lambda_2 y)\rangle} = 1 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1^2\|x\|^2 + \lambda_2^2\|y\|^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1^2\frac{k}{n-1} + \lambda_2^2\frac{l}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle \mu(x,y),(x,y)\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle (\lambda_1 x, \lambda_2 y),(x,y)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 \|x\|^2 + \lambda_2 \|y\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 \frac{k}{n-1} + \lambda_2 \frac{l}{n-1} = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{l}{k}}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k}{l}}$$

olarak bulunur. λ_1 ve λ_2 nin bu değerleri (4.1.7) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$\mu(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{l}{k}}x, \sqrt{\frac{k}{l}}y\right)$$

elde edilir.

Özel olarak, $(v,0) \in T_{(x,y)}M_{kl}$ vektörü için

$$\begin{aligned} A_{(x,y)}(v,0) &= -D_{(v,0)}\mu \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}(v,0)[\mu_i]\frac{\partial}{\partial x_i}(x,y) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j}(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(x,y) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\sqrt{\frac{l}{k}}v_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(x,y) \\ &= \sqrt{\frac{l}{k}}(v,0) \end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde, $(0,w) \in T_{(x,y)}M_{kl}$ vektörü için $A_{(x,y)}(0,w) = -\sqrt{\frac{k}{l}}(0,w)$ olur. Buradan, M_{kl} hiperyüzeyinin asal eğrilikleri,

$$\kappa_1(x,y) = \kappa_2(x,y) = \ldots = \kappa_k(x,y) = \sqrt{\frac{l}{k}}$$

$$\kappa_{k+1}(x,y) = \ldots = \kappa_{n-1}(x,y) = -\sqrt{\frac{k}{l}}$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$H(x,y) = \frac{1}{k+l}\left(k.-\sqrt{\frac{l}{k}}+l.\sqrt{\frac{k}{l}}\right) = 0$$

$$\|A\|^2 = \kappa_1^2 + \ldots + \kappa_{n-1}^2 = n-1$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.3 [4] M, S^n de hiperyüzey olsun. $M = A(M_{kl})$ olacak şekilde en az bir

$A \in O(n+1)$ ortogonal matrisi varsa M hiperyüzeyine, minimal Clifford hiperyüzeyi denir.

4.2. Temel Eşitlikler

Bu kısımda, tezin esasını oluşturan teoremin ispatlanmasında kullanılacak bazı lemmalar ve küre içindeki Clifford minimal hiperyüzeyleri için verilen karakterizasyonlarda sık sık kullanılan $\triangle A = (n-1)A - \|A\|^2 A$ eşitliği ispatlanacaktır. Bu eşitliği ilk kez Simons [1] makalesinde vermiş ve ispatlamıştır. Perdomo 2005 yılındaki [4] çalışmasında [1] i refere ederek ispatsız olarak vermiş ve makalesinde kullanmıştır. Alias, 2006 yılındaki [13] çalışmasında yine Simons'un [1] çalışmasını refere ederek yukarıdaki eşitliği başka bir yoldan ispatlamış ve Simons formülü olarak bilinen $\frac{1}{2}\triangle\|A\|^2 = \|DA\|^2 + (n - \|A\|^2)\|A\|^2$ eşitliğini elde etmiştir. Şimdi, bu eşitliğin ispatı [13] deki yöntem ile verilecektir.

M, S^n içinde minimal hiperyüzey olmak üzere M hiperyüzeyinin A şekil operatörünün Laplaciyanı $\triangle A(V) = \sum_{i=1}^{n-1}(D^2A)(V,E_i,E_i)$ eşitliği ile tanımlıdır. Ayrıca, DA simetrik olduğundan A tensör alanının ikinci kovaryant diferensiyeli D^2A ilk iki bileşenine göre simetriktir. Yani, her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$D^2A(X,Y,Z) = D^2A(Y,X,Z)$$

dir. Buradan,

$$D^2A(X,Y,Z) = D^2A(X,Z,Y) - R(Z,Y)AX + A(R(Z,Y)X)$$

dir. Her $V \in \chi(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
\triangle A(V) = \sum_{i=1}^{n-1} (D^2A)(V,E_i,E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (D^2A(E_i,E_i,V) - R(E_i,V)AE_i + A(R(E_i,V)E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [(D_V DA)(E_i,E_i) - \langle E_i,AE_i\rangle V + \langle V,AE_i\rangle E_i - \langle AE_i,AE_i\rangle AV + \\
&+ \langle AV,AE_i\rangle AE_i + \langle E_i,E_i\rangle AV - \langle V,E_i\rangle AE_i + \langle AE_i,E_i\rangle A^2V - \langle AV,E_i\rangle A^2E_i] \\
&= iz(D_V(DA)) - (n-1)HV - \|A\|^2AV + (n-1)AV + (n-1)HA^2V \\
&= (n-1)D_V(gradH) - (n-1)HV + ((n-1) - \|A\|^2)AV + (n-1)HA^2V
\end{aligned}
$$

dir. M minimal hiperyüzey olduğundan

$$\triangle A(V) = ((n-1) - \|A\|^2)AV$$

dir. Buradan,

$$\triangle A = ((n-1) - \|A\|^2)A \tag{4.2.8}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
(\triangle\|A\|^2) &= \sum_{i=1}^{n-1} (D^2\|A\|^2)(E_i,E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} D_{E_i}(D\|A\|^2)(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [D_{E_i}((D\|A\|^2)(E_i)) - (D\|A\|^2)(D_{E_i}E_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} D_{E_i}((D\|A\|^2)(E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} D_{E_i}(D_{E_i}\|A\|^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} D_{E_i}(D_{E_i}\langle A,A\rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} D_{E_i}(2\langle D_{E_i}A, A\rangle) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1}(\langle D_{E_i}(D_{E_i}A), A\rangle + \langle D_{E_i}A, D_{E_i}A\rangle) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n-1}(\langle (D^2A)(E_i,E_i), A\rangle + \|D_{E_i}A\|^2) \\
&= 2(\langle \sum_{i=1}^{n-1}(D^2A)(E_i,E_i), A\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\|DA\|^2(E_i)) \\
&= 2(\langle (D^2A), A\rangle + \|DA\|^2)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\triangle\|A\|^2 = 2(\langle \triangle A, A\rangle + \|DA\|^2)$$

dir. Bu eşitlik ve (4.2.8) eşitliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\triangle\|A\|^2 = 2(\langle \triangle A, A\rangle + \|DA\|^2) &= 2(\langle (n-1)A - \|A\|^2A, A\rangle + \|DA\|^2) \\
&= 2((n-1)\langle A, A\rangle - \|A\|^2\langle A, A\rangle + \|DA\|^2) \\
&= 2((n-1)\|A\|^2 - \|A\|^2\|A\|^2 + \|DA\|^2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece,

$$\triangle\|A\|^2 = 2(\|A\|^2((n-1) - \|A\|^2) + \|DA\|^2) \qquad (4.2.9)$$

dır.

Lemma 4.4 [4, Lemma 2] *M, S^n içinde ekvator olmayan minimal hiperyüzey olsun. $\|A\|^2 = n-1$ olması için gerek ve yeter koşul $DA \equiv 0$ olmasıdır.*

İspat. $\|A\|^2 = n-1$ olsun.

(4.2.9) eşitliğinden $\Delta(n-1) = 2((n-1)((n-1)-(n-1)) + \|DA\|^2)$ dir. Buradan, $DA \equiv 0$ olur.

Karşıt olarak, $DA \equiv 0$ ise,

$$(\Delta A)(V) = \sum_{i=1}^{n-1}(D^2A)(V, E_i, E_i)$$

eşitliğinden $\Delta A \equiv 0$ dır. Diğer yandan, (4.2.8) eşitliği ve M nin ekvator olmayan minimal hiperyüzey olduğu kullanılarak $\|A\|^2 = n-1$ olarak bulunur. $\square$

Aşağıdaki teorem bu bölümün esasını oluşturmaktadır. 1969 yılında Lawson [3] ve 1970 yılında Chern, Do Carmo ve Kobayashi [2] birbirlerinden bağımsız olarak bu teoremin ispatını vermişlerdir.

Teorem 4.5 [4, Teorem 3] *M, S^n küresi içinde minimal hiperyüzey olsun. Her $x \in M$ için $\|A\|^2(x) = n-1$ ise M, Clifford minimal hiperyüzeyinin bir alt kümesidir.*

Bu teoremin ispatına geçmeden önce ispatta kullanılan bazı teorem ve lemmalar ispatları ile birlikte verilecektir.

Lemma 4.6 [10, Lemma 3.1] *B, $(n \times n)$- tipinde, hem pozitif hem negatif karakteristik değerleri olan, tersinir ve simetrik bir matris olsun. Eğer $C \in \mathbb{R}^n_n$, $\langle Bx, x\rangle = 0$ eşitliğini sağlayan her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle Cx, x\rangle = 0$ eşitliğini sağlayan ve B ile değişmeli bir matris ise, bu durumda $C = \lambda B$ olacak şekilde en az bir λ reel sayısı vardır.*

İspat. B ve C $(n \times n)$- tipinde değişmeli karesel matrisler olduğundan,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & b_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_n \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_n \end{pmatrix}$$

olarak alınabilir. Burada, $0 < r < n$ için, $b_1, \ldots, b_r$ pozitif reel sayılar, $b_{r+1}, \ldots, b_n$ negatif reel sayılardır. $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal tabanı olmak üzere $1 \le i \le r$ ve $r < j \le n$ için,

$$x_{ij} = \sqrt{-b_j}\, e_i + \sqrt{b_i}\, e_j$$

olsun. Buna göre,

$$Bx_{ij} = \begin{pmatrix} b_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & b_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-b_j} \\ \vdots \\ \sqrt{b_i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_i\sqrt{-b_j} \\ \vdots \\ b_j\sqrt{b_i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle Bx_{ij}, x_{ij} \rangle &= \langle (0,\ldots,b_i\sqrt{-b_j},\ldots,b_j\sqrt{b_i},\ldots,0),(0,\ldots,\sqrt{-b_j},\ldots,\sqrt{b_i},\ldots,0)\rangle \\ &= -b_ib_j + b_jb_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca,

$$Cx_{ij} = \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-b_j} \\ \vdots \\ \sqrt{b_i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_i\sqrt{-b_j} \\ \vdots \\ c_j\sqrt{b_i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve $\langle Cx_{ij}, x_{ij} \rangle = 0$ olduğundan

$$-b_jc_i + b_ic_j = 0$$

dır. Buradan, $c_i = \frac{c_j}{b_j}b_i$ ve $j = n$ için, $c_i = \frac{c_n}{b_n}b_i$ dır.

Diğer yandan, $c_j = \frac{c_i}{b_i}b_j = \frac{1}{b_i}\frac{c_n}{b_n}b_ib_j = \frac{c_n}{b_n}b_j$ olduğundan $C = \frac{c_n}{b_n}B$ dır. □

Teorem 4.7 [10, Teorem 3.1] *B, $(n \times n)$- tipinde simetrik bir matris olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ eşitliği ile verilsin ve $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Bx, x \rangle = 0\} \backslash \{0\} = f^{-1}\{0\}$ olsun. 0 sayısının f fonksiyonunun regüler değeri ve M yüzeyinin minimal hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşul M nin bir Clifford minimal koni olmasıdır.*

İspat. B simetrik matris olmak üzere 0 sayısı $f:\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Bx, x\rangle$ fonksiyonunun regüler değeri ve M minimal hiperyüzey olsun.

$f(x) = \langle Bx, x\rangle$ olduğundan $\nabla f(x) = 2Bx$ dir. 0 sayısı f fonksiyonunun regüler değeri olduğundan, her $x \in M$ için $\nabla f(x) \neq 0$ dır.

Her $x_0 \neq 0$ için $Bx_0 \neq 0$ dır. $\nabla f = 2B$ eşitliğinden $det\, B \neq 0$ dır. Buradan, B tersinir matristir. Ayrıca, $M \neq 0$ olduğundan B matrisinin pozitif ve negatif karakteristik değerleri vardır.

$\|\nabla f(x)\|^2 = \langle 2Bx, 2Bx\rangle = 4\langle Bx, Bx\rangle = 4\langle B^2x, x\rangle$

eşitliğinden ve B^2 nin simetrik matris oluşundan $\nabla \|\nabla f(x)\|^2 = 8B^2x$ eşitliği elde edilir. Ayrıca, f fonksiyonunun Laplaciyanı $\triangle f(x) = 2\, iz(B)$ dir. Teorem (2.71) den M hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul her $x \in M$ için $\|\nabla f\| \triangle f = \frac{1}{2}\langle \nabla \|\nabla f\|^2, \nabla f\rangle$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Buna göre, $\langle Bx, x\rangle = 0$ olacak şekildeki her $x \neq 0$ için,

$$4\langle B^2x, x\rangle 2\, iz(B) = \frac{1}{2}\langle 8B^2x, 2Bx\rangle = \langle 8B^3x, x\rangle$$

eşitliği elde edilir. Burada, $C = iz(B)B^2 - B^3$ olsun. Buna göre, M nin minimal olması için gerek ve yeter koşul $\langle Bx, x\rangle = 0$ eşitliğini sağlayan her x için

$\langle Cx, x\rangle = 0$ olmasıdır.

Lemma 4.6 dan $C = aB$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Yani,

$iz\,(B)B^2 - B^3 = aB$ dir. B nin tersinir olduğu gözönüne alınırsa B matrisinin karakteristik polinom denklemi

$$B^2 - iz(B)B + aI = 0 \qquad (4.2.10)$$

olarak elde edilir. Bu denklemden B nin yalnızca iki karakteristik değeri vardır. B nin hem negatif hem pozitif karakteristik değerleri olduğundan r- tane $r \geq 1$ olmak üzere $\lambda_1 > 0$ karakteristik değerleri ve $(n-r)$- tane $n-r \geq 1$ olmak üzere $\lambda_2 < 0$

karakteristik değerleri olsun. Açık olarak,

$$iz(B) = r\lambda_1 + (n-r)\lambda_2$$

dir. (4.2.10) eşitliğinden, λ_1 ve λ_2 sayıları için,

$$\lambda_1^2 - (r\lambda_1 + (n-r)\lambda_2)\lambda_1 + a = (1-r)\lambda_1^2 - (n-r)\lambda_1\lambda_2 + a = 0$$

$$\lambda_2^2 - (r\lambda_1 + (n-r)\lambda_2)\lambda_2 + a = -(n-r-1)\lambda_2^2 - r\lambda_1\lambda_2 + a = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu eşitlikler düzenlenerek,

$$(1-r)\lambda_1^2 - (n-2r)\lambda_1\lambda_2 + (n-r-1)\lambda_2^2 = 0 \tag{4.2.11}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte $r = 1$ veya $r = n-1$ olması $\lambda_1 = \lambda_2$ olmasını gerektirir. $\lambda_1.\lambda_2 < 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece, $1 < r < n-1$ dir. (4.2.11) eşitliğinde $t = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ olsun. Buna göre, (4.2.11) eşitliği düzenlenerek,

$$(n-r-1)t^2 - (n-2r)t + (1-r) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde $t = 1$ veya $t = \dfrac{r-1}{n-r-1}$ bulunur. $t < 0$ olduğundan $t = 1$ olamaz. O halde, $t = \dfrac{r-1}{n-r-1}$ dir.

Böylece, $\lambda_2 = r-1$ ve $\lambda_1 = n-r-1$ olur. Örnek (2.72) den M, Clifford minimal konidir. □

Lemma 4.8 [4, Lemma 5] *M, S^n küresi içinde ekvator olmayan minimal hiperyüzey olsun. Her $V, W \in \chi(M)$ için $DA(V,W) = 0$ ise bu durumda,*

her $p \in M$ noktası için M nin p noktasından bağımsız ve $\kappa_1.\kappa_2 = -1$ olacak şekilde κ_1 ve κ_2 asal eğrilikleri vardır.

İspat. Her $V, W \in \chi(M)$ için $DA(V,W) = 0$ ve $p_0 \in M$ olsun.

M minimal ve $\|A\|^2 \neq 0$ olduğundan en az bir i, j tamsayı çifti için

$\kappa_i(p_0) \neq \kappa_j(p_0)$ dır.

p_0 noktasının komşuluğundaki her p noktası için V ve W vektör alanları $\|V(p)\| = \|W(p)\| = 1$, $A_p(V(p)) = \kappa_i V(p)$, $A_p(W(p)) = \kappa_j W(p)$ ve $D_V W(p_0) = D_W V(p_0) = 0$ eşitliklerini sağlasın.

Ayrıca, $DA \equiv 0$ olduğundan her $Z, U \in \chi(M)$ için,

$$DA(Z,U) = D_Z A(U) - A(D_Z U)$$

dur. Buradan,

$$D_Z A(U) = A(D_Z U)$$

olur.

Buna göre, $K(p_0)$, M yüzeyinin $V(p_0), W(p_0)$ vektörlerinin gerdiği düzlemin kesitsel eğriliği olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\kappa_j(p_0)K(p_0) &= \kappa_j(p_0)\langle R_{VW}V, W\rangle(p_0) \\
&= \langle R_{VW}V, \kappa_j W\rangle(p_0) \\
&= \langle R_{VW}V, A(W)\rangle(p_0) \\
&= \langle D_{[V,W]}V - [D_V, D_W], A(W)\rangle(p_0) \\
&= \langle D_W D_V V - D_V D_W V, A(W)\rangle(p_0) \\
&= \langle D_W D_V A(V) - D_V D_W A(V), W\rangle(p_0) \\
&= -\langle D_W D_V W - D_V D_W W, A(V)\rangle(p_0) \\
&= \kappa_i(p_0)K(p_0)
\end{aligned}$$

dır. Buradan, $\kappa_i \neq \kappa_j$ olduğundan $K = 0$ dır. Böylece, Gauss denkleminden,

$$0 = 1 + \kappa_i(p_0)\kappa_j(p_0)$$

dır. Yani,

$$\kappa_i(p_0)\kappa_j(p_0) = -1$$

dir. □

Lemma 4.9 [4, Lemma 6] *$M \subset S^n$ bir hiperyüzey, M nin M boyunca birim normal vektör alanı μ ve $\mathbb{R}^{n+1}$ de sabit bir vektör w olsun. Her $x \in M$, $v \in T_x(M)$ için $l_w : M \to \mathbb{R}$, $f_w : M \to \mathbb{R}$ ve $w^T : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ fonksiyonları sırasıyla*

$$l_w(x) = \langle x, w\rangle, \quad f_w(x) = \langle \mu(x), w\rangle \quad ve \quad w^T(x) = w - \langle x, w\rangle x - \langle \mu(x), w\rangle \mu(x)$$

eşitlikleri ile tanımlansın.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} v(l_w) &= \langle w, v\rangle = \langle w^T(x), v\rangle \\ v(f_w) &= -\langle A(w^T(x)), v\rangle \\ D_v w^T(x) &= -l_w(x)v + f_w(x)A_x(v) \end{aligned}$$

dir.

İspat. M içinde $\alpha(0) = x$ ve $\alpha'(0) = v$ olacak şekilde bir $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eğrisi için,

$$\begin{aligned} v(l_w) = \frac{d(l_w \circ \alpha)(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{dl_w(\alpha(t))}{dt}\Big|_{t=0} &= \frac{d\langle \alpha(t), w\rangle}{dt}\Big|_{t=0} \\ &= \langle \alpha'(0), w\rangle \\ &= \langle v, w\rangle \\ &= \langle v, w^T(x)\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v(f_w) = \frac{df_w(\alpha(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\langle \mu(\alpha(t)), w\rangle}{dt}\Big|_{t=0} &= \langle \frac{d\mu(\alpha(t))}{dt}\Big|_{t=0}, w\rangle \\ &= \langle d\mu_x(v), w\rangle \\ &= -\langle A_x(v), w\rangle \\ &= -\langle A_x(v), w^T(x)\rangle \\ &= -\langle A(w^T(x)), v\rangle \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
D_v w^T(x) &= \left(\frac{d(w\circ\alpha)(t)}{dt}|_{t=0}\right)^T \\
&= \left(\frac{dw^T(\alpha(t))}{dt}|_{t=0}\right)^T \\
&= \left(\frac{d(w-\langle\alpha(t),w\rangle\alpha(t)-\langle\mu(\alpha(t)),w\rangle\mu(\alpha(t)))}{dt}|_{t=0}\right)^T \\
&= \left(\frac{d(w-l_w(\alpha(t))\alpha(t)-f_w(\alpha(t))\mu(\alpha(t)))}{dt}|_{t=0}\right)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -l_w(\alpha(0))\alpha'(0)-f_w(\alpha(0))(\mu\circ\alpha)'(0) \\
&= -l_w(x)v-f_w(x)d\mu_x(v) \\
&= -l_w(x)v+f_w(x)A_x(v)
\end{aligned}$$

dir. □

4.3. Teorem (4.5) in İspatı

İspat. M, S^n de bir hiperyüzey ve her $x\in M$ için $\|A\|^2(x)=n-1$ olsun. Bu durumda, Lemma (4.4) ve Lemma (4.8) den $DA\equiv 0$ olduğundan M nin her noktasında $\kappa_i\kappa_j=-1$ olacak şekilde κ_i ve κ_j asal eğrilikleri vardır. Her $v\in T_x(M)$ için,

$$\begin{aligned}
T(v) &= A(v) \\
T(x) &= -\mu(x) \\
T(\mu(x)) &= -x+(\kappa_i+\kappa_j)\mu(x)
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlı $T:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ lineer dönüşümü verilsin. Buna göre,

her $x\in M$ için

$$\mathbb{R}^{n+1}=T_x(M)\oplus\{tx\mid t\in\mathbb{R}\}\oplus\{t\mu(x)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

olduğundan T lineer dönüşümü tek olarak belirlidir.

$S(n+1)$, $(n+1)\times(n+1)$- tipinde simetrik matrislerin uzayı olmak üzere her $x\in M$ için $B(x)\in S(n+1)$ matrisi her $w\in\mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$B(x)w = T(w)$$

eşitliği ile tanımlansın. $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının bir $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ tabanı için,

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \langle T(e_i^T + x_i x + \mu_i\mu), e_j\rangle \\
&= \langle T(e_i^T), e_j\rangle + \langle T(x_i x), e_j\rangle + \langle T(\mu_i\mu), e_j\rangle \\
&= \langle A(e_i^T), e_j\rangle + x_i\langle T(x), e_j\rangle + \mu_i\langle T(\mu), e_j\rangle \\
&= \langle A(e_i^T), e_j\rangle + x_i\langle -\mu(x), e_j\rangle + \mu_i\langle -x + (\kappa_i+\kappa_j)\mu(x), e_j\rangle \\
&= \langle A(e_i^T), e_j\rangle - x_i\mu_j(x) + \mu_i(-x_j + (\kappa_i+\kappa_j)\mu_j(x))
\end{aligned}$$

olmak üzere $B(x)=[b_{ij}]$ dir. Burada, x_i ve μ_i sırasıyla $x_i(x)=\langle x, e_i\rangle$ ve $\mu_i(x)=\langle\mu(x), e_i\rangle$ eşitlikleri ile belirli olan M den $\mathbb{R}$ ye fonksiyonlar ve e_i^T, e_i vektörünün $T_x(M)$ üzerindeki dik izdüşümüdür. Açık olarak, $x_i : M\to\mathbb{R}$ ve $\mu_i : M\to\mathbb{R}$ fonksiyonları Lemma (4.9) da tanımlanan l_{e_i} ve f_{e_i} fonksiyonlarıdır.

$B(x)=[b_{ij}]$ matrisi M den $S(n+1)$ uzayına bir diferensiyellenebilir dönüşüm tanımlar. Şimdi, her $v\in T_x(M)$ için $v(b_{ij})=0$ olduğu gösterilerek B diferensiyellenebilir dönüşümünün sabit olduğu gösterilecektir. $A(v)=\kappa_1 v$ veya $A(v)=\kappa_2 v$ olduğundan ilk olarak $A(v)=\kappa_1 v$ olduğu durum gözönüne alınsın. Açık olarak, $v(b_{ij})=0$ olduğunu göstermek için

$$v(\langle A(e_i^T), e_j\rangle - x_i\mu_j + \mu_i(-x_j + (\kappa_i+\kappa_j)\mu_j)) = 0$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$
\begin{aligned}
v\langle A(e_i^T), e_j\rangle &= v\langle A(e_i^T), e_j^T\rangle \\
&= \langle A(D_v e_i^T), e_j^T\rangle + \langle A(e_i^T), D_v e_j^T\rangle \\
&= \langle A(-l_{e_i}(x)v + f_{e_i}(x)A_x(v)), e_j^T\rangle \\
&+ \langle A(e_i^T), -l_{e_j}(x)v + f_{e_j}(x)A_x(v))\rangle \\
&= \langle A(-\langle x, e_i\rangle v + \langle \mu(x), e_i\rangle A_x(v)), e_j^T\rangle \\
&+ \langle A(e_i^T), -\langle x, e_j\rangle v + \langle \mu(x), e_j\rangle A_x(v)\rangle \\
&= \langle A(-x_i v + \mu_i A(v)), e_j\rangle + \langle e_i, -x_j A(v) + \mu_j A^2(v)\rangle \\
&= \langle A(-x_i v), e_j\rangle + \langle A(\mu_i A(v)), e_j\rangle \\
&+ \langle e_i, -x_j A(v)\rangle + \langle e_i, \mu_j A^2(v)\rangle \\
&= -x_i\kappa_1\langle v, e_j\rangle + \mu_i\kappa_1^2\langle v, e_j\rangle - x_j\kappa_1\langle v, e_i\rangle + \mu_j\kappa_1^2\langle e_i, v\rangle \\
&= -\kappa_1 x_i\langle v, e_j\rangle + \kappa_1^2\mu_i\langle v, e_j\rangle - \kappa_1 x_j\langle v, e_i\rangle + \kappa_1^2\mu_j\langle e_i, v\rangle
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v(x_i\mu_j) &= v(x_i)\mu_j + x_i v(\mu_j) \\
&= \langle e_i, v\rangle\mu_j + x_i(-\langle A(e_j), v\rangle) \\
&= \langle e_i, v\rangle\mu_j + x_i(-\langle e_j, A(v)\rangle) \\
&= \langle e_i, v\rangle\mu_j - \kappa_1 x_i\langle v, e_j\rangle
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
v(\mu_i x_j) &= v(\mu_i)x_j + \mu_i v(x_j) \\
&= -\langle A(e_i), v\rangle x_j + \mu_i\langle e_j, v\rangle \\
&= -\kappa_1 x_j\langle v, e_i\rangle + \mu_i\langle e_j, v\rangle
\end{aligned}
$$

dir.

Son olarak,

$$
\begin{aligned}
v((\kappa_1+\kappa_2)\mu_i\mu_j) &= (\kappa_1+\kappa_2)v(\mu_i\mu_j)\\
&= (\kappa_1+\kappa_2)(v(\mu_i)\mu_j+\mu_i v(\mu_j))\\
&= (\kappa_1+\kappa_2)(-\langle A(e_i),v\rangle\mu_j+\mu_i(-\langle A(e_j),v\rangle))\\
&= (\kappa_1+\kappa_2)(-\langle A(v),e_i\rangle\mu_j+\mu_i(-\langle A(v),e_j\rangle))\\
&= -(\kappa_1+\kappa_2)(\kappa_1\langle v,e_i\rangle\mu_j+\kappa_1\mu_i\langle v,e_j\rangle)\\
&= -(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1(\langle e_i,v\rangle\mu_j+\mu_i\langle v,e_j\rangle)\\
&= -\kappa_1^2(\langle e_i,v\rangle\mu_j+\mu_i\langle v,e_j\rangle)-\kappa_1\kappa_2(\langle e_i,v\rangle\mu_j+\mu_i\langle v,e_j\rangle)\\
&= -\kappa_1^2(\langle e_i,v\rangle\mu_j+\mu_i\langle v,e_j\rangle)+\langle e_i,v\rangle\mu_j+\mu_i\langle v,e_j\rangle
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
v(b_{ij}) &= v(\langle A(e_i^T),e_j\rangle-x_i\mu_j+\mu_i(-x_j+(\kappa_1+\kappa_2)\mu_j))\\
&= v\langle A(e_i^T),e_j\rangle-v(x_i\mu_j)+v(-\mu_i x_j)+v((\kappa_1+\kappa_2)\mu_i\mu_j)\\
&= -\kappa_1 x_i\langle v,e_j\rangle+\kappa_1^2\mu_i\langle v,e_j\rangle-\kappa_1 x_j\langle v,e_i\rangle+\kappa_1^2\mu_j\langle e_i,v\rangle\\
&- \langle e_i,v\rangle\mu_j+\kappa_1 x_i\langle v,e_j\rangle+\kappa_1 x_j\langle v,e_i\rangle-\mu_i\langle e_j,v\rangle\\
&- \kappa_1^2\mu_j\langle e_i,v\rangle-\kappa_1^2\mu_i\langle v,e_j\rangle+\mu_j\langle e_i,v\rangle+\mu_i\langle v,e_j\rangle\\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Benzer olarak, $A(v)=\kappa_2 v$ durumu için de B diferensiyellenebilir dönüşümünün sabit olduğu gösterilebilir.

Buradan, her $x\in M$ için $B(x)=B_0$ ve $M_0=\{x\in S^n \mid \langle B_0x,x\rangle=0\}$ olmak üzere $M\subset M_0$ dır. B_0 tersinir matris olduğundan M_0 bir hiperyüzeydir. Ayrıca, M minimal olduğundan M_0 da minimaldir. O halde Teorem (4.7) den M_0 Clifford minimal hiperyüzeydir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Simons, J. 1968. Minimal varieties in Riemannian manifolds. **Ann. of Math.**, 88: 62-105.

[2] Chern, S.S, DoCarmo, M., Kobayashi, S. 1970. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form constant length. **Functional Analysis and Related Fields. Proc. Conf. M. Stone**, pp. 59-75, Germany.

[3] Lawson, H.B. 1969. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. **Ann. of Math.**, 89: 187-197.

[4] Perdomo, O. 2005. Another proof for the rigidity of Clifford minimal hypersurfaces of S^n. **Matematicas: Ensenanza Universitaria**, 8(2): 13-18.

[5] Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometry. Nobel Yayın Dağıtım, 440s, Ankara.

[6] O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relavity. Academic Press, 456s, London.

[7] Do Carmo, M. 1992. Riemannian Geometry. Mathematics: Theory and Applications. Birkhauser, 300s, Boston.

[8] Bootby, W.M. 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, 430s, London.

[9] Alias, L.J., Garcia-Martinez, C. 2010. On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms. **Journal of Mathematical Anal. and Applications**, 363(2):579-587.

[10] Perdomo, O. 2004. Minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ as regular values of a function. **Rev.Integr. Temas Math.**, 22(1-2):1-6

[11] Alias, L.J., Brasil Jr, A., Perdomo, O. 2008. A characterization of quadric constant mean curvature hypersurfaces of spheres. **Journal of Mathematical Anal. and Applications**, 18: 687-703.

[12] Deshmukh, S. 2010. Clifford hypersurfaces in a unit sphere. **Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis**, 26: 91-98.

[13] Alias, L.J. 2006. On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres. **Revista de La Union Matematica Argentina**, 47(2): 39-61.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Dilek AÇIKGÖZ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Keçiören, 12.11.1987

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
 -SCI
 -Diğer
b) Bildiriler
 -Uluslararası
 -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Adnan Menderes Üniversitesi,	
	:	Fen-Edebiyat Fak. Matematik Böl.	2009 - ...

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	dilek.acikgoz@adu.edu.tr
Tarih	:	