**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**2012-YL-021**

# SONSUZ SİMETRİK GRUPLAR

**Ayşe BÜTE**

**Tez Danışmanı:**
**Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT**

**AYDIN**

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**
**AYDIN**

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Ayşe BÜTE tarafından hazırlanan Sonsuz Simetrik Gruplar başlıklı tez, 18.07.2012 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

| | Ünvanı Adı Soyadı | Kurumu | İmzası |
|---|---|---|---|
| Başkan : | Prof. Dr. Hatice KANDAMAR | Adnan Menderes Üniv. | |
| Üye : | Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT | Adnan Menderes Üniv. | |
| Üye : | Yrd. Doç. Dr. Kıvanç ERSOY | Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniv. | |
| Üye : | | | |
| Üye : | | | |

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun ...................... sayılı kararıyla ....................... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cengiz ÖZARSLAN
Enstitü Müdürü

**ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**
**AYDIN**

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

18.07.2012

Ayşe BÜTE

# ÖZET

## SONSUZ SİMETRİK GRUPLAR

Ayşe BÜTE

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT
2012, 45 sayfa

Bu tezde; Otto H. Kegel'in "Regular Limits of Infinite Symmetric Groups" makalesi ile Otto H. Kegel ve Bertram A. F. Wehrfritz'in "Locally Finite Groups" kitabının "Universal Groups" ünitesi işlenmiştir. Ayrıca bu konularla ilişkili olarak Roger C. Lyndon ve Paul E. Schupp'un "Combinatorial Group Theory" kitabından HNN-genişlemeleri ile ilgili bölümü okunmuştur.

Bir $G$ grubunun sonlu üreteçli her altgrubu sonlu ise $G$'ye yerel sonlu grup denir. $G$ yerel sonlu grup olmak üzere bu grup; her sonlu grubun bir kopyasını içeriyorsa ve izomorfik olan sonlu iki altgrubu eşlenik oluyorsa $G$'ye evrensel grup denir. P. Hall, "Some Construction for Locally Finite Groups" adlı makalesinde evrensel yerel sonlu grupların varlığını ve genel özelliklerini vermiştir. P. Hall, herhangi bir kardinal için o kardinalitede evrensel bir grup bulunduğunu ve iki sayılabilir evrensel grubun izomorfik olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca evrensel grupların basit ve her sayılabilir yerel sonlu grubun izomorfik bir kopyasını içerdiğini ispatlamıştır.

"Embedding Theorems for Groups" [5] adlı makalede her sayılabilir sonsuz mertebeli grubun, sonsuz mertebeli iki eleman tarafından üretilen bir grubun içine gömüldüğü kanıtlanmıştır. Ayrıca bu teoreminde yardımıyla, iki üreteçli $2^{\aleph_0}$ tane eşyapılı olmayan grup olduğu kanıtlanmıştır.

$G$ bir grup ve $A$ ile $B$, $G$'nin iki eş yapılı altgrubu olsun. $\phi$, $A$'dan $B$'ye bir izomorfizma olmak üzere, $H = \langle G, t \mid \forall \text{a} \in \text{A için } \phi(a) = t^{-1}at \rangle$ şeklinde tanımlanan $H$ grubuna $G$'nin HNN-genişlemesi denir.

$\{\kappa_\nu\}$ sonsuz kardinallerin, tüm $\nu$ ordinalleri için $\kappa_{\nu+1} = 2^{\kappa_\nu}$ ve $\lambda$ limit ordinali için $\kappa_\lambda = \sup\{\kappa_\nu : \nu < \lambda\}$ olan bir dizisi olsun. Her $\nu$ ordinali için $S_{\nu+1} := Sym(S_\nu)$ ve eğer $\lambda$ bir limit ordinal ise $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ olan gruplarının bir $\{S_\nu\}$ dizisi olsun. Burada $\rho_\nu : S_\nu \hookrightarrow Sym(S_\nu)$ sağ düzenli temsil olmak üzere $\{(S_\nu, \rho_\nu) \mid \nu < \lambda\}$ direkt sistemini elde ederiz. Bu direkt sistemden de $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ direkt limit grubu tanımlarız. Bu $S_\lambda$ limit grubuna düzenli limit

grubu denir.( [1]) O. H. Kegel bu düzenli limit gruplarının temel özelliklerini kanıtlamıştır. $\lambda$ limit ordinal olmak üzere, $S_\lambda$ düzenli limit grubunda $B \subseteq S_\nu$ olacak şekilde $\nu < \lambda$ varsa $B$ altgrubuna $S_\lambda$'nın sınırlı altgrubu denir. Bölüm 4'te sınırlı altgrupların temel özellikleri verilmiştir.

$G$ bir grup ve $H$, $G$'yi içeren bir üst grup olsun. Eğer $G$ üzerindeki eşitlik ve eşitsizliklerden oluşan her $\Xi$ sonlu sisteminin $H$'de çözülebilir olduğu durumlarda $G$'de de bir çözümü varsa $G$ grubuna $H$ grubu içinde varlıksal kapalı grup denir. Eğer $G$, kendisini içeren bütün üst gruplar içinde varlıksal kapalı ise $G$ grubu varlıksal kapalıdır. $S_\lambda$ düzenli limit grubu, homojen ve sonlu üreteçli her grubun bir kopyasını altgrup olarak içerdiğinden varlıksal kapalı bir gruptur.

Mertebesi kendisinden küçük eşit olan bütün grupların izomorfik kopyasını içeren gruba evrensel grup denir. Ayrıca her sonsuz limit ordinal $\lambda$ için $S_\lambda$ düzenli limit grubu evrenseldir.

**Anahtar Sözcükler**
Sonsuz simetrik gruplar, varlıksal kapalı gruplar, evrensel gruplar, HNN-genişlemeleri

## ABSTRACT

## INFINITE SYMMETRIC GROUPS

Ayşe BÜTE

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÖZYURT
2012, 45 pages

This thesis is a survey of O. H. Kegel's paper "Regular Limits of Infinite Symmetric Groups". Also we read "Universal Groups" in Locally Finite Groups book, by written Otto H. Kegel and Bertram A. F. Wehrfritz and HNN-extension in "Combinatorial Group Theory" by written Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp.

A group $G$ is called locally finite group if every finitely generated subgroup is a finite. A locally finite group $G$ is called universal if every finite group can be embedded into $G$ and any two isomorphic finite subgroups of $G$ are in $G$. Existence and basic properties of universal locally finite group are given by P. Hall's paper "Some Construction for Locally Finite Groups". P. Hall proved that there exist universal groups of arbitrary cardinal and also any two countable universal groups are isomorphic. And also he proved that universal group is simple and contains an isomorphic copy of countable locally finite groups.

In paper "Embedding Theorems for Groups" [5] proved that every countable group can be embedded in a group generated by two elements of infinite order. Also by this theorem, it is proved that there are $2^{\aleph_0}$ non isomorphic 2-generator groups.

Let G be a group and let $A$ and $B$ be subgroups of $G$ with $\phi : A \to B$ an isomorphism. The group $H = \langle G, t \mid \phi(a) = t^{-1}at, a \in A \rangle$ is called an HNN-extension of $G$.

A sequence $\{\kappa_\nu\}$ of infinite cardinals with $\kappa_{\nu+1} = 2^{\kappa_\nu}$ for all ordinals $\nu$ and $\kappa_\lambda = \sup\{\kappa_\nu : \nu < \lambda\}$ for limit ordinal $\lambda$. Also a sequence $\{S_\nu\}$ of groups with $S_{\nu+1} := \mathrm{S}ym(S_\nu)$ for every ordinal $\nu$ and $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ if $\lambda$ is a limit ordinal. We have the set $\{(S_\nu, \rho_\nu) \mid \nu < \lambda\}$ is a direct system where $\rho_\nu : S_\nu \hookrightarrow \mathrm{S}ym(S_\nu)$ is a right regular representation. We call the set $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ is a direct limit group of the direct system. $S_\lambda$ is called regular limit group. [1] O. H. Kegel proved the basic properties of these regular limit groups. $\lambda$ be a limit ordinal and a subgroup $B$ of $S_\lambda$ is called a bounded subgroup if $B \subseteq S_\nu$ for some $\nu < \lambda$. In chapter 4 of this thesis, some properties of bounded subgroups are examined.

$G$ be a group and $H \supseteq G$ be a overgroup. The group $G$ is existentially closed group in the over group $H$ if every finite system $\Xi$ of equations and inequations over $G$ that is soluble in $H$ has a solution in $G$. The group $G$ is existentially closed if it is existentially closed in every overgroup. The regular limit group $S_\lambda$ is a existentially closed group because it is a homogeneous and contains copy of every finitely generated group.

The group $U$ is called universal if every group $G$ with $|G| \leq |U|$ is isomorphic to a subgroup of $U$. Also for every infinite limit ordinal $\lambda$ the regular limit group $S_\lambda$ is universal.

**Key Words**
Infinite symmetric groups, existentially closed groups, universal groups, HNN-extensions

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam değerli bilim insanı sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZYURT'a ve tezin oluşturulmasında her türlü desteği veren sayın Prof. Dr. Mahmut KUZUCUOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe BÜTE

## İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Grup teorisinde; direkt limit, semidirekt çarpım ve wreath çarpım bilinen gruplardan yeni gruplar elde etmekte kullanılan temel araçlardır. Bölüm 2'de çalışmamızda kullanacağımız bu araçların tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca yine bu bölümde [11]'de yer alan evrensel grup ile ilgili tanım ve teoremler incelenmiştir. Evrensel grupta, sonlu ve eşyapılı iki altgrup evrensel grup içinde eşleniktir. P. Hall, sayılabilir iki evrensel grubun birbirine eşyapılı olduğunu göstermiştir. Daha sonra P. Hall her sonsuz yerel sonlu grubu, evrensel grubun içine gömülebileceğini göstermiştir.

Bölüm 3'te Joseph J. Rotman'ın "An Introduction to the Theory of Groups" kitabında yer alan serbest grup ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Ardından Roger C. Lyndon ve Paul E. Schupp'un "Combinatorial Group Theory" kitabında yer alan serbest çarpım, HNN genişlemeleri ve gömme ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Bölüm 4'te Otto H. Kegel'in "Regular Limits of Infinite Symmetric Groups" makalesinde tanımlanan düzenli limit grubunu ve bu grup ile ilgili makalede ispatlanan bazı teoremlere yer verilmiştir. $\{\kappa_\nu\}$ sonsuz kardinallerin tüm $\nu$ ordinalleri için $\kappa_{\nu+1} = 2^{\kappa_\nu}$ ve $\lambda$ limit ordinalleri için $\kappa_\lambda = \sup\{\kappa_\nu : \nu < \lambda\}$ olan bir dizisi olsun. Bu çalışmamızda, her $\nu$ ordinali için $S_{\nu+1} := Sym(S_\nu)$ ve eğer $\lambda$ bir limit ordinal ise $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ olan grupların $\{S_\nu\}$ dizileri ile uğraşacağız. Burada $\rho_\nu : S_\nu \hookrightarrow Sym(S_\nu)$ sağ düzenli temsil olmak üzere $\{(S_\nu, \rho_\nu) \mid \nu < \lambda\}$ direkt sistemi elde edilir. Bu direkt sistemden de $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ direkt limit grubu tanımlanır. Bu $S_\lambda$ limit grubuna düzenli limit grubu denir.

Burada dikkat edilmesi gereken noktalardan birisi düzenli limit grubuna başlarken sonsuz kardinaller ve kardinalitesi sonsuz olan bir grupla başladık.

Ancak başlangıçta kardinalitesi 3'ten büyük sonlu bir grupla başlayıp ilk sonsuz limit ordinalde dursaydık elde ettiğimiz düzenli limit grubu P. Hall tarafından incelenen evrensel grup olacaktı. Buradaki bu benzerlik düzenli limit grupları ile P.Hall evrensel grubunun özelliklerinin benzer olması ve benzer teoremlerin kanıtlanabileceği düşüncesini oluşturmaktadır. Bu düşünce ile Otto H. Kegel düzenli limit gruplarını temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca bu bölümde [1]'de yer alan, $S_\lambda$ düzenli limit grubunun sınırlı altgruplarının yapısını ve $S_\lambda$ grubunun, varlıksal kapalı ve evrensel grup olma yapısını inceleyeceğiz.

# 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

## 2.1. Direkt Limit

$\Lambda$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $\lambda \leq \nu$, $\mu \leq \nu$ olacak şekilde bir $\nu \in \Lambda$ varsa bu $\Lambda$ kümesine *yönlenmiş küme* denir. $\Lambda$ yönlenmiş bir küme olmak üzere $\{G_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ gruplarının ailesini ve bu aile üzerinde $\lambda \leq \mu$ olmak üzere $\alpha_\lambda^\mu : G_\lambda \to G_\mu$ homomorfizmalarını alalım. Bu homomorfizmalar aşağıda belirtilen koşulları sağlasın:

**(i)** $\alpha_\lambda^\lambda$, $G_\lambda$ üzerinde birim dönüşümdür.

**(ii)** $\lambda \leq \mu \leq \nu$ olduğunda $\alpha_\lambda^\mu \alpha_\mu^\nu = \alpha_\lambda^\nu$ dir.

O zaman $\mathbf{D} = \{G_\lambda,\ \alpha_\lambda^\mu | \lambda \leq \mu \in \Lambda\}$ kümesine, bu grupların bir *direkt sistemi* denir. $G_\lambda$ grupları ayrık olsun. Yani $\lambda \neq \mu$ ise $G_\lambda \cap G_\mu = \emptyset$ koşulu sağlansın. Eğer ayrık değillerse de her $G_\lambda$ grubunun bir izomorfik kopyası alınarak ayrık bir sistem oluşturabiliriz. Sonuçta $g_\lambda$ her zaman $G_\lambda$'nın bir elemanını gösterecektir. Şimdi $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ birleşim kümesi üzerinde bir $\sim$ bağıntısı tanımlayalım. $g_\lambda$, $\bar{g}_\mu \in U$ olmak üzere $g_\lambda \sim \bar{g}_\mu$ olması için gerek ve yeter koşul $g_\lambda^{\alpha_\lambda^\nu} = \bar{g}_\mu^{\alpha_\mu^\nu}$ olacak şekilde bir $\nu \geq \lambda$, $\mu$ olmasıdır. Tanımlanan bu $\sim$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır:

- $\alpha_\lambda^\lambda$, $G_\lambda$ üzerinde birim dönüşüm olduğundan $g_\lambda \sim g_\lambda$ dır.
- $g_\lambda \sim \bar{g}_\mu$ olsun. Bu durumda $g_\lambda^{\alpha_\lambda^\nu} = \bar{g}_\mu^{\alpha_\mu^\nu}$ olacak şekilde bir $\nu \geq \lambda$, $\mu$ vardır. O zaman $\sim$'nın tanımından $\bar{g}_\mu \sim g_\lambda$ elde edilir.
- $g_\lambda \sim \bar{g}_\mu$ ve $\bar{g}_\mu \sim \bar{\bar{g}}_\nu$ olsun. Bu durumda $g_\lambda^{\alpha_\lambda^{r_1}} = \bar{g}_\mu^{\alpha_\mu^{r_1}}$ ve $\bar{g}_\mu^{\alpha_\mu^{r_2}} = \bar{\bar{g}}_\nu^{\alpha_\nu^{r_2}}$ olacak şekilde $r_1 \geq \lambda, \mu$ ve $r_2 \geq \mu, \nu$ vardır. İlk eşitliğin her iki yanına $\alpha_{r_1}^{r_2}$ uygulanırsa $g_\lambda^{\alpha_\lambda^{r_2}} = \bar{g}_\mu^{\alpha_\mu^{r_2}} = \bar{\bar{g}}_\nu^{\alpha_\nu^{r_2}}$ olacağından $g_\lambda \sim \bar{\bar{g}}_\nu$ bulunur.

Ayrıca $g_\lambda$'nın denklik sınıfına $[g_\lambda]$ diyelim. $D$ ile tüm bu denklik sınıflarının kümesini gösterelim. Şimdi $g_\lambda \sim \bar{g}_{\bar{\lambda}}$ ve $g_\mu \sim \bar{g}_{\bar{\mu}}$ olsun. O zaman $\Lambda$ yönlenmiş küme olduğundan, $g_\lambda^{\alpha_\lambda^\nu} = \bar{g}_{\bar{\lambda}}^{\alpha_{\bar{\lambda}}^\nu}$ ve $g_\mu^{\alpha_\mu^\nu} = \bar{g}_{\bar{\mu}}^{\alpha_{\bar{\mu}}^\nu}$ olacak şekilde $\Lambda$'nın bir $\nu \geq \lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}$ elemanını bulabiliriz. Buradan $g_\lambda^{\alpha_\lambda^\nu} g_\mu^{\alpha_\mu^\nu} = \bar{g}_{\bar{\lambda}}^{\alpha_{\bar{\lambda}}^\nu} \bar{g}_{\bar{\mu}}^{\alpha_{\bar{\mu}}^\nu}$ olduğundan $D$ üzerinde tanımlanan

$$\nu \geq \lambda, \mu \text{ olmak üzere } [g_\lambda][g_\mu] = [g_\lambda^{\alpha_\lambda^\nu} g_\mu^{\alpha_\mu^\nu}]$$

iyi tanımlıdır. $D$, üzerinde tanımlanan bu çarpma işlemi ile bir grup yapısına sahiptir. Ayrıca $1_D = [1_{G_\lambda}]$ ve $[g_\lambda]^{-1} = [g_\lambda^{-1}]$ dir. $\theta_\lambda : G_\lambda \to D$, $\theta_\lambda(g_\lambda) = [g_\lambda]$ şeklinde tanımlanan $\theta_\lambda$ bir homomorfizmadır. Bu takdirde $\{D,\ \theta_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ kümesine **D** direkt sisteminin bir direkt limiti denir. $\lim_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ şeklinde gösterilir.

**Lemma 2.1** *$\bar{G}_\lambda$, $\theta_\lambda : G_\lambda \to D$ homomorfizmasının görüntüsü olsun. ($\theta_\lambda(G_\lambda) = \bar{G}_\lambda$). O zaman*

**(i)** $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda$.

**(ii)** $\lambda \leq \mu$ *ise* $\bar{G}_\lambda \leq \bar{G}_\mu$.

**(iii)** *Tüm $\alpha_\lambda^\mu$'ler monomorfizma olsun. Bu takdirde $\theta_\lambda$'lar monomorfizma ve $G_\lambda \cong \bar{G}_\lambda$ dır.*

**İspat.**

**(i)** $D$, yukarıda tanımlanan $\sim$ bağıntısı ile elde edilen tüm denklik sınıflarının kümesi olduğundan $D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda$.

**(ii)** $[g_\lambda] \in \bar{G}_\lambda$ için $[g_\lambda] = [g_\lambda^{\alpha_\lambda^\mu}] \in \bar{G}_\mu$ dır.

**(iii)** $\ker \theta_\lambda = \{g_\lambda | [g_\lambda] = 1_D = [1_{G_\lambda}]\}$ dır. O zaman $g_\lambda \in \ker \theta_\lambda$ alınırsa $[g_\lambda] = 1_D$ olur. Buradan $\mu \geq \lambda$ için $g_\lambda^{\alpha_\lambda^\mu} = 1_{G_\mu}$ olur. Sonuç olarak $\alpha_\lambda^\mu$ monomorfizma olduğundan, $g_\lambda = 1_{G_\lambda}$ bulunur. Dolayısıyla $\theta_\lambda$ monomorfizmadır. Buradan hareketle $\theta_\lambda(G_\lambda) = \bar{G}_\lambda$ ile $G_\lambda$ izomorfiktir.

$\square$

**Örnek 2.2** *$p$ bir asal sayı olmak üzere $G_i = \langle x_i \rangle$, mertebesi $p^i$ olan bir devirli p-grup olsun. $\sigma_i : G_i \to G_{i+1}$ monomorfizması, $x_i^{\sigma_i} = x_{i+1}^p$ şeklinde tanımlansın. $i < j$ olmak üzere $\alpha_i^j = \sigma_i\sigma_{i+1}...\sigma_{j-1}$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\alpha_i^i$, $G_i$ üzerinde birim dönüşüm olsun. $i < j$ ve $j < k$ olmak üzere $\alpha_i^j\alpha_j^k = \sigma_i...\sigma_{j-1}\sigma_j...\sigma_{k-1}$ ve $\mathbb{N}$ yönlenmiş küme olduğundan $\alpha_i^j\alpha_j^k = \alpha_i^k$ elde edilir. Bu takdirde $\{G_i,\ \alpha_i^j\}$ bir direkt sistemdir. Bu direkt sistemin limiti, mertebeleri $p, p^2, ..$ olmak üzere devirli p-gruplarının birleşimi olan bir sonsuz, değişmeli p-gruptur. Elde edilen bu gruba, $C_{p^\infty}$ grubu denir.*

## 2.2. Semidirekt Çarpım

$G$ bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. Ayrıca $G = HN$ ve $H \cap N = 1$ olan bir $H$ altgrubu varsa $G$'ye $H$ ve $N$'nin iç semidirekt çarpımı denir. $G = H \ltimes N$ ya da $G = N \rtimes H$ ile gösterilir. $G$'nin her elemanı $h \in H$ ve $n \in N$ olmak üzere $hn$ şeklinde tek türlü ifade edilir. Örneğin $D_{2n}$ dihedral grubu, mertebeleri $n$ ve 2 olan devirli grupların semidirekt çarpımıdır. $H$'nin bir elemanı ile $N$'de eşleniği, $N$'nin bir $h^\alpha$ otomorfizmasını ve $H$'den $\mathrm{Aut}\, N$'ye bir $\alpha : h \mapsto h^\alpha$ homomorfizmasını verir. Ayrıca $G$, $H$ ve $N$'nin direkt çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha$'nın sıfır homomorfizması olmasıdır.

Tersine, $\alpha : H \to \mathrm{Aut}\, N$'ye bir homomorfizma olacak şekilde $H$ ve $N$ altgrupları verilsin. O zaman $G = H \ltimes_\alpha N$ (ya da $N \rtimes_\alpha H$) dış semidirekt çarpımı, tüm $(h,n)$, $h \in H$, $n \in N$ ikililerinin kümesidir. Ayrıca $G$,

$$(h_1,n_1)(h_2,n_2) = (h_1h_2, n_1^{h_2^\alpha} n_2)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi altında bir gruptur. Bu $G$ grubunun birim elemanı $(1_H, 1_N)$ ve herhangi bir $(h,n)$ elemanının tersi $(h,n)^{-1} = (h^{-1}, (n^{-1})^{(h^{\alpha})^{-1}})$ dir.

Şimdi $h \mapsto (h, 1_N)$ ve $n \mapsto (1_H, n)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar, sırasıyla $H$'den $G$'ye ve $N$'den $G$'ye monomorfizmadır. Ayrıca sırasıyla $H^*$ ve $N^*$ bu fonksiyonların görüntüleri olsun. O zaman $H \cong H^*$ ve $N \cong N^*$ dir. Dolayısıyla $H^* \cap N^* = 1$ ve $(h, 1_N)(1_H, n) = (h,n)$ olduğundan $G = H^*N^*$ elde edilir. Ayrıca $(h, 1_N)^{-1}(1_H, n)(h, 1_N) = (1_H, n^{h^{\alpha}})$ olduğundan $N^* \lhd G$ dir. Bu durumda G, $H^*$ ve $N^*$'ın iç semidirekt çarpımıdır. $(h, 1_N)$ ile $N^*$'ın eşleniği, $h^{\alpha}$ otomorfizmasını belirler. Genellikle $H$ ile $H^*$ ve $N$ ile $N^*$'nin arasında ayrım yapılmaz. Ayrıca $G$, $H$ ve $N$'nin iç semidirekt çarpımı olarak düşünülebilir.

## 2.3. Wreath Çarpım

$A$ ve $B$ iki grup olsun. $A^{[B]}$, $B$'den $A$'ya olan tüm fonksiyonların kümesini göstersin. Bu küme,

$$f, g \in A^{[B]},\ b \in B \text{ için } (fg)(b) = f(b)g(b)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi altında bir gruptur. $A^{[B]}$ grubunun, birim elemanı her $b \in B$ için $g(b) = 1_A$ olan $g$ fonksiyonu ve bir $f$ elemanının tersi de $b \in B$ için $f^{-1}(b) = f(b)^{-1}$ olan $f^{-1}$ dir. $A^{(B)}$, $A^{[B]}$'nin supp$(f)$ kümesi sonlu olan $f$ fonksiyonlarının oluşturduğu altgrubu göstersin. Her $f \in A^{[B]}$, $b \in B$ için bir $f^b$ fonksiyonunu,

$$x \in B \text{ olmak üzere } f^b(x) = f(bx)$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca $x \in B$ için, $f^{1_B}(x) = f(1_B x) = f(x)$ olduğundan $f^{1_B} = f$ ve $f^{(b_1 b_2)}(x) = f(b_1 b_2 x) = f^{b_1}(b_2 x) = (f^{b_1})^{b_2}(x)$ olduğundan $f^{(b_1 b_2)} = (f^{b_1})^{b_2}$ dir. Dolayısıyla bu $f^b$ fonksiyonu, $B$'nin $A^{[B]}$ ve $A^{(B)}$ üzerinde bir etkisini tanımlar. Bu takdirde

$$f_1,\ f_2 \in A^{[B]} \text{ ya da } A^{(B)},\ b_1,\ b_2 \in B \text{ için } (b_1, f_1)(b_2, f_2) = (b_1.b_2, f_1^{b_2} f_2)$$

şeklinde çarpma işlemini tanımlayalım. $B \ltimes A^{[B]}$ ve $B \ltimes A^{(B)}$ kümeleri yukarıda tanımlanan bu çarpma işlemi altında bir grup yapısına sahiptir. Ayrıca

$$(b, f(x))(1_B, 1_{A^{[B]}}(x)) = (b1_B, f^{1_B}(x)1_{A^{[B]}}(x)) = (b, f(x)1_{A^{[B]}}(x)) = (b, f(x))$$

ve

$$(1_B, 1_{A^{[B]}}(x))(b, f(x)) = (1_B b, 1^b_{A^{[B]}}(x)f(x)) = (b, 1_{A^{[B]}}(bx)f(x)) = (b, f(x))$$

olduğundan $1_{B\times A^{[B]}} = (1_B, 1_{A^{[B]}})$ ve $(b, f)$ elemanının tersi $(b^{-1}, (f^{-1})^{b^{-1}})$ dir. Benzer işlemler $B \ltimes A^{(B)}$ kümesi içinde yapılabilir. Dolayısıyla elde edilen bu $B \ltimes A^{[B]}$ grubuna kısıtlanmamış wreath çarpım ve $B \ltimes A^{(B)}$ grubuna kısıtlanmış wreath çarpım denir. Ayrıca bu grupların sırasıyla, $B \ltimes A^{[B]} = A\mathrm{Wr}B = A \wr B$ ve $B \ltimes A^{(B)} = A\mathrm{wr}B$ şeklinde gösterimi vardır. Buradaki $A^{[B]}$ grubuna $B \ltimes A^{[B]}$'nin ve $A^{(B)}$ grubuna da $B \ltimes A^{(B)}$'nin taban grubu denir. Eğer $B$ sonlu ise bu gruplar aynıdır.

**Örnek 2.3** *$D_8 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ dir.*

**Tanım 2.4** *$G$ bir grup ve $X$, bu grubun boştan farklı bir altkümesi olsun. $X$'in $G$ içindeki normal kapanışı, $G$'nin $X$'i içeren bütün normal altgruplarının arakesitidir. $X^G$ ile gösterilen bu arakesit, $X$'i içeren en küçük normal altgruptur. Ayrıca $X^G = \langle g^{-1}Xg \mid g \in G \rangle$ dir.*

## 2.4. Evrensel Grup

**Tanım 2.5** *$G$ bir grup olsun. $x \in G$ olmak üzere $\rho(x) : G \to G$, $g \mapsto gx$ şeklinde tanımlanan $\rho(x)$, $G$'nin bir permütasyonudur. Bu takdirde $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G)$, $x \mapsto \rho(x)$ şeklinde tanımlanan $\rho$ birebir grup homomorfizmasına $G$'nin sağ düzenli temsili denir.*

**Tanım 2.6** *$G$ grubunun sonlu üreteçli her altgrubu sonlu ise $G$'ye yerel sonlu grup denir.*

Tanımdan da anlaşılacağı üzere her sonlu grup yerel sonlu bir gruptur. Sonlu grupların direkt çarpımları da yerel sonlu gruptur. Yine $G_1 = \langle x_1 \rangle$, $G_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$,..., $G_i = \langle x_1, ..., x_i \rangle$ şeklindeki gruplardan oluşan $G_1 \leq G_2 \leq G_3 ...$ sonsuz bir dizi alırsak ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ alınırsa $G$ yerel sonlu bir grup olur. Burada $G_i = Alt(i)$, $i$ elemanlı bir küme üzerindeki çift permütasyonların oluşturduğu alterne gruplar alınırsa $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} Alt(i)$ yerel sonlu, sonsuz mertebeli, basit bir grup elde ederiz. Yani bu grubun kendisinden ve birim gruptan başka normal altgrubu yoktur. Diğer bir örnekte her sonlu mertebeli grubun izomorfizma sınıfından bir grup alalım. Sonra da bu grupların direkt çarpımına $G$ diyelim. $G$ grubu yerel sonlu bir grup olur. $G$ sonlu mertebeli her grubun bir kopyasını direkt çarpımda bir çarpan olarak içerir. Yani sonlu her grubun bir kopyası bu grubun içinde vardır.

**Tanım 2.7** *G yerel sonlu bir grup olsun. Eğer G grubu,*

**(a)** *her sonlu grubun bir kopyasını içeriyorsa ve*

**(b)** *izomorfik olan sonlu iki altgrubu eşlenik oluyorsa*

*O zaman G grubuna yerel sonlu evrensel grup denir.*

Bu tanımdan yola çıkarak iki soru sormak mümkündür.

**(1)** Evrensel gruplar var mıdır?

**(2)** Mertebeleri aynı olan iki evrensel grup izomorf mudur?

P. Hall yerel sonlu evrensel grupların varlığını ve iki sayılabilir yerel sonlu evrensel grubun izomorf olduğunu göstermiştir. P. Hall'ın oluşturduğu grup şöyledir:

$G_0$ grubu olarak mertebesi 2'den büyük sonlu bir grup alalım. Yukarıda belirttiğimiz gibi $\rho_0 : G_0 \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G_0)$ içine sağ düzenli temsil ile gönderelim. $G_1 = \mathrm{Sym}(G_0)$ diyelim. Şimdi $\rho_1 : G_1 \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G_1)$ içine yine sağ düzenli temsil ile gönderelim. $G_2 = \mathrm{Sym}(G_1)$ diyelim. Bu işi benzer şekilde sonsuz defa tekrarlayarak devam edelim. Buradan her $i \in \mathbb{N}$ için bir $G_i$ grubu ve $\rho_i : G_i \hookrightarrow G_{i+1} = \mathrm{Sym}(G_i)$ temsillerinden oluşan bir $\{(G_i, \rho_i) \mid \rho_i : G_i \hookrightarrow G_{i+1}\}$ direkt sistem elde ederiz. Bu direkt sistemden elde edilen direkt limit grubuna $U$ diyelim. $U$ grubu yerel sonlu, sayılabilir sonsuz mertebeli, evrensel bir gruptur. Bu grubun özellikleri P. Hall tarafından incelenmiş ve evrensel grup olduğu gösterilmiştir.

**Lemma 2.8** *$m > 1$ ve $n \geq 1$ tamsayıları için, $a$ ile $b$'nin mertebesi $m$ ve çarpımları olan $ab$'nin mertebesi $n$ olacak şekilde sonlu, iki üreteçli $\langle a,b \rangle$ grubu vardır.*

**İspat.** $\langle a \rangle$ mertebesi $m$ ve $\langle c \rangle$ mertebesi $n$ olan iki devirli grup olsun. Ayrıca $\langle c \rangle$ ile $\langle a \rangle$'nın standart wreath çarpımına $G = \langle c \rangle \wr \langle a \rangle = \langle c \rangle^{\langle a \rangle} \rtimes \langle a \rangle$ diyelim. Bu wreath çarpımın taban grubu olan $\langle c \rangle^{\langle a \rangle}$, $\langle a \rangle$'dan $\langle c \rangle$'ye olan tüm dönüşümlerinin kümesidir. Şimdi $\varphi$, $\langle a \rangle$'dan $\langle c \rangle$'ye aşağıdaki şekilde tanımlanan bir dönüşüm olsun:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= c \\ \varphi(a^2) &= c^{-1} \\ 3 \leq i \leq m \text{ için } \varphi(a^i) &= 1. \end{aligned}$$

Herhangi bir verilen $x \in \langle a \rangle$ elemanı için,

$$\varphi^a \varphi^{a^2} \ldots \varphi^{a^{m-1}} \varphi^{a^m}(x) = \varphi^a(x) \ldots \varphi^{a^m}(x) = \varphi(ax) \ldots \varphi(a^m x) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\varphi^a \varphi^{a^2} \ldots \varphi^{a^m} = 1$ şeklinde olan sabit dönüşümdür. Ayrıca

$$\varphi^i(a) = c^i, \varphi^i(a^2) = (c^{-1})^i, 3 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m} \text{ için } \varphi^i(a^j) = 1$$

ve $c$'nin mertebesi $n$ olduğundan dolayı $\varphi$ dönüşümünün mertebesi $n$ dir. Şimdi $b = a^{-1}\varphi$ denilirse $ab = \varphi$ olur. Bu durumda

$$b^i = a^{-1}\varphi a^{-1}\varphi ... a^{-1}\varphi = \varphi^a \varphi^{a^2} ... \varphi^{a^i} a^{-i}$$

olduğundan $b^m = \varphi^a \varphi^{a^2} ... \varphi^{a^m} a^{-m} = 1$ bulunur ki $b$'nin mertebesi $m$ dir. Sonuç olarak $a^m = b^m = 1$ ve $\varphi^n = (ab)^n = 1$ olan sonlu, iki üreteçli $\langle a, b \rangle \leq G$ grubu vardır. $\square$

**Teorem 2.9** *(P. Hall) $U$ yerel sonlu evrensel bir grup olsun. O zaman*

**a.** *$U$'nun izomorfik sonlu iki altgrubu $A$ ve $B$ için, $A$'dan $B$'ye tanımlanan her izomorfizma $U$'nun bir iç otomorfizmasının kısıtlanışıdır.*

**b.** *$A$, $B$ sonlu grubunun bir altgrubu olsun. Bu takdirde $A$'dan $U$'ya olan her birebir homomorfizma $B$'den $U$'ya olan bir birebir homomorfizmaya genişletilebilir.*

**c.** *$U$ grubu her sayılabilir yerel sonlu grubun izomorfik bir kopyasını içerir.*

**d.** *$C_m$, $U$'nun mertebesi $m > 1$ olan bütün elemanlarının kümesini olsun. Bu takdirde $C_m$ eşlenik elemanların tek sınıfı ve $U = C_m C_m$ dir. Ayrıca $U$ basit bir gruptur.*

**İspat.**

**a.** $\alpha$, $A$'dan $B$'ye bir izomorfizma olsun. $A$ sonlu olduğundan, $A$'nın holomorph grubu Hol A sonludur. O zaman Hol A, evrensel grup tanımından dolayı $U$ evrensel grubun içine gömülebilir. Hol A'nın $U$'da ki görüntüsüne $G$ diyelim. Bu takdirde $C \trianglelefteq G$ olmak üzere $G$, $G$'den Aut C'ye bir homomorfizma vardır. Bu durumda $U$'da $C \cong A \cong B$ elde edilir. $U$ evrensel grup olduğundan $A^a = B^b = C$ olacak şekilde $a, b \in U$ vardır. Her $x \in C$ için

$\theta(x) = x^{a^{-1}\alpha b} = b^{-1}\alpha(axa^{-1})b$ şeklinde tanımlanan $\theta$ dönüşümü, $C$'nin bir otomorfizmasıdır. $C \leq U$ ve $G$, Hol A'nın homomorfik görüntüsü olduğundan $C$'nin $\theta$ otomorfizması bir $g \in G$ elemanı ile belirlidir. Yani her $x \in C$ için $x^{a^{-1}\alpha b} = x^g$ şeklindedir. Buradan hareketle $\alpha(axa^{-1}) = bx^g b^{-1}$ ve buradan $x^{a^{-1}\alpha} = x^{gb^{-1}}$ bulunur. Dolayısıyla $y \in A$ için $y^{\alpha} = y^{a(a^{-1}\alpha)} = y^{agb^{-1}}$, $agb^{-1} \in U$ elde edilir. Bu takdirde $\alpha$ izomorfizması, $U$'nun $agb^{-1}$ elemanı ile belirli iç otomorfizmasının $A$'ya kısıtlanışıdır.

**b.** $A$, $B$ sonlu grubunun bir altgrubu olsun. $U$ evrensel grup olduğundan $\varphi : A \to U$ ve $\psi : B \to U$ birebir homomorfizmaları vardır. Ayrıca $A^{\varphi}$ ile $A^{\psi}$ birbirine izomorf ve $(a^{\psi})^{\psi^{-1}\varphi} = a^{\varphi}$ olduğundan $\psi^{-1}\varphi$, $A^{\psi}$'den $A^{\varphi}$'ye bir izomorfizmadır. Teoremin $(a)$ kısmından dolayı, her $a \in A$ için $a^{\psi\psi^{-1}\varphi} = a^{\psi g}$ olacak şekilde bir $g \in U$ elemanı vardır. Buradan $a^{\varphi} = a^{\psi g}$ bulunur. Ayrıca $B^{\psi} \leq U$ ve $g$, $U$'nun iç otomorfizması olduğundan $b \mapsto b^{\psi g}$ dönüşümü $B$'den $U$'ya birebir homomorfizmadır. Ayrıca $a^{\varphi} = a^{\psi g}$ olduğundan $\psi g$'nin $A$'ya kısıtlanışı $\varphi$'dır. Bu nedenle $A$'dan $U$'ya olan birebir homomorfizma, $B$'den $U$'ya olan bir birebir homomorfizmaya genişletilebilir.

**c.** $G$ sayılabilir, yerel sonlu bir grup olsun. O zaman $G$'nin aşağıdaki şekilde tanımlanan $G_i$ sonlu altgrupları bir yerel sistem oluşturur. $g_1 \in G$ ve $G_1 = \langle g_1 \rangle$ olsun. $g_2 \neq g_1$ olmak üzere $G_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ olarak tanımlansın. Buradan hareketle $G_i = \langle g_1, ..., g_i \rangle$ dir. Dolayısıyla $G_1 \leq G_2 \leq ... \leq G_i \leq G_{i+1} \leq ...$ ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ elde edilir. $G$ yerel sonlu olduğundan $G_i$'ler sonludur. O zaman $G_i$'ler $U$ evrensel grubunun içine gömülebilir. Buradan hareketle $\varphi_1$, $G_1$'den $U$'ya birebir homomorfizma olsun. Ayrıca $G_2$ sonlu grubu, $G_1$'i içerdiğinden teoremin b) kısmından dolayı $\varphi_1$'in $G_2$'den $U$'ya bir $\varphi_2$ genişlemesi vardır. Bu şekilde devam edilirse $\varphi_i$, $G_i$'den $U$'ya birebir homomorfizma ve her $i \in \mathbb{N}$ için $\varphi_{i+1}$, $\varphi_i$'nin bir genişlemesi olmak üzere $\varphi_i$ birebir homomorfizmalarının bir $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dizisini oluştururuz. Elde edilen bu dizi yardımıyla, $g_i \in G_i$

olmak üzere $\varphi(g_i) = \varphi_i(g_i)$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi$, $G$'den $U$'ya birebir homomorfizmadır. Gerçekten $\varphi$, $G_i$'ler $G$'nin yerel sistemi olduğundan iyi tanımlı ve $\varphi_i$'ler birebir homomorfizma olduğundan birebirdir.

**d.** $U$ evrensel grubunda, mertebesi $n$ olan $t$ ve mertebeleri $m$ olan $x$ ile $y$ elemanlarını alalım. $|\langle x\rangle| = |\langle y\rangle| = m$ olduğundan $\langle x\rangle \cong \langle y\rangle$ elde edilir ki $U$ evrensel grubunda $x$ ve $y$ eşleniktirler. Bu nedenle $C_m$ mertebesi $m$ olan elemanların kümesi olduğundan $C_m$'de alınan herhangi iki eleman eşleniktir. Bu takdirde mertebesi $m$ olan elemanların kümesi tek türlü eşlenik sınıflarından oluşur. Lemma 2.8'den dolayı $|a| = |b| = m$ ve $|ab| = n$ olan $a, b \in U$ elemanları için bir iki üreteçli, sonlu $\langle a, b\rangle$ grubu vardır. $U$ evrensel grup olduğundan $\varphi$, $\langle a, b\rangle$'dan $U$'ya birebir homomorfizması vardır. Ayrıca $|\varphi(a)| = |\varphi(b)| = m$ ve $|\varphi(ab)| = n$ dir. Bu durumda $(\varphi(ab))^u = t$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Buradan $(\varphi(a)\varphi(b))^u = \varphi(a)^u\varphi(b)^u = t$ olduğundan $U = C_m\, C_m$ elde edilir. Ayrıca $x \in C_m$ için $\langle x\rangle^U \trianglelefteq U$ ve $U = C_m\, C_m \leq \langle C_m\rangle \leq \langle x\rangle^U$ olduğudan $\langle x\rangle^U = U$ bulunur. Bu takdirde $U$ basit bir gruptur.

□

$G$ yerel sonlu bir grup ve $\bar{S} = \mathrm{Sym}(G)$ olsun. Ayrıca $\rho : G \to \bar{S}$ sağ düzenli temsil olsun. Her $x, y \in G$ için $x\langle y\rangle$ ile $\langle y\rangle$ devirli grubunun $G$ içindeki sol kalan sınıfını gösterelim. Bu sol kalan sınıfı için $y$ elemanının sağ etkisi

$$(x\langle y\rangle)^{y^\rho} = x\langle y\rangle y = x\langle y\rangle$$

dır. Burada $x\langle y\rangle$'ye $G$ kümesinin bir alt kümesi olarak bakıyoruz. $y^\rho$ bu kümedeki her elemanı yine aynı sol kalan sınıfına gönderir. Yani $y^\rho|_{x\langle y\rangle} : x\langle y\rangle \to x\langle y\rangle$ bir permütasyondur. Ayrıca $(xy^i)^{y^\rho} = xy^i y = xy^{i+1}$ dir.

$S = \{\sigma \in \bar{S} \mid \forall x \in G$ için $(xF_\sigma)^\sigma = xF_\sigma$ olacak şekilde $F_\sigma$ sonlu altgrubu vardır.$\}$ diyelim. Burada $G$ yerel sonlu, $\sigma \in \mathrm{Sym}(G) = \bar{S}$, $F_\sigma \leq G$ ve $xF_\sigma$, $F_\sigma$ sonlu altgrubunun $G$ içinde $x$'i içeren sol kalan sınıfını göstersin. Burada dikkat edilmesi gereken $G$ grubunda $F_\sigma$ altgrubunun sol kalan sınıflarının eleman sayısı $|xF_\sigma| = |yF_\sigma| = |F_\sigma|$ ve sol kalan sınıflar $G$ grubunun bir ayrışımıdır. Demek ki $S$ kümesi böyle bir ayrışımı değişmez bırakan $\bar{S}$ içindeki permütasyonların kümesidir.

Şimdi $S$ kümesinin $\bar{S}$'nin bir altgrubu olduğunu gösterelim. Her $g \in G$ için $\rho(g)$ ve $F_\sigma = \langle g \rangle$ vardır. Bu nedenle $\rho(G)$ grubu, $S$ grubunun içindedir. $S$ boştan farklı ve birim elemanı olan bir kümedir. $\sigma, \tau \in S$ olsun. O zaman her $x \in G$ için $(xF_\sigma)^\sigma = xF_\sigma$ ve $(xF_\tau)^\tau = xF_\tau$ olacak şekilde $G$'nin $F_\sigma$ ve $F_\tau$ sonlu altgrupları vardır. Şimdi $F = \langle F_\sigma, F_\tau \rangle$ altgrubunu alalım. $G$ grubu yerel sonlu ve $F_\sigma$ ile $F_\tau$, $G$'nin sonlu altgrupları olduğu için $F$, $G$'nin sonlu bir altgrubudur. Şimdi her $x \in G$ için $F$ sonlu altgrubunun $G$ içindeki tüm $xF$ sol kalan sınıflarını düşünelim. Şimdi $(xF)^{\sigma\tau^{-1}}$'i bulalım. $(xF)^\sigma = xF$ dir. Çünkü $(xF)^\sigma$, $xF_\sigma$ kalan sınıfını içerir. $xF_\sigma \subseteq xF$ ve sol kalan sınıflar ya ayrık ya da eşit olacağından, $xF \cap (xF)^\sigma \supseteq xF_\sigma \neq \emptyset$ olduğundan $(xF)^\sigma = xF$'i elde ederiz. Benzer şekilde $(xF)^\tau = xF$ olduğundan her iki tarafa $\tau^{-1}$ uygularsak $xF = (xF)^{\tau^{-1}}$ buluruz. Bu durumda $(xF)^{\sigma\tau^{-1}} = (xF)^{\tau^{-1}} = xF$ elde edilir. Dolayısıyla $\sigma\tau^{-1} \in S$ elde edilir. Bu takdirde $S$ kümesi $\bar{S}$'in bir altgrubudur.

Şimdi $S$ altgrubunun yerel sonlu bir grup olduğunu gösterelim. $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\}$ kümesi $S$ kümesinin sonlu bir alt kümesi olsun. $T = \langle \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r \rangle$ diyelim. Amacımız $T$'nin $G$'nin sonlu bir altgrubu olduğunu göstermektir. $\sigma_i \in S$ olduğundan her $x \in G$ için $(xF_{\sigma_i})^{\sigma_i} = xF_{\sigma_i}$ olacak şekilde her $i$ için sonlu bir $F_{\sigma_i} \leq G$ altgrubu vardır. $F = \langle F_{\sigma_i} \mid i = 1, 2, ..., r \rangle$ diyelim. Her $i$ için $F_{\sigma_i}$ sonlu ve $G$ yerel sonlu olduğundan $F$ altgrubu $G$'nin sonlu bir altgrubudur. Her $x \in G$ için $(xF)^{\sigma_i} \supseteq xF_{\sigma_i}$ ve yukarıdaki nedenden dolayı her $\sigma_i$, $i = 1, 2, ..., r$ için $(xF)^{\sigma_i} = xF$ dir. Dolayısıyla $\forall t \in T$ için $(xF)^t = xF$ olur. Yani $t \in S$ ve $T$ grubu sonlu elemanlı $xF$ sol kalan sınıflarının üzerindeki $\mathrm{Sym}(xF)$ gruplarının kartezyen çarpımının bir köşegensel altgrubu olur. Bu grup sonlu bir grubun kartezyen çarpımının içinde olduğu için ve sonlu grubun kartezyen çarpımı yerel sonlu olduğundan ve de $T$ grubu sonlu üreteçli olduğundan $T$ sonlu bir gruptur. Bu durumda $S$ de yerel sonlu, sonsuz mertebeli bir altgruptur.

**Tanım 2.10** *$G$ yerel sonlu bir grup ve $\bar{S} = \mathrm{Sym}(G)$ olsun.Bu takdirde $S = \{\sigma \in \bar{S} \mid \forall x \in G$ için $(xF_\sigma)^\sigma = xF_\sigma$ olacak şekilde $F_\sigma$ sonlu altgrubu vardır.$\}$'ye daraltılmış simetrik grup denir.*

**Lemma 2.11** *$G$ yerel sonlu bir grup ve $\rho$, $G$'nin daraltılmış simetrik grup $S$ içine sağ düzenli temsili olsun. ($\rho : G \to S \leq \mathrm{Sym}(G)$) Bu takdirde $\rho(G)$'nin izomorfik iki sonlu altgrubu $S$ içinde eşleniktir. ($\rho(G) \cong G$)*

**İspat.** $K$ ve $K^*$ sonlu altgrupları $G$'nin eşyapılı iki altgrubu olsun. $G$ yerel sonlu olduğundan, $H = \langle K, K^* \rangle$ sonlu bir altgruptur. $* : K \to K^*$ izomorfizma olsun. $H$ sonlu grubunun $G$ içindeki sol kalan sınıflarını temsil eden kümeyi $X = \{x_i : i \in I\}$ ile gösterelim. $K$ grubu, $H$ sonlu grubunun altgrubu olduğu için $K$'nın $H$ içindeki sol kalan sınıflarının temsilcilerinin kümesi $Y = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ ve $K^*$ grubunun $H$ içindeki sol kalan sınıflarının temsilcilerinin kümesi $\{y_1^*, y_2^*, ..., y_r^*\}$ olsun. Şimdi $K$'yı $K^*$'a götüren $\sigma \in S$ permütasyonunu tanımlayalım. $\sigma \in S \leq \mathrm{Sym}(G)$ olduğundan $\sigma$, $G$'nin bir permütasyonu olacaktır. $G$'nin her elemanı $H$'nin bir sol kalan sınıfında olduğundan ve $X$ sol kalan sınıflarının temsilcilerinin kümesi olduğu için bir $\sigma$ elemanını $(x_i y_j x)^\sigma = x_i y_j^* x^*$ $i \in I$, $1 \leq j \leq r$, $x \in K$ şeklinde tanımlayabiliriz. Her sol kalan sınıf $x_i H$ biçiminde ve $K \leq H$ olduğundan ve de $H = \bigcup_{j=1}^{r} y_j K$ olduğundan $H$'nin her elemanını $x \in K$ olmak üzere $y_j x$ biçiminde tek türlü yazabiliriz. Bu durumda $G$'nin her elemanı $x_i \in X$, $y_j \in Y$, $x \in K$ olmak üzere $x_i y_j x$ biçiminde tek türlü yazabiliriz. Buradan hareketle $\sigma$'nın, $G$'nin bir permütasyonu olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $\sigma \in S$ olduğunu gösterelim. $H$ grubu $G$'nin sonlu bir altgrubu ve her $x \in G$ için

$(x_iH)^\sigma = x_iH$ dir. Çünkü $x_iH$'den alınan her elemanı $y_j \in Y$, $x \in K$ olmak üzere $x_iy_jx$ biçiminde tek türlü yazılır. Buradan $(x_iy_jx)^\sigma = x_iy_j^*x^*$ ve $G = \bigcup_{i\in I} x_iH$, $H = \bigcup_{i=1}^r y_iK = \bigcup_{j=1}^r y_i^*K^*$ olduğundan $(x_iH)^\sigma = x_iH$ elde edilir. Dolayısıyla $S$ daraltılmış simetrik grubunun tanımından $\sigma \in S$ olduğu görülür. Şimdi $\sigma$ elemanının $K$ ve $K^*$ gruplarını $S$ içinde eşlenik yaptığını görelim. $\sigma \in S$, $k^\rho \in S$ ve $S$ altgrup olduğundan $\sigma^{-1}k^\rho\sigma \in S$ olur. Şimdi $x_iy_j^*x^*$ elemanına $\sigma^{-1}k^\rho\sigma$ permütasyonunun etkisini inceleyelim.

$$(x_iy_j^*x^*)^{\sigma^{-1}k^\rho\sigma} = (x_iy_jx)^{k^\rho\sigma} = (x_iy_jxk)^\sigma = x_iy_j^*(xk)^* = (x_iy_j^*x^*)^{(k^*)^\rho}$$

dır. Buradan $k \in K$ için $\sigma^{-1}k^\rho\sigma = (k^*)^\rho$ diyebiliriz. Bu da bize $K$ ve $K^*$ gruplarının $S$ içinde $\sigma$ elemanı ile eşlenik olduklarını gösterir. □

**Teorem 2.12** *(P. Hall) Sayılabilir yerel sonlu evrensel gruplar vardır. Ayrıca herhangi iki sayılabilir yerel sonlu evrensel grup izomorfiktir.*

**İspat.** Sonlu grupların ve birebir homomorfizmaların direkt sistemini şu şekilde tanımlayalım. $U_1$, mertebesi en az 3 olan herhangi bir sonlu grup olsun. $n \geq 1$ olmak üzere $U_{n+1}$, $U_n$ kümesi üzerindeki simetrik grup olsun. Ayrıca $\rho_n$ ile $U_n$'yi $U_{n+1}$ içine gömen sağ düzenli temsili gösterelim. Bu durumda $i \leq j$ için $\alpha_i^j = \rho_i\rho_{i+1}...\rho_{j-1}$ olmak üzere $\alpha_i^i$, $U_i$ üzerinde birim dönüşüm ve $i \leq j \leq k$ ise $\alpha_i^j\alpha_j^k = \rho_i...\rho_{j-1}\rho_j...\rho_{k-1} = \alpha_i^k$ olur. $\mathbb{N}$ yönlenmiş küme olduğundan $\{U_i, \alpha_i^j | i \leq j \in \mathbb{N}\}$ bir direkt sistem oluşturur. Bu direkt sistemin direkt limiti $\lim_{i\in\mathbb{N}} U_i$'yi $U$ ile gösterelim. Lemma 2.1'den dolayı $\overline{U}_1 \leq \overline{U}_2 \leq ...$ ve $U_i \cong \overline{U}_i$ olmak üzere $U = \bigcup_{i=1}^\infty \overline{U}_i$ şeklindedir. Dolayısıyla $U$, sayılabilir yerel sonlu bir gruptur. Şimdi $U$'nun evrensel olduğunu gösterelim. $|\overline{U}_i|$'ler artan bir dizi oluşturacağından herhangi bir $F$ sonlu grubu için $|F| \leq |U_i|$ olacak şekilde bir vardır. Bu durumda $F$, $U_{i+1} = \mathrm{Sym}(U_i)$'nin bir altgrubuna izomorf olur. Dolayısıyla her sonlu grup $U$ evrensel grubunun içine gömülmüş olur. Şimdi $H$ ile $K$, $U$'nun iki izomorfik sonlu altgrubu olsun. $U$ yerel sonlu olduğundan $H$

ile $K$, $\overline{U}_i$'nin izomorfik sonlu altgrupları olacak şekilde bir $\overline{U}_i$ vardır. Lemma 2.11'den dolayı $H$ ile $K$, $\overline{U}_{i+1}$'de eşleniktir. Dolayısıyla $H$ ile $K$, $U$'da eşleniktir. O halde $U$ evrensel bir gruptur.

Şimdi teoremin ikinci kısmının ispatını yapalım. $U$ ve $V$ sayılabilir, yerel sonlu, evrensel iki grup olsun. O zaman $U$ ile $V$'nin sırasıyla $\{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ ve $\{V_i | i \in \mathbb{N}\}$ sonlu gruplarının bir yerel sistemi vardır. $r$ bir tamsayısı olmak üzere $U_r \leq U$ sonlu altgrubu için, $V$ evrensel olduğundan $U_r$'den $V$'ye bir $\varphi$ birebir homomorfizması vardır. Bu durumda $U_r^{\varphi} \leq V$ olacağından $U_r^{\varphi} \lneqq V_s$ olacak şekilde bir $s$ tamsayısı vardır. Ayrıca Teorem 2.9.b)'den dolayı, $U_r^{\varphi} \lneqq V_s$ sonlu altgrubunun $\varphi^{-1} : U_r^{\varphi} \to U$ birebir homomorfizması, $\psi : V_s \to U$ olan birebir bir homomorfizmaya genişletilebilir. Dolayısıyla her $g \in U_r$ için $(g^{\varphi})^{\varphi^{-1}} = (g^{\varphi})^{\psi}$ ve buradan $g^{\varphi\psi} = g$ olacağından $\varphi\psi$, $U_r$ üzerinde birim dönüşümdür. Ayrıca $V_s^{\psi} \leq U$ olacağından $V_s^{\psi} \lneqq U_{r'}$ olacak şekilde bir $r'$ tamsayısı vardır. Yine Teorem 2.9.b)'den dolayı, $V_s^{\psi} \lneqq U_{r'}$ sonlu altgrubunun $\psi^{-1} : V_s^{\psi} \to V$ birebir homomorfizması, $\varphi' : U_{r'} \to V$ olan birebir bir homomorfizmaya genişletilebilir. Dolayısıyla her $h \in V_s$ için $(h^{\psi})^{\psi^{-1}} = (h^{\psi})^{\varphi'}$ ve buradan $h^{\psi\varphi'} = h$ olacağından $\psi\varphi'$, $V_s$ üzerinde birim dönüşümdür. Şimdi herhangi bir $U_1$'den $V$'ye $\varphi_1$ birebir homomrfizmasını alalım. Bu durumda tümevarım uygulanırsa,

$$1 = r_1 < r_2 < \ldots \text{ ve } 0 < s_1 < s_2 < \ldots$$

kesinlikle artan dizileri ve $\varphi_i\psi_i$ ile $\psi_i\varphi_{i+1}$ sırasıyla $U_{r_i}$ ve $V_{s_i}$ üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde

$$i \in \mathbb{N} \text{ için } \varphi_i : U_{r_i} \to V_{s_i} \text{ ve } \psi_i : V_{s_i} \to U_{r_{i+1}}$$

birebir homomorfizmaları elde edilir. Ayrıca her $x \in U_{r_i}$ için

$$x^{\varphi_{i+1}} = x^{i_d\varphi_{i+1}} = \left(x^{\varphi_i\psi_i}\right)^{\varphi_{i+1}} = \left(x^{\varphi_i}\right)^{\psi_i\varphi_{i+1}} = \left(x^{\varphi_i}\right)^{i_d} = x^{\varphi_i}$$

olduğundan $\varphi_{i+1}$, $\varphi_i$'nin bir genişlemesidir. Benzer şekilde $\psi_{i+1}$, $\psi_i$'nin bir genişlemesidir. Bu durumda yukarıdaki şekilde oluşturulan $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ve $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

dizileri yardımıyla, $\varphi : U \to V$, $x \in U_{r_i}$ için $x^{\varphi} = x^{\varphi_i}$ ve $\psi : V \to U$, $y \in V_{s_i}$ için $y^{\psi} = y^{\psi_i}$ şeklinde birebir homomorfizmalarını tanımlarız. Bu takdirde

$$x \in U \text{ için } x^{\varphi\psi} = (x^{\varphi_i})^{\psi} = x^{\varphi_i\psi_i} = x^{i_d} = x$$

ve

$$y \in V \text{ için } y^{\psi\varphi} = (y^{\psi_i})^{\varphi} = (y^{\psi_i})^{\varphi_i} = (y^{\psi_i})^{\varphi_{i+1}} = y^{i_d} = y$$

olduğundan $\varphi\psi$ ve $\psi\varphi$ sırasıyla $U$ ve $V$ üzerinde birim dönüşüm olur. Sonuç olarak $\varphi$ ve $\psi$ birer izomorfizmadır. □

**Teorem 2.13** *(P.Hall) Her yerel sonlu, sonsuz $G$ grubu; kardinalitesi $G$ grubunun kardinalitesi ile aynı olan bir evrensel grup içine gömülebilir. Bu durumda sonsuz kardinal $\kappa$ için mertebesi $\kappa$ olan bir evrensel grup vardır.*

**İspat.** $\mathrm{FS}ym(\Omega)$ ile $\Omega$ sayılabilir sonsuz kümesi üzerindeki sonlumsu simetrik grubu gösterelim. $\Omega$ sayılabir sonsuz mertebeli bir küme olduğundan $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\Omega_i = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i\}$ alırsak $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ şeklinde yazılır. $\Omega_i$ kümesi $i$ elemanlı bir küme olduğundan $\mathrm{Sym}(\Omega_i)$ grubu $i!$ mertebeli sonlu bir grup olur. $\mathrm{FS}ym(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sym}(\Omega_i)$ olduğu için $\mathrm{FS}ym(\Omega)$ grubu sayılabilir sonsuz mertebeli yerel sonlu bir grup olur. Cayley teoreminden her sonlu grup $\mathrm{FS}ym(\Omega)$ grubunun bir altgrubuna izomorftur. Şimdi evrensel grubu oluşturalım. $G$ yerel sonlu, sonsuz mertebeli bir grup olsun. $U_0 = G \times \mathrm{FS}ym(\Omega)$ diyelim. Her $i = 0, 1, 2, ...$ için $U_{i+1}$ ile $\rho_i : U_i \hookrightarrow U_{i+1}$'i tümevarım ile tanımlayalım. $\rho_i : U_i \hookrightarrow \mathrm{Sym}(U_i)$ olan sağ düzenli temsil olsun. Burada $G$ yerel sonlu grup olduğundan ve $U_i$'ler $G$'yi içerdiğinden ve daraltılmış simetrik grup içinde yerel sonlu $G$ grubunun sonlu elemanlı iki eşyapılı altgrubu eşlenik olduklarında $U_{i+1} = \langle \rho(U_i), \sigma \in \mathrm{Sym}(U_i) \mid K$ ve $K^*$,$U_i$'nin sonlu eşyapılı altgrupları ise $\sigma$ constricted simetrik grup içinde bunları eşlenik yapan eleman olsun$\rangle$. Burada $U_0 = G \times \mathrm{FS}ym(\Omega)$'nın kardinalitesi $G$'nin kardinalitesi ile aynıdır. Kardinalitesi $\kappa$ olan bir grubun mertebesi sonlu $n$ olan altgruplarının sayısı en fazla $\kappa$ kadardır. Dolayısıyla mertebesi $n$ olan iki eşyapılı grubu eşlenik yapan eleman sayısı da en fazla $\kappa$ kadardır. Bu nedenle $U_i$ grubunu $\rho_i$ ile $U_{i+1}$ içine gömdüğümüzde $U_{i+1}$ sonsuz grubunun mertebesi büyümez. Yani $\forall i$ için $|G| = |U_i|$ olur. Şimdi $\{(\rho_i, U_i) \mid i \in I\}$ direkt sisteminden elde edilen direkt limit grubuna $U$ diyelim. Yani $U = \lim\limits_{i\to\infty} U_i$ olsun. Bu durumda $U$ grubunun içinde $G$ yerel sonlu grubu vardır. $U$ grubu yerel sonlu $U_i$ gruplarının direkt limiti olduğu için $U$ yerel sonludur. $|U| = |G|$ ve $U$'nun sonlu iki altgrubu bir $i$ için $U_i$'nin içinde kaldığından bu gruplar $U_{i+1}$ içinde birbirine eşlenik olacağından $U$ evrensel bir grup olur. $\square$

# 3. SERBEST ÇARPIM ve HNN GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde ilk olarak [12]'de yer alan serbest grup ile ilgili tanım ve teoremlere yer vereceğiz. Ardından [7]'de bulunan serbest çarpım, HNN genişlemeleri ve gömme ile ilgili tanım, teorem ve örnekleri inceleyeceğiz.

**Tanım 3.1** *$F$ bir grup ve $S$, $F$'nin altkümesi olsun. $G$ herhangi bir grup olmak üzere herhangi $\varphi : S \to G$ fonksiyonu tanımlandığında, $s \in S$ olmak üzere $\bar{\varphi}(s) = \varphi(s)$ olacak şekilde tek türlü bir $\bar{\varphi} : F \to G$ homomorfizmasına genişletilebiliyorsa, $S$'ye $F$ grubu için serbest taban denir. Eğer $F$ için bir serbest taban bulunabiliyorsa $F$ grubuna serbest grup denir.*

**Örnek 3.2** *$C = \langle a \rangle$ sonsuz devirli grubunu alalım. Ayrıca $C = \{..., a^{-2}, a^{-1}, 1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, ...\}$ ve $C$'de çarpma işlemi $i, j \in \mathbb{Z}$ için $a^i.a^j = a^{i+j}$ şeklindedir Bu takdirde $C$, $S = \{a\}$ serbest tabanı ile bir serbest gruptur. Çünkü $\varphi : S \to G$, $\varphi(a) = g \in G$ fonksiyonu $\bar{\varphi} : C \to G$, $\bar{\varphi}(a^i) = g^i$ şeklinde bir homomorfizmaya genişletilebilir. Ayrıca $\{a^{-1}\}$ kümesi de $C$ için bir serbest tabandır. Diğer bir örnekte $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $\{1\}$ veya $\{-1\}$ serbest tabanı ile serbest gruptur.*

**Tanım 3.3** *$S$ kümesini ve her $i$ için $a_i \in S \cup S^{-1} \cup \{1\}$ olan $w = (a_1, a_2, ...)$ dizisini alalım. Eğer tüm $i > n$ için $a_i = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tammsayısı varsa $w = (a_1, a_2, ...)$ dizisine $S$ üzerinde bir kelime denir.*

**Teorem 3.4** *Her $G$ grubu, bir serbest grubun bölüm grubudur.*

**İspat.** $S = \{s_g | g \in G\}$ kümesini alalım. $f : S \to G$ fonksiyonu $f(s_g) = g$ şeklinde tanımlansın. $f$ birebir ve örtendir. Bu durumda $S$ kümesi serbest tabanı olmak üzere bir $F$ serbest altgrubu vardır. O halde $f : S \to G$ fonksiyonu bir $\varphi : F \to G$ fonksiyonuna genişletilebilir. $f$ örten olduğundan $\varphi$ fonksiyonu da örtendir. O halde $G \cong F/\ker\varphi$ dir. $\square$

**Tanım 3.5** *$S$ bir küme ve $D$, $S$ üzerindeki kelimelerin ailesi olsun. $F$, $S$ tabanı ile serbest grup ve $N_D$, $F_S$'de $D$'yi içeren en küçük normal altgrup olmak üzere $G \cong F_S/N_D$ ise $G$ grubu, $S$ üreteçlerine ve $D$ bağıntılarına sahiptir. $\langle S|D\rangle$ ikilisine $G$'nin gösterimi(temsili) denir.*

**Örnek 3.6** *$G = \mathbb{Z}_6$ grubunu alalım. $F = \langle x\rangle$ serbest grubu sonsuz devirlidir. Ayrıca $\langle x\rangle/\langle x^6\rangle \cong \mathbb{Z}_6$ olduğundan $G$'nin gösterimi $\langle x|x^6\rangle$ dır.*

## 3.1. Serbest Çarpım

**Tanım 3.7** *$A$ ve $B$ gruplarını alalım. Bu grupların gösterimleri sırasıyla $A = \langle a_1,...|r_1,...\rangle$ ve $B = \langle b_1,...|s_1,...\rangle$ olsun. Burada $\{a_1,...\}$ ve $\{b_1,...\}$ kümeleri ayrıktır. Bu takdirde $A$ ve $B$ gruplarının serbest çarpımı $A\star B$,*

$$A\star B = \langle a_1,...,b_1,...|r_1,...,s_1,...\rangle$$

*şeklindedir. Burada $A$ ve $B$ gruplarına $A\star B$'nin çarpanları denir.*

**Lemma 3.8** *$A\star B$ serbest çarpımı, $A$ ve $B$ grupları ile tek türlü belirlidir. Ayrıca $A\star B$; $A \cong \bar{A}$, $B \cong \bar{B}$ ve $\bar{A}\cap\bar{B} = 1$ olan $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ altgrupları tarafından üretilir.*

**İspat.** $A' = \langle a'_1,...|r'_1,...\rangle$ ve $B' = \langle b'_1,...|s'_1,...\rangle$ sırasıyla $A$ ve $B$'nin ayrık gösterimleri olsun. Ayrıca

$$A'\star B' = \langle a'_1,...,b'_1,...|r'_1,...,s'_1,...\rangle$$

şeklindedir. $\psi : A \to A'$ ve $\chi : B \to B'$ izomorfizma olsun. Şimdi $a_i \mapsto \psi(a_i)$ ve $b_j \mapsto \chi(b_j)$ olacak şekilde $\psi\star\chi : A\star B \to A'\star B'$ dönüşümünü tanımlayalım. Bağıntılar bağıntılara gideceğinden $\psi\star\chi$ bir homomorfizmadır. Şimdi de $a'_i \mapsto \psi^{-1}(a'_i)$ ve $b'_j \mapsto \chi^{-1}(b'_j)$ olacak şekilde $\psi^{-1}\star\chi^{-1}$ dönüşümünü tanımlayalım. Buradan hareketle $\psi^{-1}\star\chi^{-1}$, $\psi\star\chi$'nin tersidir. O halde $A\star B \cong A'\star B'$ olur.

Şimdi lemmanın ikinci kısmının ispatı için; $A \star B$'nin sırasıyla $a_i$ ve $b_j$ ile üretilen $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ altgruplarını alalım. Bu durumda $A \star B$, $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ tarafından üretilir. Şimdi $A \cong \bar{A}$ olduğunu gösterelim. $\eta : A \to \bar{A}$, $a_i \mapsto a_i$ dönüşümünü düşünelim. Ayrıca $\pi_A : A \star B \to A$, $a_i \mapsto a_i$ ve $b_j \mapsto 1$ şeklinde tanımlı projeksiyonu örten bir dönüşümdür. Buradan $\pi_A \eta$, $A$ üzerinde birim dönüşümdür. Bu takdirde $A \cong \bar{A}$ elde edilir. Benzer şekilde $B \cong \bar{B}$ dir. Ayrıca $\pi_A \eta$, $\bar{B}$'nin bütün elemanlarını 1'e gönderdiğinden $\bar{A} \cap \bar{B} = 1$'i elde ederiz. □

Şimdi kullanacağımız bazı gösterimleri verelim. $\{A_i \mid i \in I\}$ gruplarının ailesi alalım. Bu $A_i$'lerin serbest çarpımını $P = \star A_i$ ile göstereceğiz. $P$ aşağıdaki dönüşüm özelliklerine sahiptir:

**1.** $\eta_i : A_i \mapsto P$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} \eta_i(A_i)$, $P$'yi üretecek şekilde $\{\eta_i \mid i \in I\}$ homomorfizmalar ailesi vardır.

**2.** $G$ bir grup ve $f_i : A_i \to G$ olmak üzere $\{f_i \mid i \in I\}$ homomorfizmaların bir ailesi olsun. Bu takdirde $\forall i \in I$ için

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & G \arrow[dl, "\psi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\psi : P \to G$ homomorfizması vardır.

**Tanım 3.9** *$A \star B$ serbest çarpımında $g_1, \ldots, g_n$ dizisi verilsin. Eğer herhangi $g_i$ için; $g_i \neq 1$, $g_i \in A$ ya da $g_i \in B$ ve ardışık olan $g_i$ ile $g_{i+1}$ elemanları aynı çarpanda olmamak üzere oluşturulan $n \geq 0$ için $g_1, \ldots, g_n$ dizisine indirgenmiş dizi (veya normal form) denir. ($n = 0$ ise boş dizi denir.)*

**Örnek 3.10** *$A \star B = \langle a, b \mid a^7, b^5 \rangle$ olsun. $a^5, b^3, a^2, b$ indirgenmiş bir dizidir. Fakat $a, b^5, a$ ve $a^2, a^3, b^3$ dizileri indirgenmiş değildir.*

**Teorem 3.11 (Serbest Çarpım için Normal Form Teoremi)**

*$A \star B$ serbest çarpım olsun. Bu takdirde*

**(I)** *$g_1,...,g_n$ indirgenmiş bir dizi ve $n > 0$ olmak üzere $w = g_1...g_n$ olsun. O zaman $A \star B$'de $w \neq 1$ dir.*

**(II)** *$A \star B$'nin her $w$ elemanı, $g_1,...,g_n$ indirgenmiş dizi olmak üzere tek türlü $w = g_1...g_n$ çarpımı olarak yazılır.*

**İspat.** İlk olarak **(I)** ve **(II)** ifadelerinin birbirine denk olduğunu gösterelim. Şimdi **(II)** ifadesini kabul edip **(I)** ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. 1, boş dizide elemanların çarpımı olacağından yani $1 = 1...1$ yazılabileceğinden **(I)**'in sağlandığını görmüş oluruz. Şimdi **(I)** ifadesini kabul edip **(II)** ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. $w = g_1...g_n$ ve $w = h_1...h_m$ indirgenmiş olsun. Bu takdirde $1 = g_1...g_n h_m^{-1}...h_1^{-1}$ dir. Bu durumda $g_1,...,g_n,h_m^{-1},...,h_1^{-1}$ dizisi indirgenmiş değildir. Bu nedenle $h_m$ ile $g_n$ aynı çarpanda olmalıdır. Ayrıca $g_1,...,g_{n-1},g_n h_m^{-1}$, $h_{m-1}^{-1},...,h_1^{-1}$ dizisi indirgenmiş değildir. Bundan dolayı $g_n h_m^{-1} = 1$ yani $g_n = h_m$ olmalıdır. Dolayısıyla tümevarımdan $m = n$ ve $g_i = h_i$, $i = 1,...,n$ dir.

Şimdi teoremdeki **(I)** ve **(II)** ifadelerinin varlığını ispatlayalım. $W$, $A \star B$'den alınan bütün indirgenmiş dizilerin kümesi olsun. Ayrıca her $a \in A$ elemanı için $W$ üzerinde bir $\bar{a}$ permütasyonunu tanımlayalım:

Eğer $a = 1$ ise $\bar{a}$ birim dönüşümdür. Eğer $a \neq 1$ ve $(g_1,...,g_n)$ bir indirgenmiş diziyse, bu takdirde

$$\bar{a}((g_1,...,g_n)) = \begin{cases} (a,g_1,...,g_n), & g_1 \in B \text{ ise} \\ (ag_1,...,g_n), & g_1 \in A,\ ag_1 \neq 1 \text{ ise} \\ (g_2,...,g_n), & g_1 = a^{-1} \text{ ise} \end{cases}$$

Burada $\bar{a}$'nin tersini $\bar{a}^{-1}$ ile gösterelim. Ayrıca $a$, $b \in A$ ise $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ dır. Buradan hareketle $\varphi : A \to \mathrm{Sym}(W)$, $a \mapsto \bar{a}$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Benzer şekilde $\psi : b \mapsto \bar{b}$ homomorfizmasını da tanımlayabiliriz.

O halde $\varphi \star \psi : A \star B \to \mathrm{Sym}(W)$ homomorfizması elde edilir. Şimdi $w$, $A \star B$'nin herhangi bir elemanı olsun. Dolayısıyla $g_1, ..., g_n$ bir indirgenmiş dizi olmak üzere $w = g_1 ... g_n$ şeklinde yazabiliriz. $\varphi \star \psi(w)$, boş diziyi $(g_1, ..., g_n)$ dizisine gönderir. Bu nedenle $n > 0$ ise $w \neq 1$ dir. □

Normal Form Teoremi bize serbest çarpımın elemanlarının uzunluğunu tanımlamamızı sağlar. $w \in G = A \star B$ alalım. $w = g_1 ... g_n$ normal form şeklinde yazılsın. Bu takdirde $w$'nın uzunluğu $|w| = n$ dir.

$w$, $A \star B$'nin $w = g_1 ... g_n$ normal formundaki bir elemanı olsun. Eğer $g_n$ ve $g_1$ farklı çarpanlardaysa ya da $n \leq 1$ ise $w$'ya *devirsel indirgenmiş* denir. Eğer $g_n \neq g_1^{-1}$ ya da $n \leq 1$ ise $g_1 ... g_n$'e *zayıf devirsel indirgenmiş* denir.

**Teorem 3.12 (Serbest Çarpım için Eşlenik Teoremi)**

*$A \star B$'nin her elemanı devirsel indirgenmiş bir elemana eşleniktir. $n > 1$ olmak üzere $u = g_1 ... g_n$ ile $v = h_1 ... h_m$ devirsel indirgenmiş elemanları $A \star B$'de eşlenik olsun. Bu takdirde $m = n$ ve $g_1, ..., g_n$ ile $h_1, ..., h_m$ dizileri birbirlerinin devirli permütasyonlarıdır. Eğer $n \leq 1$ ise, bu takdirde $m = n$ ve $u$ ile $v$ aynı çarpan içinde birbirine eşleniktir.*

**İspat.** Her elemanın devirsel indirgenmiş bir elemana eşlenik olduğu açıktır. Eğer $u$ ve $v$ eşlenik devirsel elemanlar ise $u = cvc^{-1}$ şeklindedir. Şimdi $|c|$ üzerinden tümevarım uygulayalım.

$|c| = 0$ ise, bu durumda Normal Form Teoremi'nin bir sonucu elde edilir. O halde $c = c_1 ... c_k$, $k \geq 1$ indirgenmiş formunda olsun. Bu takdirde

$$g_1 ... g_n = c_1 ... c_k h_1 ... h_m c_k^{-1} ... c_1^{-1}$$

şeklindedir. Fakat $g_1 ... g_n$'nin devirsel indirgenmiş olmasından dolayı, yukarıda yazılan eşitlik

$$g_1 ... g_n = c_1 ... c_{k-1} h_2 ... h_m h_1 c_{k-1}^{-1} ... c_1^{-1}$$

şeklindedir. Dolayısıyla tümevarımdan istenen sonuç elde edilir. □

## 3.2. Alaşım ile Serbest Çarpım ve Higman-Neumann-Neumann Genişlemesi

$G = \langle x_1, ... | r_1, ... \rangle$ ve $H = \langle y_1, ... | s_1, ... \rangle$ gruplarını alalım. $A \subseteq G$ ve $B \subseteq H$ altgrupları için $\phi$, $A$'dan $B$'ye izomorfizma olsun. Bu takdirde $G$ ve $H$'nin serbest çarpımı; $\phi$ izomorfizması ile $A$ ve $B$ altgruplarının alaşımı olan,

$$\langle x_1, ..., y_1, ... | r_1, ..., s_1, ..., \ a \in A \text{ için } a = \phi(a) \rangle$$

dır. Bu alaşım ile serbest çarpımı

$$\langle G \star H \mid a \in A \text{ olmak üzere } a = \phi(a) \rangle$$

şeklinde yazabiliriz. Alaşım ile serbest çarpım; $G, H, A, B$ ve $\phi$ izomorfizmasına bağlıdır. $G$ ve $H$ gruplarına alaşım ile serbest çarpımın *çarpanları* denir. $A$ ve $B$ altgruplarına *alaşımlanmış altgruplar* denir.

$G$ bir grup ve $A$ ile $B$, $G$'nin iki eşyapılı altgrupları olsun. $\phi$, $A$'dan $B$'ye izomorfizma olmak üzere $G$'nin $A$, $B$ ve $\phi$'a bağlı *HNN genişlemesi*

$$G^\star = \langle G, t \mid a \in A \text{ olmak üzere } t^{-1}at = \phi(a) \rangle$$

grubudur. $G$ grubuna, $G^\star$ grubunun *tabanı*, $t$'ye *kararlı harf* ve $A$ ile $B$ gruplarına *ilişkili altgruplar* denir.

**Örnek 3.13** *$A = \langle a \rangle$ ile $B = \langle b \rangle$ grupları sırasıyla 4. ve 6. mertebeden devirli grup olsun. $A \star B$ serbest çarpımı $\langle a, b \mid a^4 = b^6 = 1 \rangle$ dir. Ayrıca $a^2$ ve $b^3$ elemanlarının mertebesi 2 olduğundan $\langle a^2 \rangle$ ile $\langle b^3 \rangle$ altgrupları birbirine izomorftur. Buradan hareketle alaşım ile G serbest çarpımını $\langle a^2 \rangle \to \langle b^3 \rangle$ izomorfizması aracılığıyla belirleriz. O halde G'nin temsili olarak $\langle a, b \mid a^4 = 1, \ a^2 = b^3 \rangle$ elde edilir.*

**Örnek 3.14** *$G = \langle c \rangle$ sonsuz devirli bir grup olsun. Ayrıca G'nin $A = \langle c^2 \rangle$ ve $B = \langle c^3 \rangle$ altgrupları $c^2 \mapsto c^3$ dönüşümü ile birbirine izomorftur. Bu takdirde HNN- genişlemesi $H = \langle c, p \mid p^{-1}c^2p = c^3 \rangle$ olur.*

Şimdi $G^\star = \langle G, t \mid a \in A$ olmak üzere $t^{-1}at = \phi(a) \rangle$ bir HNN genişlemesi olsun. Ayrıca $g \in G$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olsun.

**Tanım 3.15** *$n \geq 0$ olmak üzere $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ dizisi verilsin. Eğer bu dizinin ardışık alt dizilerinde $g_i \in A$ olmak üzere $t^{-1}, g_i, t$ ya da $g_j \in B$ olmak üzere $t^{-1}, g_j, t$ bulunmuyorsa verilen bu diziye indirgenmiş dizi denir.*

**Lemma 3.16 Britton Lemma**

*$n \geq 1$ ve $g_0, t^{\varepsilon_1}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ indirgenmiş bir dizi olsun. Bu takdirde $G^\star$ grubunda $g_0 t^{\varepsilon_1} \ldots t^{\varepsilon_n} g_n \neq 1$ dir.$\square$*

Ayrıca $g \in G$ için $\bar{g}$ ile $Ag$ kalan sınıfının temsilcisini ve $\hat{g}$ ile $Bg$ kalan sınıfının temsilcisini gösterelim.

**Tanım 3.17** *$n \geq 0$ olmak üzere $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu diziye normal form denir:*

**(i)** *$g_0$, G'nin herhangi bir elemanıdır.*

**(ii)** *Eğer $\varepsilon_i = -1$ ise $g_i$, A'nın G içindeki bir kalan sınıfının temsilcisidir.*

**(iii)** *Eğer $\varepsilon_i = +1$ ise $g_i$, B'nin G içindeki bir kalan sınıfının temsilcisidir.*

**(iv)** *Ardışık alt dizilerde $t^{\varepsilon}$, $1$, $t^{-\varepsilon}$ yoktur.*

**Örnek 3.18** *$F = \langle c,\ d \rangle$ ve $F^\star = \langle c,\ d,\ t \mid t^{-1}ct = d^2 \rangle$ olsun. F'nin içinde c ve $d^2$ sonsuz mertebeli olduğundan $F^\star$, F'nin bir HNN genişlemesidir. $A =$*

*$\langle c\rangle$'nin kalan sınıflarının temsilcilerinden; c ve d üzerindeki kelimelerden c ile başlamayanları seçelim. Yine $B=\langle d^2\rangle$'nin kalan sınıflarının temsilcilerinden; c ve d üzerindeki kelimelerden d'nin kuvvetleri ile başlamayanları seçelim. Ancak d ile başlayabilir.*

$$w = cdt^{-1}c^3td^5cdt^{-1}c^3d^3$$

*olsun. Burada sağdan sola işlemler yaparak w'nın normal formunu hesaplayacağız. $Ac^3d^3$'ün temsilcisi $d^3$ ve $t^{-1}c^3 = d^6t^{-1}$ olduğundan,*

$$w = cdt^{-1}c^3td^5cd^7t^{-1}d^3$$

*dir. Buradan $Bd^5cd^7$'nin temsilcisi $dcd^7$ ve $td^4 = c^2t$ olduğundan,*

$$w = cdt^{-1}c^5tdcd^7t^{-1}d^3$$

*olur. Buradan $t^{-1}c^5t = d^{10}$ olduğundan,*

$$w = cd^{12}cd^7t^{-1}d^3$$

*elde ederiz. Sonuç olarak $cd^{12}cd^7, t^{-1}, d^3$ bir normal formdur.*

**Teorem 3.19 (HNN Genişlemesi için Normal Form Teoremi)**

*$G^\star = \langle G, t \mid a \in A$ olmak üzere $t^{-1}at = \phi(a)\rangle$ bir HNN genişlemesi olsun. Bu takdirde*

**(I)** *G grubu, $g \mapsto g$ dönüşümü ile $G^\star$ içine gömülür. $G^\star$ grubunda $n \geq 1$ olmak üzere $g_0t^{\varepsilon_1}\ldots t^{\varepsilon_n}g_n = 1$ olsun. Bu takdirde $g_0, t^{\varepsilon_1}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ indirgenmiş değildir.*

**(II)** *$G^\star$ grubunun her w elemanı; $g_0, t^{\varepsilon_1}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ bir normal form olmak üzere $w = g_0t^{\varepsilon_1}\ldots t^{\varepsilon_n}g_n$ şeklinde tek türlü ifade edilir.*

**İspat.** [7] $\square$

## 3.3. Gömme Teoremleri

**Teorem 3.20** *(Higman, Neumann, Neumann)*

*Her sayılabilir $C$ grubu; sonsuz mertebeli iki eleman tarafından üretilen bir $K$ grubunun içine gömülebilir. $K$'nın mertebesi sonlu $n$ olan bir elemanının olması için gerek ve yeter şart $C$'nin de mertebesi sonlu $n$ olan bir elemana sahip olmasıdır. Eğer $C$'nin sonlu gösterimi varsa $K$'nın da sonlu gösterimi vardır.*

**İspat.** $C = \{1 = c_0, c_1, c_2, ...\}$ sayılabilir bir grup ve $F$, $\{a, b\}$ kümesi üzerinde bir serbest grup olsun. $H = C \star F$ diyelim.

$$A = \langle a, a^b, a^{b^2}, ...\rangle \text{ ve } B = \langle bc_0, b^a c_1, b^{a^2} c_2, ...\rangle$$

şeklinde tanımlanan $A$ ve $B$ sırasıyla $F$ ve $H$'nin altgruplarıdır. Bu takdirde $\varphi : A \to B$, $\varphi(a^{b^i}) = b^{a^i} c_i$ tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. O halde $K = \langle H, t | \ (a^{b^i})^t = \varphi(a^{b^i}) = b^{a^i} c_i\rangle$ şeklinde bir HNN genişlemesi bulabiliriz. Ayrıca $t^{-1} b^{-i} a b^i t = a^{-i} b a^i c_i$ olduğundan $c_i = a^i b^{-1} a^{-i} t^{-1} b^{-i} a b^i t$ şeklinde yazılabileceğinden $K$ grubu $\{t, a, b\}$ ile üretilir. Ancak $a^t = b$ olduğundan $K$ grubu sonsuz mertebeli $a$ ve $t$ elemanları tarafından üretilir. Ayrıca $C$ grubu, tanımladığımız bu $K$ grubunun bir alt grubudur. Ayrıca serbest çarpım ve HNN genişlemeleri özelliklerinden teoremdeki diğer özellikler sağlanır.

□

**Teorem 3.21** *(B. H. Neumann) İki üreteçli $2^{\aleph_0}$ tane eşyapılı olmayan grup vardır.*

**İspat.** Eş yapılı olmayan grupların sayısını oluşturmak için asal sayıların herhangi bir $P$ sonsuz kümesini alalım. $P = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ diyelim. Ayrıca $C_p = \langle c_1, c_2, ... | c_1^{p_1} = ... = c_i^{p_i} = 1\rangle$ olsun. Yani $C_P$ mertebeleri $p_i \in P$ olan sonsuz çoklukta devirli grupların serbest çarpımı olsun. O zaman $C_P$ grubu, Teorem 3.20'den dolayı iki üreteçli bir $G_P$ grubunun içine gömülebilir. Bu takdirde $C_P$

grubunun ve dolayısıyla $G_P$ grubunun mertebesi sonlu bir $k$ olan elemana sahip olması için gerek ve yeter koşul $k \in P$ olmasıdır. Şimdi asal sayıların farklı bir $Q$ kümesini alalım. Bu takdirde elde edeceğimiz $G_Q$ ile $G_P$ grupları eşyapılı değildir. Asal sayıların kümesini $2^{\aleph_0}$ farklı yolla seçebileceğimiz için iki üreteçli eşyapılı olmayan $2^{\aleph_0}$ sayıda grup vardır. $\square$

# 4. SONSUZ SİMETRİK GRUPLAR

Bu bölümde Otto H. Kegel'in "Regular Limits of Infinite Symmetric Groups" makalesinde tanımlanan düzenli limit grubunu ve yine bu makalede yer alan düzenli limit grubu ile ilgili tanım ve teoremleri inceleyeceğiz. Tüm $\nu$ ordinalleri için $\kappa_{\nu+1} = 2^{\kappa_\nu}$ ve $\lambda$ limit ordinalleri için $\kappa_\lambda = \sup\{\kappa_\nu : \nu < \lambda\}$ olan $\{\kappa_\nu\}$ sonsuz kardinallerinin bir dizisini alalım. Bu çalışmamızda, her $\nu$ ordinali için $S_{\nu+1} := \mathrm{Sym}(S_\nu)$ ve eğer $\lambda$ bir limit ordinal ise $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ olan $\{S_\nu\}$ gruplarının dizilerinin yapıları ile uğraşacağız. Burada $\rho_\nu : S_\nu \hookrightarrow \mathrm{Sym}(S_\nu)$ sağ düzenli temsil olmak üzere $\{(S_\nu, \rho_\nu) \mid \nu < \lambda\}$ direkt sistemi elde edilir. Bu direkt sistemden de $S_\lambda = \cup_{\nu<\lambda} S_\nu$ direkt limit grubu tanımlanır. Bu $S_\lambda$ limit grubuna düzenli limit grubu denir.

## 4.1. $\lambda$ limit ordinali için $S_\lambda$'nın sınırlı altgrupları

**Tanım 4.1** *$\lambda$ limit ordinal olsun. $S_\lambda$ düzenli limit grubunda $B \subseteq S_\nu$ olacak şekilde $\nu < \lambda$ varsa $B$ altgrubuna $S_\lambda$'nın sınırlı altgrubu denir.*

**Önerme 4.2** *(Kegel) $S_\lambda$'nın sonlu üreteçli her altgrubu ve sonlu çoklukta sınırlı altgrubu tarafından üretilen altgrubu sınırlıdır.*

**İspat.** $S_\lambda$ düzenli limit grubunda $\nu < \lambda$ ise $S_\nu < S_\lambda$ olduğundan sonlu üreteçli her altgrubu da sınırlıdır. Buradan hareketle $S_\lambda$'nın sonlu çoklukta sınırlı altgrubu tarafından üretilen altgrubu sınırlıdır. □

**Önerme 4.3** *(Kegel) $B$, $S_\lambda$'nın sınırlı altgrubu olsun. Yani $\nu < \lambda$ için $B \subseteq S_\nu \subset S_\lambda$ olsun. O zaman*

$$B \subseteq \langle X_B, Y_B \rangle = X_B \times Y_B = BX_B = BY_B \text{ ve } B \cap X_B = B \cap Y_B = \langle 1 \rangle$$

*olacak şekilde $S_{\nu+2}$'de $B$'ye izomorf $X_B$ ve $Y_B$ altgrupları vardır.*

**İspat.** $B \subseteq S_\nu \subset S_\lambda$ ve $|S_{\nu+1}| = \kappa_{\nu+1}$ olduğundan yarıdüzenli B altgrubunun $S_{\nu+1}$'de $sB$ şeklinde $\kappa_{\nu+1}$ sayıda sol kalan sınıfı vardır. $\mathfrak{L}$ ile $B$'nin $S_{\nu+1}$ içindeki sol kalan sınıflarının kümesini gösterelim. $\mathfrak{L}$ kümesini eş güçlü olan iki ayrık $\mathfrak{M}$ ve $\mathfrak{N}$ kümelerine ayıralım.

Şimdi $x(b) \in X_B$'yi tanımlayalım. $b \in B$ olmak üzere

$$sB \in \mathfrak{M} \text{ için}, \quad x(b): \begin{array}{ccc} sB & \to & sB \\ sx & \mapsto & sxb \end{array} \quad \text{ve } sB \in \mathfrak{N} \text{ için}, \quad x(b): \begin{array}{ccc} sB & \to & sB \\ sx & \mapsto & sx \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi $y(b) \in Y_B$'yi tanımlayalım. $b \in B$ olmak üzere

$$sB \in \mathfrak{N} \text{ için}, \quad y(b): \begin{array}{ccc} sB & \to & sB \\ sx & \mapsto & sxb \end{array} \quad \text{ve } sB \in \mathfrak{M} \text{ için}, \quad y(b): \begin{array}{ccc} sB & \to & sB \\ sx & \mapsto & sx \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla $b = (x(b), y(b)) = x(b)y(b)$ dir. Bu takdirde $B \subseteq \langle X_B, Y_B \rangle = X_B \times Y_B = BX_B = BY_B$ ve $B \cap X_B = B \cap Y_B = \langle 1 \rangle$ dir. Ayrıca $X_B, Y_B \in S_{\nu+2} = \mathrm{Sym}(S_{\nu+1})$ ve $B \cong X_B \cong Y_B$ dir. □

**Önerme 4.4** *(Kegel) A ve B, $S_\lambda$ grubunun iki sınırlı altgrubu ve $\varphi$, A ile B arasında bir izomorfizma olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $\varphi(a) = x^{-1}ax$ olacak şekilde bir $x \in S_{\nu+2}$ permütasyonu vardır.*

**İspat.** $A$ ve $B$ sınırlı altgrup olduğundan $A$, $B \subseteq S_\nu$ dir. Bu durumda $A$ ve $B$'nin $S_{\nu+1}$ içinde $\kappa_{\nu+1}$ sayıda sol kalan sınıfı vardır. Bu kalan sınıflarının temsilcilerini $m_i$ ve $n_i$, $i \in I$ ve $|I| = \kappa_{\nu+1}$ olacak şekilde belirleyelim. Burada sırasıyla $\mathfrak{M}$ ile $\mathfrak{N}$'yi $A$ ile $B$'nin $S_{\nu+1}$ içindeki sol kalan sınıflarının kümesini gösterelim. Bu durumda $\mathfrak{M}$'den $\mathfrak{N}$'ye, $m_iA \mapsto n_iB$ olacak şekilde birebir ve örten bir fonksiyon belirleyebiliriz. Şimdi $S_{\nu+1}$ üzerinde gerekli olan $x$ permütasyonunu tanımlayalım. $S_{\nu+1} = \bigcup_{i \in I} m_iA = \bigcup_{i \in I} n_iB$ olduğundan, her $a \in A$ için $(m_ia)x = n_i\varphi(a)$ şeklinde tanımladığımız bu fonksiyon birebir ve örtendir. Bu takdirde $x \in \mathrm{Sym}(S_{\nu+1}) = S_{\nu+2}$ dir. Her $a, a' \in A$ için

$$((m_ia)x)x^{-1}a'x = (m_iaa')x = n_i\varphi(aa') = n_i\varphi(a)\varphi(a')$$

dir. Bu takdirde her $a' \in A$ için $\varphi(a') = x^{-1}a'x$ elde edilir. □

**Önerme 4.5** *(Kegel) A ve B, $S_\lambda$ grubunun sınırlı altgrupları olsun. Bu takdirde $A_1 \cap B = \langle 1 \rangle$ ve $A_1 \leq C_{S_\lambda}(B)$ olacak şekilde A'nın bir $A_1$ eşleniği vardır.*

**İspat.** $A$ ve $B$ sınırlı altgruplar olduğu için Önerme 4.2'den dolayı $C := \langle A, B \rangle$ de $S_\lambda$'nın sınırlı bir altgrubudur. $C$ sınırlı altgrup olduğu için Önerme 4.3'ten dolayı

$$C \subseteq \langle X_C, Y_C \rangle = X_C \times Y_C = CX_C = CY_C \text{ ve } C \cap X_C = C \cap Y_C = \langle 1 \rangle$$

olacak şekilde $C$'ye izomorfik $X_C$ ve $Y_C$ sınırlı altgrupları vardır. Önerme 4.4'ten dolayı $X_C$ ve $Y_C$ grupları $C$'nin eşlenikleridir. Bu takdirde $X_C = C^{g_1}$ ve $Y_C = C^{g_2}$ olacak şekilde $g_1$, $g_2$ permütasyonları vardır. $X_C$ ve $Y_C$ kendi aralarında değişmeli olduğundan $X_C \leq C_{S_\lambda}(Y_C)$ dir. Buradan $(C^{g_1})^{g_2^{-1}} \leq C_{S_\lambda}(C)$ elde edilir. $C_1 = (C^{g_1})^{g_2^{-1}}$ diyelim. Ayrıca $A \leq C = \langle A, B \rangle$ olduğundan $C_{S_\lambda}(A) \geq C_{S_\lambda}(C)$ dir. Sonuç olarak $C_1 \leq C_{S_\lambda}(C) \leq C_{S_\lambda}(A)$ ve $C_1 \cap A \subseteq C_1 \cap C = \langle 1 \rangle$ olacak şekilde $C$'nin bir $C_1$ eşleniği vardır. O halde $C_1 \leq C_{S_\lambda}(A)$ ve $C_1 \cap A = \langle 1 \rangle$ elde ederiz. □

**Önerme 4.6** *(Kegel) $|G| < \kappa_\lambda$ olan her G grubu ve $S_\nu$'nün herhangi bir sınırlı altgrubu $B \subseteq S_\nu$ için, $G_1 \leq C_{S_\lambda}(B)$ ve $G_1 \cong G$ olacak şekilde bir $G_1$ sınırlı altgrubu vardır.*

**İspat.** $|G| < \kappa_\lambda$ olduğundan, $G$ grubu içinde $|G| \leq \kappa_\nu$ olacak şekilde bir $\nu < \lambda$ vardır. Bu durumda $G$'nin bir izomorfik kopyası $S_\lambda$'nın sınırlı bir grubudur. Çünkü kardinalitesi $\kappa_\nu$'den küçük eşit olan bir grubun $\nu$ limit ordinal olmadığı durumda $\mathrm{Sym}(S_\nu) = S_{\nu+1}$ içinde bir kopyası vardır. Bu durumda Önerme 4.6, Önerme 4.5'in bir sonucu olur. □

**Tanım 4.7** *$\alpha : S_\lambda \to S_\lambda$ bir endomorfizma ve B, $S_\lambda$'nın herhangi bir sınırlı altgrubu olsun. Eğer verilen herhangi bir $b \in B$ için $\alpha(b) = s^{-1}bs$ olacak şekilde bir $s \in S_\lambda$ varsa $\alpha$'ya sınırlı iç endomorfizma denir.*

$S_\lambda$'nın her sınırlı iç endomorfizması birebirdir. Gerçekten $\ker \alpha = 1$ olduğunu gösterelim:

$g \in \ker \alpha$ alalım. $g \in S_\lambda = \cup_{\mu<\lambda} S_\mu$ olduğundan $\langle g \rangle$ sınırlı altgruptur. $\alpha$ sınırlı iç endomorfizma olduğundan $\alpha(g) = s^{-1} g s$ olacak şekilde $s \in S_\lambda$ vardır. O halde $\alpha(g) = 1$ olduğundan $g = 1$ dir.

**Önerme 4.8** *(Kegel) $B$, $S_\lambda$'nın sınırlı bir altgrubu ve $C = C_{S_\lambda}(B)$ olsun. Bu takdirde $\alpha(S_\lambda) \subseteq C$ ve $\alpha(S_\lambda) \cap B = \langle 1 \rangle$ olacak şekilde $S_\lambda$'nın bir $\alpha$ iç endomorfizması vardır.*

**İspat.** $\alpha$'yı $\rho \leq \lambda$ olmak üzere her $S_\rho$ üzerinde transfinite tümevarım ile tanımlayacağız. $\nu_0$, $B \subseteq S_{\nu_0}$ gerçekleyen ilk ordinal olsun. $B$ sınırlı altgrup olduğundan $\nu_0 < \lambda$ dır. $S_{\nu_0}$ ve $B$ sınırlı altgrup olduğu için Önerme 4.5'ten $x_{\nu_0}^{-1} S_{\nu_0} x_{\nu_0} \subseteq C$ ve $x_{\nu_0}^{-1} S_{\nu_0} x_{\nu_0} \cap B = \langle 1 \rangle$ olacak şekilde $S_{\nu_0}$'ın bir $x_{\nu_0}^{-1} S_{\nu_0} x_{\nu_0}$ eşleniği vardır. Ayrıca $s \in S_{\nu_0}$ için $\alpha(s) = s^{x_{\nu_0}} = x_{\nu_0}^{-1} s x_{\nu_0}$ diyebiliriz. $B \leq S_{\nu_0}$ olduğundan her $b \in B$ için $\alpha(b) = x_{\nu_0}^{-1} b x_{\nu_0}$ olur. Bu takdirde $\alpha$ sınırlı iç endomorfizmadır. $\rho = \sigma + 1$ ve $S_\sigma$ üzerinde $\alpha$ endomorfizması tanımlı olsun. $\alpha$'yı $S_{\sigma+1}$ üzerinde tanımlayalım. $S_\rho$ sınırlı bir altgruptur. Önerme 4.5'ten dolayı $x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho \subseteq C$ ve $x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho \cap B = \langle 1 \rangle$ olacak şekilde $S_\rho$'nun bir $x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho$ eşleniği vardır. $\alpha(S_\sigma)$ ve $x_\rho^{-1} S_\sigma x_\rho$, $C$'nin birbirine izomorf altgruplardır. Bu iki altgrup arasındaki izomorfizmayı direkt çarpıma genişletebiliriz. Bu takdirde $\theta : \alpha(S_\sigma) \to x_\rho^{-1} S_\sigma x_\rho$ bir izomorfizma ise

$$\begin{array}{cccc} \bar{\theta} & : & \alpha(S_\sigma) \times B & \to & x_\rho^{-1} S_\sigma x_\rho \times B \\ & & (\alpha(s), b) & \mapsto & (\theta(\alpha(s)), b) \end{array}$$

şeklindedir. Sonuç olarak $\alpha(S_\sigma) \times B$ ve $x_\rho^{-1} S_\sigma x_\rho \times B$ birbirine izomorf olur. $\alpha(S_\sigma) \leq S_\sigma$ ve $B$ sınırlı olduğundan bunların direkt çarpımı da sınırlıdır. Önerme 4.4'ten dolayı $\forall s \in S_\sigma$ için $\alpha(s) = t^{-1}(x_\rho^{-1} s x_\rho) t$ olacak şekilde bir $t \in C$ vardır. $\alpha(s) = (x_\rho t)^{-1} s (x_\rho t), t \in C$ olduğundan $(x_\rho t) \in S_\lambda$'nın bu eşleniği ile $\alpha$'yı $S_\rho$'ya genişletebiliriz. $x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho \subseteq C$ ve $x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho \cap B = \langle 1 \rangle$ olduğundan $t \in C$ olmak üzere $t^{-1} x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho t \subseteq t^{-1} C t = C$ ve $t^{-1} x_\rho^{-1} S_\rho x_\rho t \cap t^{-1} B t = \langle 1 \rangle$ elde edilir. Şimdi $\rho$ bir limit ordinal ve $\nu < \rho$ olmak üzere $\alpha$ tüm $S_\nu$ üzerinde tanımlı olsun. Ayrıca herhangi limit ordinal olmayan $\nu_0 \leq \nu \leq \tau < \rho$ olan $\nu$ ve $\tau$ için ispatın ilk kısmındaki hipotezden,

$x_\nu^{-1} S_\nu x_\nu$, $x_\tau^{-1} S_\tau x_\tau \subseteq C$, $x_\nu^{-1} S_\nu x_\nu \cap B = x_\tau^{-1} S_\tau x_\tau \cap B = \langle 1 \rangle$ ve $\alpha(s) = x_\nu^{-1} s x_\nu = x_\tau^{-1} s x_\tau$ olacak şekilde $x_\nu, x_\tau$ vardır. $s \in S_\rho$ olmak üzere her $\nu_0 \leq \nu < \rho$ olan $\nu$ limit ordinali için $\alpha(s) = x_\nu^{-1} s x_\nu$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $\alpha$ endomorfizması transfinite tümevarım ile bütün $S_\lambda$ üzerinde tanımlanmış olur. Ayrıca $\alpha$ tanımından dolayı $S_\lambda$'nın sınırlı iç endomorfizmasıdır. □

**Önerme 4.9** *(Kegel) $S_\lambda$'nın sayılabilir sonsuz mertebeli bir $H$ altgrubunun sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $H$ grubunun, $S_\lambda$'nın sonlu üreteçli bir altgrubunun içinde olmasıdır.*

**İspat.** $H$ grubu $S_\lambda$'nın sayılabilir sonsuz mertebeli sınırlı bir altgrubu olsun. $H$ grubunu, Teorem 3.20'den dolayı sonlu üreteçli bir $F$ grubunun içine gömebiliriz. $S_\lambda$ grubunu oluşturuken başlangıç olan $S_1$ simetrik grubunu alalım. Cayley Teoremi'nden dolayı $\varphi : F \to S_1$ bir $\varphi$ gömme fonksiyonu vardır. Ayrıca $\varphi(H)$ ve $H$ grupları $S_1$ içinde izomorfik sınırlı altgruplardır. Önerme 4.4'ten dolayı bu gruplar arasında tanımlanan $\alpha$ izomorfizması, $S_\lambda$'nın bir iç otomorfizmasıdır. Sonuç olarak $S_\lambda$'nın sonlu üreteçli altgrubu olan $\alpha(\varphi(F))$, $H$ grubunu içerir.

$S_\lambda$'nın Önerme 4.2'den dolayı her sonlu üreteçli altgrubu sınırlı olduğundan bu grubun her altgrubu da sınırlıdır. □

**Önerme 4.10** *(Kegel) $S_\lambda$'nın her $\rho \leq \lambda$ limit ordinali için $S_\rho$ altgrubu basit bir gruptur.*

**İspat.** $\nu < \lambda$ için $S_{\nu+1}$ simetrik grubunun bir tek $\mathbf{M}_{\nu+1}$ maksimal normal altgrubu vardır.

$$\mathbf{M}_{\nu+1} = \{g \in S_{\nu+1} | \mid Suppg \mid \leq \kappa_\nu\}$$

Ayrıca $S_{\nu+1}$'in yarıdüzenli altgrubu $S_\nu$ için $S_\nu \cap \mathbf{M}_{\nu+1} = \langle 1 \rangle$ dir. Her $s \in S_\nu$ için $\langle s \rangle^{S_{\nu+1}} = S_{\nu+1}$ dir. Şimdi $\rho$ limit ordinali için, $\forall \mu < \rho$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle^{S_\rho} &\geq S_\mu \\
\langle s \rangle^{S_\rho} &\geq \bigcup_{\mu<\rho} S_\mu = S_\rho \\
\langle s \rangle^{S_\rho} &= S_\rho
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde $S_\rho$ basit bir gruptur. □

Benzer şekilde $\lambda$ limit ordinali için $S_\lambda = \bigcup S_\rho$ yazılabilir ve bu iyi sıralıdır. İyi sıralı basit gruplar zinciri de basit bir gruptur. $S_\lambda$ basit bir gruptur.

## 4.2. Varlıksal Kapalı Gruplar

$X$ serbest grubunun üreteçlerinin kümesi $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ olsun. $G * X$ serbest çarpım grubunun birim elemandan farklı elemanlarına *G grubu üzerinde kelime* denir. Her kelime sadece sonlu tane $x_i$ ve $x_i^{-1}$ değişkenleri ile $g \in G$'lerden oluşur. $w \in G * X$ kelimesi için "$w = 1$" ifadesine *G üzerinde bir eşitlik*, "$w \neq 1$" ifadesine *G üzerinde eşitsizlik* denir. $\Xi$, $G$ üzerinde tanımlanan eşitlik ve eşitsizliklerden oluşan sonlu bir sistem olsun. Eğer $G \subseteq H$ olmak üzere $\Xi$ içindeki her eşitlik ve eşitsizlik için $\sigma : x_i \mapsto h_i$, $i \in \mathbb{N}$ yapıldığında $\Xi$ içindeki her eşitlik 1'e eşit ve her eşitsizlik 1'den farklı olacak şekilde bir $h_i$, $i \in \mathbb{N}$ varsa $\Xi$ sonlu sistemi, $G \subseteq H$ grubunda çözülebilirdir. Ayrıca $\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ kümesine $\Xi$ sisteminin $H$ içindeki çözüm kümesi denir. Bir başka deyişle $\Xi$ sistemi içindeki ifadelerde her $x_i$ değişkeni yerine $h_i$ konulduğunda denklemler çözülmüş olur.

**Tanım 4.11** *G bir grup ve H, G'yi içeren bir üst grup olsun. Eğer G üzerindeki eşitlik ve eşitsizliklerden oluşan her $\Xi$ sonlu sisteminin H'de çözülebilir olduğu durumlarda G'de de bir çözümü varsa G grubuna H grubu içinde varlıksal kapalı grup denir. Eğer G, kendisini içeren bütün gruplar içinde varlıksal kapalı ise G grubu varlıksal kapalıdır.*

Mertebesi sonsuz olan her grup aynı mertebeden varlıksal kapalı bir grubun içine gömülebilir.( [10]) Her sonlu grup ve sonlu temsili olan her basit grup, varlıksal kapalı bir grubun altgrubu olarak görülebilir.( [1]) Her sonlu grubu, sonlu üreteçli bir $F$ serbest grubunun homomorfik görüntüsü olarak görebileceğimiz için sonlu grupları varlıksal kapalı grubun içinde görebiliriz. Onların sağladığı denklemleri $x_i$ değişkenleri cinsinden düşünüp varlıksal kapalı grup içinde çözüm olduğu için $G$'nin elemanları bir çözüm kümesi gibi görülebilir.

**Tanım 4.12** *$G$ bir grup ve $A$ ile $B$, $G$'nin sonlu üreteçli izomorfik altgrupları olsun. Bu durumda $A$'dan $B$'ye verilen herhangi bir $\alpha$ izomorfizması, $G$'nin bir iç otomorfizmasının $A$'ya kısıtlanışı ise $G$ grubuna homojen denir.*

**Lemma 4.13** *(Kegel) Her $E$ varlıksal kapalı grubu homojendir.*

**İspat.** $A$ ile $B$ varlıksal kapalı bir $E$ grubunun sonlu üreteçli iki altgrubu olsun. Ayrıca $\alpha$, $A$'dan $B$'ye bir izomorfizma olsun. $A$ grubunun üreteçlerinin kümesi $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olsun. $\alpha$ bir izomorfizma olduğundan $\{\alpha(a_1), \alpha(a_2), ..., \alpha(a_n)\}$ kümesi $B$ grubunun bir üreteç kümesidir. $E$ grubunu $\mathrm{Sym}(E)$ grubu içine sağ düzenli temsil ile gönderdiğimizde $\mathrm{Sym}(E)$, $E$ grubunun bir üst grubu olur.

$$\Xi := \{x^{-1}a_i^{-1}x\alpha(a_i) = 1 \mid i = 1, 2, ..., n\}$$

sistemi Önerme 4.4 ve HNN-Genişlemesi'nden dolayı bu üst grupta çözülebilirdir. Ancak $E$ grubu varlıksal kapalı olduğu için bu çözüm $E$ için de vardır. Bu durumda $E$ grubu içinde $A$ ve $B$ grupları arasındaki $\alpha$ izomorfizması, $E$'nin bir iç otomorfizması olur. Dolayısıyla $E$ grubu homojendir. $\square$

**Teorem 4.14** *(Kegel) $G$ grubu homojen ve sonlu üreteçli her grubun bir kopyasını altgrup olarak içersin. Bu takdirde $G$ varlıksal kapalı bir gruptur.*

**İspat.** $\Xi$, $G$ üzerindeki eşitlik ve eşitsizliklerden oluşan sonlu sistem olsun. $\Xi$ sistemi, $G$'yi içeren $H$ grubu içinde çözülebilir olsun. Bu takdirde $\{h_1, h_2, ..., h_n\} \subseteq$

$H$ olacak şekilde $\Xi$ sisteminin bir çözüm kümesi vardır. $C$ ile $\Xi$ sonlu sistemindeki $G$'nin elemanları tarafından üretilen grubu gösterelim. $F := \langle C, h_1, h_2, ..., h_n \rangle$, $H$'nin sonlu üreteçli bir altgrubudur. Teoremin hipotezinden dolayı, her sonlu üreteçli grubun $G$ içinde bir kopyası olduğundan $\varphi$, $F$'den $G$'ye birebir homomorfizması vardır. $C \leq G \leq H$ olduğundan $C$ ile $\varphi(C)$, $G$ içinde birbirine izomorf sonlu üreteçli altgruplardır. $G$ homojen olduğundan, $\forall c \in C$ için $g^{-1}(\varphi(c))g = c$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Fakat $\varphi(F)$, $G$'nin bir altgrubu olduğu için $g^{-1}\varphi(F)g$ de $G$'nin bir altgrubudur. $\varphi(F) \leq G$ olduğundan $\varphi(h_1), ..., \varphi(h_n) \in G$ dir. Dolayısıyla $g^{-1}\varphi(h_i)g \in G$ dir. Bu takdirde $\{g^{-1}\varphi(h_i)g \mid i = 1, 2, ..., n\}$ kümesi $\Xi$'nin $G$'de çözüm kümesi olur. Dolayısıyla $G$ varlıksal kapalı bir gruptur.

□

**Sonuç 4.15** *Her sonsuz limit ordinal $\lambda$ için $S_\lambda$ düzenli limit grubu varlıksal kapalı bir gruptur.*

**İspat.** Önerme 4.2 ve Önerme 4.4'ten dolayı $S_\lambda$ yukarıdaki teoremin hipotezlerini sağlar. Dolayısıyla $S_\lambda$ varlıksal kapalı bir gruptur. □

## 4.3. Evrensel Gruplar

**Tanım 4.16** *Mertebesi kendisinden küçük eşit olan bütün grupların izomorfik kopyasını içeren gruba evrensel grup denir.*

$U$ evrensel grubunu içeren ve kardinalitesi $U$'nun kardinalitesine eşit olan her grup evrenseldir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere sonlu mertebeli evrensel grubun mertebesi 2'dir. Bu durumda şu soru ilginç olmaktadır. Hangi $\kappa$ kardinali için kardinalitesi $\kappa$ olan evrensel grup vardır? Ayrıca $U$ evrensel grubunda birbiri ile eşyapılı olmayan sonlu üreteçli $2^{\aleph_0}$ tane grup vardır.( [7]) Buradan hareketle bu grupların her birinin evrensel grup $U$'nun içinde bir kopyası olacağından $|U| \geq 2^{\aleph_0}$ olmalıdır.

**Tanım 4.17** *$\alpha_\nu$, $\nu < \lambda$ homomorfizma olmak üzere $\{\alpha_\nu \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisi olsun. Eğer bu dizide $\forall \mu < \nu < \lambda$ için $g \in G_\mu$ olmak üzere $\alpha_\nu(g) = \alpha_\mu(g)$ ise $\{\alpha_\nu \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisine düzgün dizi denir.*

**Teorem 4.18** *(Kegel) Her sonsuz limit ordinal $\lambda$ için $S_\lambda$ düzenli limit grubu evrenseldir.*

**İspat.** $G$, kardinalitesi $\kappa_\lambda$'dan küçük ya da eşit olan herhangi bir grup olsun. $|G| < \kappa_\lambda$ ise $|G| \leq \kappa_\nu$ olacak şekilde bir $\nu < \lambda$ vardır. Bu durumda Önerme 4.6'dan dolayı $\alpha : G \to S_{\nu+1}$ olacak şekilde bir birebir $\alpha$ homomorfizması vardır. Buradan $\alpha(G) \leq S_{\nu+1} < S_\lambda$ olur ki $G$'nin bir kopyası $S_\lambda$'nın içinde olur. Bu takdirde $S_\lambda$ evrensel bir gruptur.

Şimdi $|G| = \kappa_\lambda$ olduğunda $S_\lambda$ düzenli limit grubunun evrensel olduğunu gösterelim. Bu durumda $G$'nin altgruplarından oluşan $|G_\nu| = \kappa_\nu$ ve her $\rho \leq \lambda$ limit ordinali için $G_\rho = \bigcup_{\nu<\rho} G_\nu$ olan bir $\{G_\nu \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisi vardır. Dolayısıyla her $\nu < \lambda$ ordinali için $\alpha_\nu : G_\nu \to S_{\nu+1}$ birebir homomorfizması vardır. Şimdi bu homomorfizmalardan elde ettiğimiz $\{\alpha_\nu \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisini inceleyelim. Eğer $\{\alpha_\nu \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisi düzgün ise, $\bar{\alpha} := \bigcup_{\nu<\lambda} \alpha_\nu$, $G$'den $S_\lambda$'ya birebir bir homomorfizma olur. Yani $G$'nin bir kopyası $S_\lambda$'nın içinde olur. Bu takdirde $S_\lambda$ evrensel bir gruptur.

Şimdi "düzgün olmayan" birebir homomorfizmaların bir dizisi varsa bu diziden nasıl "düzgün" bir dizi elde edebileceğimizi gösterirsek yine yukarıdaki paragrafı kullanarak $G$'nin $S_\lambda$'nın içine gömülebileceğini elde etmiş oluruz. Bu da bize $S_\lambda$'nın evrensel olduğunu gösterir. Bu düşünce ile transfinite tümevarım kullanarak verilen herhangi bir $\{\alpha_\nu \mid \nu < \lambda\}$, $\alpha_\nu : G_\nu \to S_{\nu+1}$, $\lambda$-dizisinden bir $\{\bar{\alpha_\nu} \mid \nu < \lambda\}$ düzgün olan dizi oluşturacağız. Diyelim ki aldığımız bu dizi düzgün olmasın. $\rho$ ordinali $\alpha_\rho$'nun düzgün olmayan ilk ordinali olsun. Her $\nu < \rho$ için $\{\alpha_\nu \mid \nu < \rho\}$ düzgün olsun. Fakat $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\rho\}$ $\rho+1$-dizisi düzgün değildir. Şimdi $\nu < \rho$ için $\bar{\alpha_\nu} := \alpha_\nu$ olarak alalım. $\rho$ bir limit ordinal ise $\bar{\alpha_\rho} := \bigcup_{\nu<\rho} \bar{\alpha_\nu}$ şeklinde tanımlarız. Bu durumda $G$'nin bir kopyası $S_\lambda$'nın içinde olur. Bu takdirde $S_\lambda$ evrensel bir gruptur.

$\rho$ bir limit ordinal olmasın. Bu takdirde $\rho = \mu + 1$ olacak şekilde bir $\mu$ ordinali vardır. $\alpha_\rho$ ve $\bar{\alpha_\mu}$ birebir homomorfizmalar olduğu için $S_{\mu+1}$'in $\alpha_\rho(G_\mu)$ ve $\bar{\alpha_\mu}(G_\mu)$ altgrupları birbirine izomorftur. Önerme 4.4'ten dolayı $\forall g \in G_\mu$ için $\bar{\alpha_\mu}(g) = x^{-1}\alpha_\rho(g)x$ olacak şekilde $x \in S_{\mu+3}$ vardır. Ayrıca $\alpha_\rho$ birebir homomorfizması yardımıyla $\bar{\alpha_\rho} := i_x \circ \alpha_\rho$ şeklinde tanımlanırsa $\bar{\alpha_\rho} : G_\rho \to S_{\rho+2}$, $\bar{\alpha_\mu}$'nin bir genişlemesidir. Gerçekten $\forall h \in G_\mu$ için

$$\bar{\alpha_\rho}(h) = (i_x \circ \alpha_\rho)(h) = x^{-1}\alpha_\rho(h)x = \bar{\alpha_\mu}(h) = \alpha_\mu(h)$$

dir. Bu takdirde $\{\bar{\alpha_0}, \bar{\alpha_1}, ..., \bar{\alpha_\mu}, \alpha_{\bar{\mu+1}}\}$ $\mu+2 = \rho+1$-dizisi düzgün olur. Dolayısıyla transfinite tümevarımdan dolayı $\{\bar{\alpha_\nu} \mid \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisi düzgün olur.

$\bar{\bar{\alpha}} := \bigcup_{\nu<\lambda} \bar{\alpha}_\nu$, $G$'den $S_\lambda$'ya birebir bir homomorfizma olur. Bu durumda $G$'nin bir kopyası $S_\lambda$'nın içinde olur. Bu takdirde $S_\lambda$ evrensel bir gruptur. $\square$

Şimdi kardinalitesi $\kappa_\lambda$ olan $T = T_\lambda$ grubunu alalım. Ayrıca $|T_\nu| = \kappa_\nu$, $T_\nu \subset T_{\nu+1}$ ve her $\rho \leq \lambda$ limit ordinali için $T_\rho := \bigcup_{\nu<\rho} T_\nu$ olan $T$'nin $T_\nu$ altgruplarının bir $\{T_\nu | \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisini oluşturalım.

**Tanım 4.19** *$S_\lambda$ düzenli limit grubunu ve $\{T_\nu | \nu < \lambda\}$ $\lambda$-dizisi olmak üzere $T = T_\lambda$ grubunu alalım. Bu takdirde*

**(a)** *Her $\nu < \lambda$ için bir $\beta_\nu : S_\nu \to T_{\nu+1}$ birebir homomorfizması varsa ve*

**(b)** *$X \subset T_{\nu+2}$ ve $\varphi : X \to T_\nu$ herhangi bir izomorfizma olsun. O zaman verilen herhangi bir $x \in X$ için $\varphi(x) = f^{-1}xf$ olacak şekilde bir $f \in T_{\nu+3}$ elemanı varsa,*

*bu $T = T_\lambda$ grubuna, $S_\lambda$ düzenli limit grubunun bir ikizi denir.*

**Teorem 4.20** *(Kegel) Kardinalitesi $\kappa_\lambda$ olan $T = T_\lambda$ grubu, $S_\lambda$ düzenli limit grubunun bir ikizi olsun. O zaman $T = T_\lambda$ grubunun bir $\lambda$-dizisi vardır. Bu takdirde her $\rho \leq \lambda$ sonsuz limit ordinali için $\bar{\alpha}(T_\rho) = S_\rho$ olmak üzere bir $\bar{\alpha} : T \to S_\lambda$ izomorfizması vardır.*

**İspat.** Teoremin ispatını Cantor'ın back and forth methodu ile yapacağız. Bu düşünceyle amacımız; $\{\bar{\alpha}_\nu | \, \bar{\alpha}_\nu : T_\nu \to S_{\nu+2}\}$ ve $\{\bar{\beta}_\nu | \, \bar{\beta}_\nu : S_\nu \to T_{\nu+2}\}$ birebir homomorfizmalarından oluşan düzgün ailelerinde, $\bar{\beta}_{\nu+2} \circ \bar{\alpha}_\nu$'nin $T_\nu$ üzerinde ve $\bar{\alpha}_{\nu+2} \circ \bar{\beta}_\nu$'nin $S_\nu$ üzerinde birim dönüşüm olduğunu göstermektir. Böylece $T_\nu$'den $S_\nu$'ye bir izomorfizma oluşturabileceğiz. Bunun için ilk olarak $\alpha_1 : T_1 \to S_2$ birebir homomorfizmasını alalım. O zaman $\bar{\alpha}_1 : T_1 \to S_3$ şeklindedir. Benzer şekilde $\beta_3 : S_3 \to T_4$ birebir homomorfizmasını da alabiliriz. $\varphi := (\beta_3 \circ \alpha_1)^{-1}$ diyelim. Bu takdirde $\varphi$, $\beta_3(\alpha_1(T_1))$'den $T_1$'e bir izomorfizmadır. Ancak

$\beta_3(\alpha_1(T_1)) \subset T_4$ ve $\varphi$ bir izomorfizma olduğundan ikiz olmanın (b) koşulundan, $i_g\,|_{\beta_3(\alpha_1(T_1))} = \varphi$ olacak şekilde bir $i_g$, $g \in T_5$ iç otomorfizması vardır. Şimdi $\bar{\beta}_3 := i_g \circ \beta_3$ diyelim. Ayrıca $\forall x \in T_1$ için

$$\begin{aligned}(\bar{\beta}_3 \circ \bar{\alpha}_1)(x) &= \bar{\beta}_3(\bar{\alpha}_1(x)) \\ &= i_g \circ \beta_3(\bar{\alpha}_1(x)) \\ &= i_g(\beta_3(\alpha_1(x))) \\ &= g^{-1}\beta_3(\alpha_1(x))g \\ &= g^{-1}\varphi^{-1}(x)g = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x\end{aligned}$$

bulunur ki $\bar{\beta}_3 \circ \bar{\alpha}_1$, $T_1$ üzerinde birim dönüşümdür. Şimdi de $\alpha_5 : T_5 \to S_6$ birebir homomorfizmasını alalım. O zaman $\psi := (\alpha_5 \circ \bar{\beta}_3)^{-1}$, $\alpha_5(\bar{\beta}_3(S_3))$'ten $S_3$'e bir izomorfizmadır. Ancak $\alpha_5(\bar{\beta}_3(S_3)) \subset S_6$ ve $\psi$ bir izomorfizma olduğundan ikiz olmanın (b) koşulundan $j_h\,|_{\alpha_5(\bar{\beta}_3(S_3))} = \psi$ olacak şekilde bir $j_h$, $h \in S_7$ iç otomorfizması vardır. Şimdi $\bar{\alpha}_5 := j_h \circ \alpha_5$ diyelim. Ayrıca $\forall x \in S_3$ için

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha}_5 \circ \bar{\beta}_3)(x) &= \bar{\alpha}_5(\bar{\beta}_3(x)) \\ &= j_h \circ \alpha_5(\bar{\beta}_3(x)) \\ &= h^{-1}(\alpha_5(\bar{\beta}_3(x))h \\ &= h^{-1}\psi^{-1}(x)h = \psi(\psi^{-1}(x)) = x\end{aligned}$$

bulunur ki $\bar{\alpha}_5 \circ \bar{\beta}_3$, $S_3$ üzerinde birim dönüşümdür. Ayrıca $\bar{\alpha}_5$, $\bar{\alpha}_1$'in bir genişlemesidir. Bu takdirde tümevarımdan $\bar{\beta}_{n+2} \circ \bar{\alpha}_n$, $T_n$ üzerinde ve $\bar{\alpha}_{n+2} \circ \bar{\beta}_n$, $S_n$ üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde her $n = 4k+1$ için bir $\bar{\alpha}_n : T_n \to S_{n+2}$ ve her $n = 4k+3$ için bir $\bar{\beta}_n : S_n \to T_{n+2}$ birebir homomorfizmaları vardır. Buradan hareketle $\{\bar{\alpha}_{4k+1}\}$ ve $\bar{\beta}_{4k+3}$ $w$-dizileri düzgündür. Bu takdirde $\bar{\alpha}_w := \bigcup_{n \in N} \bar{\alpha}_n : T_w \to S_{w+1}$ ve $\bar{\beta}_w := \bigcup_{n \in N} \bar{\beta}_n : S_w \to T_{w+1}$ şeklinde tanımlanan $\bar{\alpha}_w$ ve $\bar{\beta}_w$ birebir homomorfizmaları için $\bar{\alpha}_w \circ \bar{\beta}_w = \bar{\beta}_w \circ \bar{\alpha}_w = 1_D$'dir. Bu böyle devam eder... Şimdi $\rho < \lambda$ sonsuz limit ordinali için, $\nu < \rho$ olan her $\bar{\alpha}_\nu$'nin bir genişlemesi olarak $\bar{\alpha}_\rho : T_\rho \to S_\rho$ izomorfizmasını tanımlayalım. Ayrıca $\bar{\beta}_\rho = \bar{\alpha}_\rho^{-1}$ ve $\alpha_{\rho+1} : T_{\rho+1} \to S_{\rho+2}$ birebir homomorfizmasını alalım. Bu takdirde, $\varphi := (\alpha_{\rho+1} \circ \bar{\beta}_\rho)^{-1}$, $S_{\rho+2}$'nin $\alpha_{\rho+1}(\bar{\beta}_\rho(S_\rho))$ altgrubundan $S_\rho$'ya bir doğal izomorfizmadır. Önerme 4.4'ten dolayı, $j_h|_{\alpha_{\rho+1}(\bar{\beta}_\rho(S_\rho))} = \varphi$ olacak şekilde bir $j_h, h \in S_{\rho+3}$ iç otomorfizması vardır. Buradan hareketle $\bar{\alpha}_{\rho+1} := j_h \circ \alpha_{\rho+1}$ olmak üzere $\bar{\alpha}_{\rho+1} \circ \bar{\beta}_\rho$, $S_\rho$ üzerinde birim dönüşümdür. Daha sonra da limit ordinal durumu ele alınırsa istenen $\bar{\alpha}$ bulunur. $\square$

**KAYNAKLAR**


[1] Kegel, O.H. 2008. Regular limits of infinite symmetric groups. Ischia Group Theory World Scientific.

[2] Robinson, D.J.S. 1995. A Course in the Theory of Groups. Springer Verlag, New York.

[3] Belyaev, V.V. 1992. Locally simple groups as a product of two inert subgroups. **Algebra i Logika**, 31: 360-368.(English version=Algebra and Logic ,31: 216-221)

[4] Hall, P. 1959. Some constructions for locally finite groups. **J.London Math.Soc.**, 34: 305-319.

[5] Higman, G., Neumann, B.H. and Neumann, H. 1949. Embedding theorems for groups. **J.London Math.Soc.**, 24: 247-254.

[6] Higman, G., Scott, E. 1988. Existentially Closed Groups. Oxford University Press.

[7] Lyndon, R.C., Schupp, P.E. 1977. Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, New York.

[8] Neumann, B.H. 1937. Some remarks on infinite groups. **J.London Math.Soc.**, 12: 120-127.

[9] Neumann, B.H. 1954. An essay on free products of groups with amalgamation. **Philos.Trans.Roy.Soc.London Math.**, 246: 503-554.

[10] Scott, W.R. 1951. Algebraically closed groups. **Proc.American Math.Soc.**, 2: 198-201.

[11] Kegel, O.H., Wehrfritz, B.A.F. 1973. Locally Finite Groups. North Holland Publishing Company, Amsterdam.

[12] Rotman, J.J.1995. An Introduction to the Theory of Groups. Springer Verlag, New York.

# ÖZ GEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Ayşe Büte |
| Doğum Yeri ve Tarihi | : | Aydın, 19.09.1988 |

## EĞİTİM DURUMU

| | | |
|---|---|---|
| Lisans Öğrenimi | : | Ondokuz Mayıs Üniversitesi<br>Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl. |
| Yüksek Lisans Öğrenimi | : | Adnan Menderes Üniversitesi<br>Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl. |
| Bildiği Yabancı Diller | : | İngilizce |

## BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
  -SCI
  -Diğer
b) Bildiriler
  -Uluslararası
  -Ulusal
c) Katıldığı Projeler

## İŞ DENEYİMİ

| | | |
|---|---|---|
| Çalıştığı Kurumlar ve Yıl | : | |
| | : | |

## İLETİŞİM

| | | |
|---|---|---|
| E-posta Adresi | : | ayse.bute@stu.adu.edu.tr |
| Tarih | : | 18.07.2012 |